МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА № 3 · 1989

УДК 539.3.01

С. Е. МИХАЙЛОВ

АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ВБЛИЗИ УГЛОВ ПРИ ЗАДАННЫХ НА ГРАНИЦЕ УСИЛИЯХ

Рассматриваются граничные интегральные уравнения упругого потенциала простого слоя и Вейля – Хациревича, к которым сводятся плоские краевые задачи линейной теории упругости для сжимаемых и несжимаемых изотропных сред, а также линеаризованные задачи гидродинамики несжимаемой вязкой жидкости, в областях с кусочно-гладкой границей при заданных на границе усилиях [1]. В рамках подхода [2] с использованием интегрального преобразования Меллина, как и в [3] для интегральных уравнений антиплоской деформации, получены явные представления асимптотик плотностей интегральных уравнений до ограниченных членов включительно. Даны асимптотики и при критических углах, когда кроме степенных появляются также и логарифмические члены, и указана связь между коэффициентами интенсивности плотностей при критических и докритических углах.

Представлена также асимптотика напряжений в окрестности угловых точек вплоть до ограниченных членов и даны выражения коэффициентов интенсивности напряжений через коэффициенты интенсивности плотностей интегральных уравнений.

1. Введение. В [1] задачи теории упругости для неодносвязных областей с угловыми точками при заданных на границе усилиях ($\sigma_{ij}n_j|_{\partial D}=g_i(s)$) сведены с помощью потенциала простого слоя первого рода к граничному интегральному уравнению типа I (ГИУ I):

$$Q_i^{\mathrm{I}}(s_0)-\int\limits_{\partial D}K_{ij}^{\mathrm{I}}(s,s_0)Q_j^{\mathrm{I}}(s)\,ds=h_i^{\mathrm{I}}(s_0)$$

$$K_{ij}^{\mathrm{I}}(s,s_0)=[\pi r^2(1+\varkappa)]^{-1}\{[4z_iz_jr^{-2}+(\varkappa-1)\delta_{ij}]z_ln_l(s_0)+ +(\varkappa-1)[n_j(s_0)z_i-n_i(s_0)z_j]\} \tag{1.1}$$

либо с помощью потенциала Вейля – Хациревича – к граничному интегральному уравнению типа III (ГИУ III):

$$Q_i^{\mathrm{III}}(s_0)-\int\limits_{\partial D}K_{ij}^{\mathrm{III}}(s,s_0)Q_j^{\mathrm{III}}(s)\,ds=h_i^{\mathrm{III}}(s_0)$$

$$K_{ij}^{\mathrm{III}}(s,s_0)=(2/\pi)r^{-4}z_iz_jz_ln_l(s_0)$$

Здесь $z_i=x_i(s_0)-x_i(s)$, s – дуговая координата контура, $r^2=z_iz_i$, $n_i(s_0)$ – внешняя нормаль к ∂D, постоянная плоской теории упругости $\varkappa>1$, $h_i^{\mathrm{I}}(s)=g_i(s)$, $h_i^{\mathrm{III}}(s)=g_i(s)+\sigma_{0ij}n_j(s)$, где σ_{0ij} – добавочное бесконечно гладкое вплоть до границы ∂D поле напряжений, появляющееся для неодносвязных областей D. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 2, δ_{ij} – символ Кронекера.

Ядра обоих уравнений имеют сильные стационарные особенности в угловых точках ∂D, ядро ГИУ I, кроме того, имеет особенность типа Коши, а ядро ГИУ III непрерывно в достаточно гладких точках контура. Эти уравнения изучены в [1] в пространствах Лебега $L_p(\partial D)$ для двумерных областей D. В [4] изучалось ГИУ I в трехмерных областях с гладкими ребрами.

