МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1989

УДК 539.3.01

А. Л. КАЛАМКАРОВ, Б. А. КУДРЯВЦЕВ, В. З. ПАРТОН

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Построено точное аналитическое фундаментальное решение трехмерной задачи теории упругости, периодическое по двум координатам. Результаты работы могут быть использованы при решении двоякопериодических трехмерных задач теории упругости методом граничных элементов и, в частности, при решении локальных задач на ячейке периодичности, полученных авторами ранее при асимптотическом анализе пространственной задачи теории упругости для искривленного тонкого неоднородного (композиционного) слоя с быстро осциллирующей толщиной и периодической структурой.

При стремлении периода к бесконечности полученное решение сводится к известному фундаментальному решению Кельвина.

1. Введение. При решении трехмерных задач теории упругости методом граничных элементов используется фундаментальное решение уравнений теории упругости для сосредоточенной силы, действующей в неограниченной упругой среде. В случае однородной изотропной среды такое решение получено Кельвином [1], а его применение в анализе трехмерного напряженного состояния с помощью метода граничных элементов подробно обсуждается в [2, 3].

В [4, 5] предложен метод перехода от пространственных задач теории упругости для искривленного тонкого слоя с периодически меняющейся толщиной к системе уравнений для осредненной гладкой оболочки, эффективные упругие характеристики которой определяются из решения локальных задач на ячейке периодичности. Несмотря на специфику этих задач, они принадлежат к задачам теории упругости с некоторыми искусственными поверхностными и объемными нагрузками, выражаемыми через коэффициенты упругости материала. Полученная в [4, 5] модель осредненной оболочки применима к исследованию композиционных оболочек, обладающих регулярной системой подкреплений произвольного вида. При этом область ячейки периодичности задается в ортогональной системе безразмерных координат α_1, α_2, γ, связанных со срединной поверхностью слоя, и для случая равных значений коэффициентов первой квадратичной формы $(A_1=A_2=A)$ эта область определяется неравенствами [4]:

$$-A/2<\xi_1<A/2, \quad -A/2<\xi_2<A/2$$

$$z^-<z<z^+, \quad \xi_1=A\alpha_1/(\varepsilon h)$$

$$\xi_2=A\alpha_2/(\varepsilon h), \quad z=\gamma/\varepsilon, \quad z^\pm=\pm{}^1/_2\pm hF^\pm(\xi_1/A, \xi_2/A)$$

где ε — толщина слоя, h — параметр порядка единицы, а функции $F^\pm(\xi_1/A, \xi_2/A)$ задают форму верхней и нижней поверхностей ячейки и определяют форму подкрепляющих элементов оболочки.

Как показано в [4], локальные задачи на ячейке периодичности сводятся к решению трехмерных уравнений теории упругости в области ячейки при заданных условиях на поверхностях $z=z^+$, $z=z^-$ и условиях периодичности данного решения по переменным ξ_1, ξ_2 с периодом A. В общем случае такие задачи могут быть решены только численно, например, с помощью метода граничных элементов. Однако применение известных схем метода граничных элементов, основанных на использовании фундаментального решения Кельвина для неограниченной среды, весьма затруднено из-за периодичности искомого напряженно-деформированного состояния по переменным ξ_1, ξ_2. Таким образом, возникает необходимость построения периодического фундаментального решения трехмерных уравнений теории упругости, с помощью которого возможно создание модифицированного алгоритма метода граничных элементов, пригодного для решения локальных задач, указанных в [4].

2. Определение фундаментального решения. Для изотропной среды фундаментальное периодическое решение определим как решение системы

$$
\begin{gathered}
h^{-1}\partial\tau_{i\alpha}/\partial\xi_\alpha+\partial\tau_{i3}/\partial z=-P_i\delta(\xi_1)\delta(\xi_2)\delta(z)\quad(i=1,2,3)\\
\tau_{\alpha\beta}=c_{44}h^{-1}(\partial U_\alpha/\partial\xi_\beta+\partial U_\beta/\partial\xi_\alpha)+c_{12}\delta_{\alpha\beta}(h^{-1}\partial U_\gamma/\partial\xi_\gamma+\partial U_3/\partial z)\\
\tau_{3\alpha}=c_{44}(h^{-1}\partial U_3/\partial\xi_\alpha+\partial U_\alpha/\partial z)\\
\tau_{33}=2c_{44}\partial U_3/\partial z+c_{12}(h^{-1}\partial U_\gamma/\partial\xi_\gamma+\partial U_3/\partial z)
\end{gathered}\tag{2.1}
$$

в области $|\xi_\alpha|<A/2$, $|z|<\infty$ с учетом периодичности функций U_α, U_3 ($\alpha=1,2$) по переменным ξ_α с периодом A. В уравнениях (2.1) предполагается суммирование по повторяющимся греческим индексам, принимающим значения 1 и 2, и введены обозначения $c_{12}=2G\nu(1-2\nu)^{-1}$, $c_{44}=G$ — упругие постоянные (G,ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона), $\delta(\xi)$ — дельта-функция, $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, P_i — компоненты сосредоточенной силы, действующей в начале координат.

Решение системы (2.1) представим в виде суммы трех решений, соответствующих силам P_1, P_2, P_3. Полагая сначала $P_2=P_3=0$ и учитывая представления (суммирование здесь и всюду далее от 1 до ∞):

$$\delta(\xi_\alpha)=A^{-1}+2A^{-1}\sum_n\cos(\lambda_n\xi_\alpha),\qquad \lambda_n=2\pi nA^{-1}$$

$$\delta(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\cos(z\xi)\,d\xi$$

запишем фундаментальное решение системы (2.1) в виде

$$
\begin{gathered}
U_1^{(1)}=-P_1(A^2c_{44})^{-1}z\eta(z)+{}^1/_2P_1(c_{11}+c_{44})(A^2c_{11}c_{44})^{-1}\sum_n(\lambda_n/h)^{-1}\times\\
\times\exp(-|z|\lambda_n/h)\cos(\lambda_n\xi_1)-{}^1/_2P_1(c_{11}-c_{44})(A^2c_{11}c_{44})^{-1}|z|\sum_n\times\\
\times\exp(-|z|\lambda_n/h)\cos(\lambda_n\xi_1)+P_1(A^2c_{44})^{-1}\sum_m(\lambda_m/h)^{-1}\exp[-|z|\lambda_m/h)\times\\
\times\cos(\lambda_m\xi_2)+2P_1(A^2c_{44})^{-1}\sum_n\sum_m(\lambda_n^2h^{-2}+\lambda_m^2h^{-2})^{-1/2}\exp(-|z|(\lambda_n^2h^{-2}+\\
+\lambda_m^2h^{-2})^{1/2}]\cos(\lambda_n\xi_1)\cos(\lambda_m\xi_2)-P_1(c_{11}-c_{44})(A^2c_{11}c_{44})^{-1}\sum_n\sum_m[(\lambda_n^2h^{-2}+\\
+\lambda_m^2h^{-2})^{-3/2}+|z|(\lambda_n^2h^{-2}+\lambda_m^2h^{-2})^{-1}]\lambda_n^2h^{-2}\exp[-|z|(\lambda_n^2h^{-2}+\lambda_m^2h^{-2})^{1/2}]\times\\
\times\cos(\lambda_n\xi_1)\cos(\lambda_m\xi_2)
\end{gathered}\tag{2.2}
$$

$$
\begin{gathered}
U_2^{(1)}=P_1(c_{11}-c_{44})(A^2c_{11}c_{44})^{-1}\sum_n\sum_m[(\lambda_n^2h^{-2}+\lambda_m^2h^{-2})^{-3/2}+\\
+|z|(\lambda_n^2h^{-2}+\lambda_m^2h^{-2})^{-1}]\lambda_m\lambda_nh^{-2}\times\\
\times\exp[-|z|(\lambda_n^2h^{-2}+\lambda_m^2h^{-2})^{1/2}]\sin(\lambda_n\xi_1)\sin(\lambda_m\xi_2)
\end{gathered}\tag{2.3}
$$