Через плотности Q_i^{I}, Q_i^{III} напряжения выражаются следующим образом [1]:

$$\sigma_{il}(Q^{\mathrm{I}}) =$$

$$= -\frac{1}{\pi(1+\varkappa)}\int\limits_{\partial D}\frac{1}{r^2}\left\{\left[4\frac{z_iz_j}{r^2}+(\varkappa-1)\delta_{ij}\right]z_l+(\varkappa-1)\left[\delta_{jl}z_i-\delta_{il}z_j\right]\right\}Q_j(s)\,ds \tag{1.2}$$

$$\sigma_{il}(Q^{\mathrm{III}}) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{\partial D}\frac{z_iz_jz_l}{r^4}Q_j(s)\,ds \tag{1.3}$$

Отметим, что представление (1.3) дает также решение уравнений Стокса несжимаемой вязкой жидкости и совпадающих с ними уравнений несжимающей упругой среды и является гидродинамическим потенциалом простого слоя, сводящим задачи с заданными усилиями для этих сред к тому же ГИУ III [1].

2. Асимптотика решения ГИУ. Рассмотрим сначала случай, когда s^* — дуговая координата угловой точки, D — бесконечный клин $\{x_i= =\rho(\delta_{1i}\cos\theta+\delta_{2i}\sin\theta),\ 0<\rho<\infty,\ -\omega/2<\theta<\omega/2\}$, $0<\omega<2\pi$.

Тогда ГИУ I, III преобразуются к виду

$$Q_{ip}(\rho_0)-\int\limits_0^\infty K_{ijpm}(\rho,\rho_0)\,Q_{jm}(\rho)\,d\rho=h_{ip}(\rho_0) \tag{2.1}$$

$$Q_{jm}(\rho):=Q_j(s^*+(-1)^m\rho),\ h_{ip}(\rho_0):=h_i(s^*+(-1)^p\rho_0)$$
$$K_{ijpm}(\rho,\rho_0):=K_{ij}(s^*+(-1)^m\rho,\ s^*+(-1)^p\rho_0) \tag{2.2}$$

Пусть $L_{2,\alpha}(0,\infty)$ — весовое пространство функций с нормой

$$\|f\|_{L_{2,\alpha}}:=\left\{\int\limits_0^\infty[f(\rho)\rho^\alpha]^2\,d\rho\right\}^{1/2}<\infty,\qquad L^\vee_{2,\alpha}:=\bigcap_{\alpha<\beta<1/2}L_{2,\beta}$$

т. е. множество $L^\vee_{2,\alpha}$ состоит из функций, интегрируемых с квадратом с любым весом, показатель которого $\beta\in(\alpha,{}^1/_2)$.

Пусть $h_{ip}(\rho_0)\in L^\vee_{2,\alpha_0}$, $\alpha_0<{}^1/_2$. Будем искать решение Q_{ip} ГИУ (2.1), принадлежащее $L^\vee_{2,\alpha}$ с возможно большим $\alpha<{}^1/_2$, т. е. множеству

$$M_{1/2}:=\bigcup_{\alpha<1/2}L^\vee_{2,\alpha}\equiv\bigcup_{\alpha<1/2}\Big(\bigcap_{\alpha<\beta<1/2}L_{2,\beta}\Big)$$

Этому множеству принадлежат, в частности, функции, удовлетворяющие для какого-либо $\alpha<{}^1/_2$ оценкам

$$Q=O(r^{-1/2-\alpha+\varepsilon})\,(r\to0),\ Q=O(r^{-1-\varepsilon})\,(r\to\infty),\ \forall\varepsilon>0$$
$$Q\in L_2(a_0,a_\infty),\ \forall a_0,a_\infty\ (\infty>a_\infty>a_0>0)$$

которые обычно используются при нахождении асимптотик решений краевых задач (см., например [5]).