$$U_3^{(1)}=P_1(c_{11}-c_{44})(A^2 2c_{11}c_{44})^{-1}z\sum_n \exp(-|z|\lambda_n/h)\sin(\lambda_n\xi_1)+P_1(c_{11}-c_{44})\times$$

$$\times(A^2c_{11}c_{44})^{-1}z\sum_n\sum_m(\lambda_n^2h^{-2}+\lambda_m^2h^{-2})^{-1/2}\exp[-|z|(\lambda_n^2h^{-2}+$$

$$+\lambda_m^2h^{-2})^{1/2}]\lambda_nh^{-1}\sin(\lambda_n\xi_1)\cos(\lambda_m\xi_2) \qquad (2.4)$$

Здесь $c_{11}=c_{12}+2c_{44}$, $\eta(z)$ — единичная функция.

3. Преобразование фундаментального решения. Перейдем теперь к преобразованию формул (2.2)—(2.4) для выделения сингулярных и регулярных слагаемых. Прежде всего заметим, что обычные ряды в этих формулах могут быть просуммированы на основании известных равенств [6]:

$$\sum_n e^{-ny}\cos(n\varphi)=-{}^1/_2+{}^1/_2\,\mathrm{sh}\,y(\mathrm{ch}\,y-\cos\varphi)^{-1}$$

$$\sum_n e^{-ny}\sin(n\varphi)={}^1/_2\sin\varphi(\mathrm{ch}\,y-\cos\varphi)^{-1}$$

$$\sum_n n^{-1}e^{-ny}\cos(n\varphi)=y/2-{}^1/_2\ln(2|\mathrm{ch}\,y-\cos\varphi|) \qquad (y>0,\ |\varphi|<\pi)$$

Для преобразования двойных сумм в (2.2)—(2.4) воспользуемся соотношениями, которые получаются из двух представлений для тэта-функций Якоби. Известны следующие формулы [6]:

$$\vartheta_3(\xi|i\tau)=1+2\sum_n\exp(-\pi n^2\tau)\cos(2n\xi)$$

$$\vartheta_3(\xi|i\tau)=\exp[-\xi^2(\pi\tau)^{-1}]\tau^{-1/2}+$$

$$+\tau^{-1/2}\sum_n\{\exp[-(\xi+\pi n)^2(\pi\tau)^{-1}]+\exp[-(\xi-\pi n)^2(\pi\tau)^{-1}]\}$$

Равенство

$$1+2\sum_n\exp(-\pi n^2\tau)\cos(2n\xi)=\exp[-\xi^2(\pi\tau)^{-1}]\tau^{-1/2}+$$

$$+\tau^{-1/2}\sum_n\{\exp[-(\xi+\pi n)^2(\pi\tau)^{-1}]+\exp[-(\xi-\pi n)^2(\pi\tau)^{-1}]\}$$

умножим на $\exp[-z^2(\pi\tau)^{-1}]\tau^{-1/2}$ и применим к нему преобразование Лапласа по τ. Учитывая при этом соотношения [7]:

$$\exp[-a(4\tau)^{-1}]\tau^{-1/2}\div(\pi/p)^{1/2}\exp[-(ap)^{1/2}]$$

$$\exp(-a(4\tau)^{-1}]\tau\div 2K_0[(ap)^{1/2}]$$

$$\exp[-a(4\tau)^{-1}-\pi n^2\tau]\tau^{-1/2}\div$$
$$\div\pi^{1/2}\exp[-a^{1/2}(p+\pi n^2)^{1/2}](p+\pi n^2)^{-1/2}$$

где p — параметр преобразования Лапласа, $K_0(x)$ — функция Макдональда, получим формулу

$$(\pi/p)^{1/2}\exp[-2|z|(p/\pi)^{1/2}]+2\pi^{1/2}\sum_n(p+\pi n^2)^{-1/2}\exp[-2|z|(p\pi^{-1}+n^2)^{1/2}\times$$

$$\times\cos(2n\xi)=2K_0[2(p/\pi)^{1/2}(z^2+\xi^2)^{1/2}]+2\sum_n\{K_0[2(p/\pi)^{1/2}(z^2+(\xi+\pi n)^2)^{1/2}]+$$

$$+K_0[2(p/\pi)^{1/2}(z^2+(\xi-\pi n)^2)^{1/2}]\} \qquad (3.1)$$

Полагая в (3.1) $p=\pi k^2$, будем иметь равенство

$$\sum_n (k^2+n^2)^{-1/2}\exp[-2|z|(k^2+n^2)^{1/2}]\cos(2n\xi)=$$
$$=-{}^1/_2k^{-1}\exp(-2|z|k)+K_0[2k(z^2+\xi^2)^{1/2}]+$$
$$+\sum_n\{K_0[2k(z^2+(\xi+\pi n)^2)^{1/2}]+K_0[2k(z^2+(\xi-\pi n)^2)^{1/2}]\} \quad (3.2)$$

Умножим теперь обе части (3.2) на $\cos(2k\eta)$ и просуммируем по k. Используя при этом известное разложение [8]:

$$\sum_k K_0(kx)\cos(ka)=(\pi/2)(x^2+a^2)^{-1/2}+\frac{1}{2}[\mathrm{C}+\ln(x/(4\pi))]+$$
$$+(\pi/2)\sum_k\{[(2\pi k-a)^2+x^2]^{-1/2}-(2\pi k)^{-1}\}+ \quad (3.3)$$
$$+(\pi/2)\sum_k\{[(2\pi k+a)^2+x^2]^{-1/2}-(2\pi k)^{-1}\}$$

где C — постоянная Эйлера, $x>0$, получим искомое представление двойной суммы в виде

$$\sum_k\sum_n(k^2+n^2)^{-1/2}\exp[-2|z|(k^2+n^2)^{1/2}]\cos(2n\xi)\cos(2k\eta)=$$
$$={}^1/_2\ln\{(2\pi)^{-1}[2(z^2+\xi^2)|\mathrm{ch}(2z)-\cos(2\eta)|]^{1/2}\}+ \quad (3.4)$$
$$+(\pi/4)(z^2+\xi^2+\eta^2)^{-1/2}+\Phi_0(\xi,\eta,z) \qquad (|\xi|<\pi/2,\ |\eta|<\pi/2)$$

Здесь $\Phi_0(\xi,\eta,z)$ — регулярное слагаемое, имеющее вид

$$\Phi_0(\xi,\eta,z)=-({}^1/_2)(|z|-\mathrm{C})+(\pi/4)\sum_k\{[(\pi k-\eta)^2+z^2+\xi^2]^{-1/2}-(\pi k)^{-1}\}+$$
$$+(\pi/4)\sum_k\{[(\pi k+\eta)^2+z^2+\xi^2]^{-1/2}-(\pi k)^{-1}\}+$$
$$+\sum_k\sum_n\{K_0[2k(z^2+(\pi n+\eta)^2)^{1/2}]+K_0[2k(z^2+(\pi n-\eta)^2)^{1/2}]\}\cos(2k\eta)$$

Еще одно представление для двойного ряда, входящего в (2.2), найдем в результате дифференцирования по k равенства (3.2), умножения его на $k\cos(2k\eta)$ и суммирования по k. Если при этом учесть разложение

$$x\sum_k kK_1(kx)\cos(ka)=(\pi/2)x^2(x^2+a^2)^{-3/2}-{}^1/_2+(\pi/2)\sum_k\{x^2[(2\pi k-a)^2+$$
$$+x^2]^{-3/2}+x^2[(2\pi k+a)^2+x^2]^{-3/2}\}$$