Имея в виду принадлежность $h_{ip}{}^\vee\in L^\vee_{2,\alpha_0}$, $Q_{ip}\in M_{1/2}$, будем, следуя [6], решать (2.1) с помощью преобразования Меллина, после применения которого к (2.1) приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\langle Q_{ip}\rangle(\gamma)-\hat{K}_{ijpm}(\gamma)\langle Q_{jm}\rangle(\gamma)=\langle h_{ip}\rangle(\gamma),\quad {}^1/_2+\alpha<\gamma<1 \tag{2.3}$$

$$\langle Q_{ip}\rangle(\gamma):=\int\limits_0^\infty Q_{ip}(\rho)\,\rho^{\gamma-1}d\rho,\quad \hat{K}_{ijpm}(\gamma):=\int\limits_0^\infty K_{ijpm}(1,u)\,u^{\gamma-1}du \tag{2.4}$$

имеющей место в интервале $1/2+\alpha<\mathrm{Re}\,\gamma<1$ при некотором $\alpha<1/2$. При этом функция $Q_{ip}(\rho)$ через трансформанту $\langle Q_{ip}\rangle(\gamma)$ представляется в виде

$$Q_{ip}(\rho)=\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\langle Q_{ip}\rangle(\gamma)\rho^{-\gamma}d\gamma,\quad 1/2+\alpha<c<1 \tag{2.5}$$

При получении (2.3), (2.4) учтено, что для бесконечного клина в силу (2.1) $K_{ijpm}(\rho,\rho_0)=\rho^{-1}K_{ijpm}(1,\rho_0/\rho)$.

Подставляя (1.1) в (2.4), получаем после ряда преобразований

$$\begin{gathered}K^{I\wedge}_{ijpm}(\gamma)=-a^I(\gamma)\chi_{ij}\Omega_{pm}-b^I(\gamma)\Omega_{ij}e_{pm}+c^I(\gamma)\delta_{ij}\Omega_{pm}-\\-d^I(\gamma)e_{ij}e_{pm}+f^I(\gamma)e_{ij}\chi_{pm}\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered}e_{ij}:=\delta_{1i}\delta_{2j}-\delta_{2i}\delta_{1j},\quad \chi_{ij}:=-\delta_{1i}\delta_{1j}+\delta_{2i}\delta_{2j},\quad \Omega_{ij}:=\delta_{1i}\delta_{2j}+\delta_{2i}\delta_{1j}\\ a^{\mathrm{I}}:=2(\gamma-1)\sin\varphi\cos[(\gamma-1)\varphi]\,[(1+\varkappa)\sin(\gamma\pi)]^{-1}\\ b^{\mathrm{I}}:=-2(\gamma-1)\sin\varphi\sin[(\gamma-1)\varphi]\,[(1+\varkappa)\sin(\gamma\pi)]^{-1}\\ c^{\mathrm{I}}:=-\sin[(\gamma-1)\varphi]/\sin\gamma\pi\\ d^{\mathrm{I}}:=(\varkappa-1)\cos[(\gamma-1)\varphi]\,[(\varkappa+1)\sin(\gamma\pi)]^{-1}\\ f^{\mathrm{I}}:=-(\varkappa-1)(\varkappa+1)^{-1}\operatorname{ctg}(\gamma\pi),\quad \varphi:=\omega-\pi\end{gathered} \tag{2.7}$$

Матрица $K^{\mathrm{III}\wedge}_{ijpm}(\gamma)=K^{\mathrm{I}\wedge}_{ijpm}(\gamma)\,|_{\varkappa=1}$.

Решение системы (2.3) имеет вид

$$\langle Q_{ip}\rangle(\gamma)=G^{\wedge}_{ijpm}(\gamma)\langle h_{jm}\rangle(\gamma)/\Delta(\gamma) \tag{2.8}$$

Здесь $G^{\wedge}_{ijpm}(\gamma)$ — алгебраические дополнения элементов матрицы размера 4×4 системы (2.3), $\Delta(\gamma)$ — ее определитель. Причем их можно выписать явно