которое следует из (3.3), то получим формулу

$$\sum_k\sum_n[(k^2+n^2)^{-3/2}+2|z|(k^2+n^2)^{-1}]k^2\exp[-2|z|(k^2+n^2)^{1/2}]\times$$
$$\times\cos(2n\xi)\cos(2k\eta)=(\pi/4)(z^2+\eta^2)(z^2+\xi^2+\eta^2)^{-3/2}+{}^1/_2\ln[(2|\mathrm{ch}(2z)- \quad (3.5)$$
$$-\cos(2\xi)|)^{1/2}]-{}^1/_2z\,\mathrm{sh}(2z)[\mathrm{ch}(2z)-\cos(2\xi)]^{-1}+\Psi_0(\xi,\eta,z)$$

где $\Psi_0(\xi,\eta,z)$ — регулярное слагаемое вида

$$\Psi_0(\xi,\eta,z)=-{}^1/_2+(\pi/4)\sum_k\{(z^2+\eta^2)[(\pi k-\xi)^2+z^2+\eta^2]^{-3/2}+$$
$$+(z^2+\eta^2)[(\pi k+\xi)^2+z^2+\eta^2]^{-3/2}\}+$$

$$+\sum_k\sum_n\{2k[z^2+(\eta+\pi n)^2]^{1/2}K_1[2k(z^2+(\eta+\pi n)^2)^{1/2}]+$$
$$+2k[z^2+(\eta-\pi n)^2]^{1/2}K_1[2k(z^2+(\eta-\pi n)^2)^{1/2}]$$

Для выделения сингулярных слагаемых в двойном ряде (2.3) продифференцируем равенство (3.2) сначала по k, а затем по ξ, умножим полученный результат на $\sin(2k\eta)$ и просуммируем по k. Учитывая при этом разложение

$$\sum_k kK_0(kx)\sin(ka)=(\pi/2)a(x^2+a^2)^{-3/2}+(\pi/2)\sum_k\{(a-2\pi k)\times$$
$$\times[(a-2\pi k)^2+x^2]^{-3/2}+(a+2\pi k)[(a+2\pi k)^2+x^2]^{-3/2}\}$$

получим

$$\sum_k\sum_n[(k^2+n^2)^{-3/2}+2z(k^2+n^2)^{-1}]\exp[-2z(k^2+n^2)^{1/2}]kn\times$$
$$\times\sin(2n\xi)\sin(2k\eta)=(\pi/4)\xi\eta(z^2+\xi^2+\eta^2)^{-3/2}+F_0(\xi,\eta,z) \qquad (3.6)$$
$$F_0(\xi,\eta,z)=(\pi/4)\eta\sum_k\{(\xi-\pi k)[(\xi-\pi k)^2+z^2+\eta^2]^{-3/2}+$$
$$+(\xi+\pi k)[(\xi+\pi k)^2+z^2+\eta^2]^{-3/2}\}+$$
$$+2\sum_k\sum_n\{(\eta+\pi n)K_0[2k(z^2+(\eta+\pi n)^2)^{1/2}]+$$
$$+(\eta-\pi n)K_0[2k(z^2+(\eta-\pi n)^2)^{1/2}]\}k\sin(2k\xi)$$

Теперь с помощью равенств (3.4)–(3.6) можно записать формулы (2.2)–(2.4) в виде

$$U_1^{(1)}=P_1h^2[16\pi G(1-\nu)]^{-1}[(3-4\nu)(z^2+h^2\xi_1{}^2+h^2\xi_2{}^2)^{-1/2}+$$
$$+h^2\xi_1{}^2(z^2+h^2\xi_1{}^2+h^2\xi_2{}^2)^{-3/2}]+P_1(A^2c_{44})^{-1}[-z\eta(z)+2\Phi_3(\xi_1,\xi_2,z)+$$
$$+(c_{11}-c_{44})c_{11}{}^{-1}\Phi_1(\xi_1,\xi_2,z)] \qquad (3.7)$$

$$U_2^{(1)}=P_1h^2[16\pi G(1-\nu)]^{-1}h^2\xi_1\xi_2(z^2+h^2\xi_1{}^2+h^2\xi_2{}^2)^{-3/2}+$$
$$+P_1(A^2c_{44})^{-1}(c_{11}-c_{44})c_{11}{}^{-1}\Phi_2(\xi_1,\xi_2,z) \qquad (3.8)$$

$$U_3^{(1)}=P_1h^2[16\pi G(1-\nu)]^{-1}zh\xi_1(z^2+h^2\xi_1{}^2+h^2\xi_2{}^2)^{-3/2}-$$
$$-P_1(A^2c_{44})^{-1}(c_{11}-c_{44})c_{11}{}^{-1}zh^{-1}\partial\Phi_3(\xi_2,\xi_1,z)/\partial\xi_1 \qquad (3.9)$$

$$\Phi_1(\xi_1,\xi_2,z)=Ah(4\pi)^{-1}-Ah(8\pi)^{-1}\sum_k\{A^{-2}h^{-2}(z^2+h^2\xi_2{}^2)[(k-\xi_1A^{-1})^2+$$
$$+A^{-2}h^{-2}(z^2+h^2\xi_2{}^2)]^{-3/2}+A^{-2}h^{-2}(z^2+h^2\xi_2{}^2)[(k+\xi_1A^{-1})^2+$$
$$+A^{-2}h^{-2}(z^2+h^2\xi_2{}^2)]^{-3/2}\}-Ah\sum_k\sum_m\{[z^2A^{-2}h^{-2}+(\xi_2A^{-1}+m)^2]^{1/2}\times$$
$$\times K_1[2\pi k(z^2A^{-2}h^{-2}+(\xi_2A^{-1}+m)^2)^{1/2}]+[z^2A^{-2}h^{-2}+(\xi_2A^{-1}-m)^2]^{1/2}\times \qquad (3.10)$$
$$\times K_1[2\pi k(z^2A^{-2}h^{-2}+(\xi_2A^{-1}-m)^2)^{1/2}]\}k\cos(k2\pi\xi_1A^{-1})$$

$$\Phi_2(\xi_1,\xi_2,z)=h\xi_2(8\pi)^{-1}\sum_k\{(\xi_1A^{-1}-k)[(k-\xi_1A^{-1})^2+$$
$$+A^{-2}h^{-2}(z^2+h^2\xi_2{}^2)]^{-3/2}+(\xi_1A^{-1}+k)[(k+\xi_1A^{-1})^2+A^{-2}h^{-2}(z^2+h^2\xi_2{}^2)]^{-3/2}\}+$$
$$+Ah\sum_k\sum_m\{(\xi_2A^{-1}+m)K_0[2\pi k(z^2A^{-2}h^{-2}+(\xi_2A^{-1}+m)^2)^{1/2}]+ \qquad (3.11)$$
$$+(\xi_2A^{-1}-m)K_0[2\pi k(z^2A^{-2}h^{-2}+(\xi_2A^{-1}-m)^2)^{1/2}]k\sin(k2\pi\xi_1A^{-1})$$

$$\Phi_3(\xi_1,\xi_2,z)=AhC(4\pi)^{-1}-Ah(4\pi)^{-1}\{\ln[2|\mathrm{ch}(2\pi z(Ah)^{-1})-$$
$$-\cos(2\pi\xi_1A^{-1})|]^{1/2}-\ln[(z^2h^{-2}+\xi_1^2)(2A)^{-1}]\}+ \tag{3.12}$$
$$+Ah(8\pi)^{-1}\sum_k\{[(k-\xi_2A^{-1})^2+A^{-2}h^{-2}(z^2+h^2\xi_1^2)]^{-1/2}-k^{-1}\}+$$
$$+Ah(8\pi)^{-1}\sum_k\{[(k+\xi_2A^{-1})^2+A^{-2}h^{-2}(z^2+h^2\xi_1^2)]^{-1/2}-k^{-1}\}+$$
$$+Ah(2\pi)^{-1}\sum_k\sum_m\{K_0[2\pi k(A^{-2}h^{-2}z^2+(\xi_1A^{-1}+m)^2)^{1/2}]+$$
$$+K_0[2\pi k(A^{-2}h^{-2}z^2+(\xi_1A^{-1}-m)^2)^{1/2}]\cos(k2\pi\xi_2A^{-1})$$