$$\begin{gathered}G^{\wedge}_{1111}=G^{\wedge}_{1122}=1-K^{\wedge2}_{2212}+K^{\wedge2}_{1211}+K^{\wedge}_{1212}K^{\wedge}_{2112}-K^{\wedge}_{1211}K^{\wedge}_{2212}(K^{\wedge}_{2112}+K^{\wedge}_{1212})\\ G^{\wedge}_{2111}=-G^{\wedge}_{2122}=K^{\wedge}_{1211}+K^{\wedge}_{2112}(K^{\wedge}_{1112}-K^{\wedge}_{2212})+\\+K^{\wedge}_{1211}(K^{\wedge2}_{1211}-K^{\wedge2}_{2112}-K^{\wedge}_{2212}K^{\wedge}_{1112})\\ G^{\wedge}_{1121}=G^{\wedge}_{1112}=-K^{\wedge}_{1112}+K^{\wedge}_{1211}(K^{\wedge}_{1212}+K^{\wedge}_{2112})+\\+K^{\wedge}_{2212}(-K^{\wedge2}_{1211}+K^{\wedge}_{1112}K^{\wedge}_{2212}-K^{\wedge}_{1212}K^{\wedge}_{2112})\\ G^{\wedge}_{2121}=-G^{\wedge}_{2112}=K^{\wedge}_{2112}+K^{\wedge}_{1211}(-K^{\wedge}_{2212}+K^{\wedge}_{1112})-\\-K^{\wedge2}_{1211}K^{\wedge}_{1212}-K^{\wedge}_{1112}K^{\wedge}_{2112}K^{\wedge}_{2212}+K^{\wedge}_{1212}K^{\wedge2}_{2112}\\ G^{\wedge}_{1211}=-G^{\wedge}_{1222}=-K^{\wedge}_{1211}+K^{\wedge}_{1212}(-K^{\wedge}_{1112}+K^{\wedge}_{2212})+\\+K^{\wedge}_{1211}(-K^{\wedge2}_{1211}+K^{\wedge}_{1112}K^{\wedge}_{2212}+K^{\wedge2}_{1212})\\ G^{\wedge}_{2211}=G^{\wedge}_{2222}=1+K^{\wedge2}_{1211}-K^{\wedge2}_{1112}+K^{\wedge}_{1212}K^{\wedge}_{2112}+\\+K^{\wedge}_{1112}K^{\wedge}_{1211}(K^{\wedge}_{2112}+K^{\wedge}_{1212})\\ G^{\wedge}_{1221}=-G^{\wedge}_{1212}=K^{\wedge}_{1212}+K^{\wedge}_{1211}(-K^{\wedge}_{2212}+K^{\wedge}_{1112})-\\-K^{\wedge2}_{1211}K^{\wedge}_{2112}-K^{\wedge}_{1212}K^{\wedge}_{1112}K^{\wedge}_{2212}+K^{\wedge2}_{1212}K^{\wedge}_{2112}\\ G^{\wedge}_{2212}=G^{\wedge}_{2221}=-K^{\wedge}_{2212}-K^{\wedge}_{1211}(K^{\wedge}_{1212}+K^{\wedge}_{2112})+\\+K^{\wedge}_{1112}(-K^{\wedge2}_{1211}+K^{\wedge}_{1112}K^{\wedge}_{2212}-K^{\wedge}_{2112}K^{\wedge}_{1212})\end{gathered} \tag{2.9}$$

Для получения $G^{\wedge I}_{ijpm}$ в (2.9) берутся элементы $K^{\wedge I}_{ijpm}$, а для $G^{\wedge\mathrm{III}}_{ijpm}$ — элементы $K^{\wedge\mathrm{III}}_{ijpm}$:

$$\begin{gathered}\Delta^{\mathrm{I}}(\varkappa,\omega,\gamma)=16[(\varkappa+1)\sin\gamma\pi]^{-4}\Delta_*(1,\omega,\gamma)\Delta_*(-1,\omega,\gamma)\times\\ \times\Delta_*(\varkappa,2\pi-\omega,\gamma)\Delta_*(-\varkappa,2\pi-\omega,\gamma)\\ \Delta^{\mathrm{III}}(\omega,\gamma)=\Delta^{\mathrm{I}}(1,\omega,\gamma),\quad \Delta_*(\varkappa,\omega,\gamma):=\varkappa\sin[(\gamma-1)\omega]+(\gamma-1)\sin\omega\end{gathered} \tag{2.10}$$