Заметим, что первые слагаемые в формулах (3.7)—(3.9) соответствуют известному сингулярному решению Кельвина для неограниченной изотропной среды, нагруженной сосредоточенной силой P_1 в точке $\xi_1=\xi_2=z=0$, а остальные слагаемые в (3.7)—(3.9) являются регулярными функциями в этой точке.

Можно также показать, что выражения

$$[\Phi_1(\xi_1,\xi_2,z)-A^2h^2(8\pi)^{-1}(z^2+h^2\xi_2^2)(z^2+h^2\xi_1^2+h^2\xi_2^2)^{-3/2}]$$
$$[\Phi_2(\xi_1,\xi_2,z)+A^2h^2(8\pi)^{-1}h^2\xi_1\xi_2(z^2+h^2\xi_1^2+h^2\xi_2^2)^{-3/2}]$$
$$[\Phi_3(\xi_1,\xi_2,z)+A^2h^2(8\pi)^{-1}(z^2+h^2\xi_1^2+h^2\xi_2^2)^{-1/2}]$$

будут периодичны по переменным ξ_1, ξ_2 с периодом A, что и обеспечивает периодичность смещений $U_i^{(1)}$ по ξ_1 и ξ_2. Кроме того, $\Phi_2(\xi_1,\xi_2,z)=\Phi_2(\xi_2,\xi_1,z)$, $\Phi_3(\xi_1,\xi_2,z)=\Phi_3(\xi_2,\xi_1,z)$ и двойные ряды в (3.10)—(3.12) сходятся быстро в силу свойств функций $K_0(x)$ и $K_1(x)$ при $x\to\infty$.

Аналогичным образом можно построить решение уравнений (2.1) при действии сил P_2 и P_3 в направлении осей ξ_2, z. В результате, получим следующие выражения:

$$U_1^{(2)}=U_2^{(1)}P_2P_1^{-1}$$

$$U_2^{(2)}=P_2h^2[16\pi G(1-\nu)]^{-1}[(3-4\nu)(z^2+h^2\xi_1^2+h^2\xi_2^2)^{-1/2}+$$
$$+h^2\xi_2^2(z^2+h^2\xi_1^2+h^2\xi_2^2)^{-3/2}]+P_2(A^2G)^{-1}[-z\eta(z)+ \tag{3.13}$$
$$+2\Phi_3(\xi_2,\xi_1,z)+(c_{11}-c_{44})c_{11}^{-1}\Phi_1(\xi_2,\xi_1,z)]$$

$$U_3^{(2)}=P_2h^2[16\pi G(1-\nu)]^{-1}zh\xi_2(z^2+h^2\xi_1^2+h^2\xi_2^2)^{-3/2}-$$
$$-P_2(A^2G)^{-1}(c_{11}-c_{44})c_{11}^{-1}zh^{-1}\partial\Phi_3(\xi_1,\xi_2,z)/\partial\xi_2$$

$$U_1^{(3)}=U_3^{(1)}P_3P_1^{-1},\qquad U_2^{(3)}=U_3^{(2)}P_3P_2^{-1}$$

$$U_3^{(3)}=P_3h^2[16\pi G(1-\nu)]^{-1}[(3-4\nu)(z^2+h^2\xi_1^2+h^2\xi_2^2)^{-1/2}+$$
$$+z^2(z^2+h^2\xi_1^2+h^2\xi_2^2)^{-3/2}]+P_3(A^2G)^{-1}[-z\eta(z)+(c_{11}+c_{44})c_{11}^{-1}\Phi_3(\xi_2,\xi_1,z)-$$
$$-(c_{11}-c_{44})c_{11}^{-1}z\,\partial\Phi_3(\xi_2,\xi_1,z)/\partial z] \tag{3.14}$$

Очевидно, что первые слагаемые в (3.13), (3.14) по-прежнему соответствуют сингулярному решению Кельвина, а остальные члены в (3.13), (3.14) являются регулярными функциями, которые обеспечивают периодичность $U_i^{(2)}$, $U_i^{(3)}$ по переменным ξ_1, ξ_2.

4. Результаты. Суммируя формулы для смещений, соответствующие силам P_1, P_2, P_3, можно записать фундаментальное периодическое решение в виде

$$U_i(x)=[G_{ij}(x)+G_{ij}^*(x)]P_j$$
$$G_{ij}=[16\pi G(1-\nu)]^{-1}[(3-4\nu)\delta_{ij}r^{-1}+x_ix_jr^{-3}] \tag{4.1}$$
$$r^2=x_ix_i,\ x_1=h\xi_1,\ x_2=h\xi_2,\ x_3=z,\ x=(x_1,x_2,x_3)$$

где $G_{ij}^*(x)$ определяются через функции $\Phi_i(x_1h^{-1}, x_2h^{-1}, x_3)$ по формулам

$$
\begin{aligned}
&G_{11}^*=(A^2G)^{-1}[-x_3\eta(x_3)+2\Phi_3(x_1h^{-1}, x_2h^{-1}, x_3)+\\
&\quad +{}^1/_2(1-\nu)^{-1}\Phi_1(x_1h^{-1}, x_2h^{-1}, x_3)]\\
&G_{21}^*=G_{12}^*=[2A^2G(1-\nu)]^{-1}\Phi_2(x_1h^{-1}, x_2h^{-1}, x_3)\\
&G_{13}^*=G_{31}^*=-[2A^2G(1-\nu)]^{-1}x_3\partial\Phi_3(x_1h^{-1}, x_2h^{-1}, x_3)/\partial x_1\\
&G_{22}^*=(A^2G)^{-1}[-x_3\eta(x_3)+2\Phi_3(x_1h^{-1}, x_2h^{-1}, x_3)+\\
&\quad +{}^1/_2(1-\nu)^{-1}\Phi_1(x_2h^{-1}, x_1h^{-1}, x_3)\\
&G_{23}^*=G_{32}^*=-[2A^2G(1-\nu)]^{-1}x_3\partial\Phi_3(x_1h^{-1}, x_2h^{-1}, x_3)/\partial x_2\\
&G_{33}^*=(A^2G)^{-1}[-x_3\eta(x_3)+{}^1/_2(3-4\nu)(1-\nu)^{-1}\Phi_3(x_1h^{-1}, x_2h^{-1}, x_3)-\\
&\quad -{}^1/_2(1-\nu)^{-1}x_3\partial\Phi_3(x_1h^{-1}, x_2h^{-1}, x_3)/\partial x_3]
\end{aligned}
\qquad (4.2)
$$

Формулы (4.1), (4.2) в сочетании с (3.10)–(3.12) дают решение поставленной задачи об определении фундаментального двоякопериодического решения трехмерной задачи теории упругости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: Глав. ред. общетехн. лит. и номогр., ОНТИ, 1935. 674 с.
2. *Бенерджи П. К., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
3. *Крауч С., Старфилд А.* Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987. 328 с.
4. *Каламкаров А. Л., Кудрявцев Б. А., Партон В. З.* Задача об искривленном слое из композиционного материала с волнистыми поверхностями периодической структуры // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 1. С. 68–75.
5. *Каламкаров А. Л., Кудрявцев Б. А., Партон В. З.* Термоупругость регулярно неоднородного искривленного слоя с волнистыми поверхностями // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 1000–1008.
6. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 343 с.
8. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды: Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.

Москва

Поступила в редакцию 7.IV.1988