Поскольку $h_{jm}(\rho)\in \overset{\vee}{L}_{2,\alpha_0}$, то согласно [6], $\langle h_{jm}\rangle(\gamma)$ являются регулярными аналитическим функциям в полосе $\alpha_0+{}^1/_2<\mathrm{Re}\,\gamma<1$, в которой, кроме того, норма $\langle h_{jm}\rangle(\gamma)$ в L_2 на прямой $\mathrm{Re}\,\gamma=c$ выражается через норму $h_{jm}(\rho)$ в $L_{2,\,c-1/2}$. Тогда в этой полосе правая часть (2.8) есть мероморфная функция с полюсами конечной кратности в нулях (по γ) функций $\Delta_*(\pm1,\omega,\gamma)$, $\Delta_*(\pm\varkappa, 2\pi-\omega,\gamma)$ для $Q_{ip}{}^{\mathrm{I}}$ и функций $\Delta_*(\pm1,\omega,\gamma)$, $\Delta_*(\pm1, 2\pi-\omega,\gamma)$ для Q_{ip}^{III}. Нули этих функций изучались ранее [7—11]; в частности, нули функции $\Delta_*(1,\omega,\gamma)$ дают степени сингулярности напряжений в упругом клине с внутренним углом ω, нагруженном симметричными краевыми усилиями, а нули функции $\Delta_*(-1,\omega,\gamma)$ — антисимметричными. Нули функции $\Delta_*(-\varkappa,\omega,\gamma)$ дают степени сингулярности в клине с углом ω, нагруженном симметричными граничными перемещениями, а $\Delta_*(\varkappa,\omega,\gamma)$ — антисимметричными. В полосе $0<\mathrm{Re}\,\gamma<1$ эти нули являются действительными, простыми, и в данной полосе имеется не более чем по одному нулю каждой из этих функций в интервале $0<\omega<2\pi$, причем корень γ_1 функции $\Delta(\varkappa,\omega,\gamma)$ не меньше корня γ_2 функции $\Delta(-\varkappa,\omega,\gamma)$, $\varkappa\geqslant1$ и $\gamma_1(\varkappa,\omega)$, $\gamma_2(\varkappa,\omega)<{}^1/_2$.

Отсюда видно, что функция $\langle Q_{ip}\rangle(\gamma)$ есть регулярная аналитическая функция в полосе $\alpha_*+{}^1/_2<\mathrm{Re}\,\gamma<1$, где $\alpha_*=\max(0,\alpha_0)$ и следовательно, $Q_{ip}(\rho)\in \overset{\vee}{L}_{2,\alpha_*}$ [6], т. е., как и предполагалось, $Q_{ip}\in M_{1/2}$.

Теперь для нахождения решения (2.1) осталось подставить (2.8) в (2.5). Для получения асимптотики решения при $\rho\to0$ перенесем в γ-плоскости, как и в [2, 12], контур интегрирования (2.5) влево до прямой $\mathrm{Re}\,\gamma=\alpha_0+{}^1/_2$, беря вычеты в точках полюсов $\langle Q_{ip}\rangle(\gamma)$. Допустимость этой операции, как и вложение для остаточного члена

$$Q_{ip}{}^*(\rho):=\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\langle Q_{ip}\rangle(\gamma)\,\rho^{-\gamma}\,d\gamma\in L_{2,\alpha_0},\qquad {}^1/_2+\alpha_0<c<\min\nolimits_{1/2+\alpha_0<\mathrm{Re}\,\gamma_i}\mathrm{Re}\,\gamma_i$$

где γ_i — нули функций Δ^{I}, Δ^{III}, следует из вида функций $G_{ijpm}(\gamma)$, $\Delta(\gamma)$ и вложения $h_{im}\in \overset{\vee}{L}_{2,\alpha_0}$. Представляет интерес один частный случай, когда $h_{im}(\rho)\in \overset{\vee}{L}_{2,-1/2}$ и, кроме того, при малых ρ:

$$h_{im}(\rho)=h_{im}(0)+h_{im}{}^*(\rho),\quad h_{im}{}^*(\rho)\in M_{-1/2}(0,a_0):=\bigcup_{\alpha<-1/2}L_{2,\alpha}(0,a_0),\quad \forall a_0>0$$

В этом случае предыдущие рассуждения можно продолжить, перемещая контур интегрирования в (2.5) левее точки $\gamma=0$ и беря в ней вычет подынтегрального выражения.

Определяя вычеты явно и учитывая, что элементы $\overset{\vee}{G}_{ijpm}(\gamma)$ в точках γ_i нулей $\Delta(\gamma)$ линейно зависимы, будем иметь для решения $Q_i(s)$ в левой $Q_i^{\mathrm{I}-}(s)=Q_{i1}(|s-s^*|)$ и правой $Q_i^{\mathrm{I}+}(s)=Q_{i2}(|s-s^*|)$ окрестностях угловой точки s^* представления

$$Q_i^{\mathrm{I}\mp}(s)=\sum_{k=1}^{4}A_k{}^{\mathrm{I}}(\omega,\varkappa)\,d_{ki}^{\mathrm{I}\mp}(\omega,\varkappa)\,|s-s^*|^{-\gamma_k{}^{\mathrm{I}}}-$$

$$-\pi(\varkappa+1)[2\sin\omega(\sin\omega-\omega\cos\omega)]^{-1}B_4(\omega)\,d_{0j}^{\mathrm{I}\mp}(\omega,\varkappa)+O_i^{\mathrm{I}*\mp}(s)\quad(2.11)$$

$$Q_i{}^{\mathrm{I}*\mp}(s)\in M_{-1/2}(0,a_0),\quad \forall a_0>0$$

$$d_{0i}{}^{\mathrm{I}\mp}:=e_{ij}t_{jp}{}^{\mp}(\omega,0,\varkappa)n_p{}^{\mp},\ d_{1i}{}^{\mathrm{I}\mp}:=t_{ip}{}^{\mp}(\omega,\gamma_1{}^{\mathrm{I}}(\omega),\varkappa)n_p{}^{\mp}$$

$$d_{2i}{}^{\mathrm{I}\mp}:=e_{ij}t_{jp}{}^{\mp}(\omega,\gamma_2{}^{\mathrm{I}}(\omega),\varkappa)n_p{}^{\mp},\ d_{3i}{}^{\mathrm{I}\mp}:=q_{ip}{}^{\pm}(2\pi-\omega,\gamma_3{}^{\mathrm{I}}(\omega))n_p{}^{\mp}$$

$$d_{4i}{}^{\mathrm{I}\mp}:=\pm e_{ij}q_{jp}{}^{\pm}(2\pi-\omega,\gamma_4{}^{\mathrm{I}}(\omega))n_p{}^{\mp}$$

$$t_{ip}{}^{\mp}(\omega,\gamma,\varkappa):=\{\delta_{ij}\sin[(1-\gamma)(\omega-\pi)]\mp e_{ij}(\varkappa-1)(\varkappa+1)^{-1}\times$$

$$\times\cos[(1-\gamma)(\omega-\pi)]\}q_{jp}{}^{\mp}(\omega,\gamma)$$

$$q_{ip}{}^{\mp}(\omega,\gamma):=-\delta_{ip}\sin(\gamma\omega/2)\pm e_{ip}\cos(\gamma\omega/2)$$

где $\gamma_i{}^{\mathrm{I}}(\omega)$ $(i=1\div4)$ — максимальные при $\mathrm{Re}\,\gamma_i{}^{\mathrm{I}}<1$ корни соответственно уравнений

$$\Delta_*(1, \omega, \gamma_1^{\mathrm{I}})=0, \quad \Delta_*(-1, \omega, \gamma_2^{\mathrm{I}})/\gamma_2^{\mathrm{I}}=0$$
$$\Delta_*(\varkappa, 2\pi-\omega, \gamma_3^{\mathrm{I}})=0, \quad \Delta_*(-\varkappa, 2\pi-\omega, \gamma_4^{\mathrm{I}})=0 \tag{2.12}$$

Отсюда видно, что $\gamma_1^{\mathrm{I}}(\omega)<0$ при $\omega<\pi$; $\gamma_2^{\mathrm{I}}(\omega)<0$ при $\omega<\omega_0=\mathrm{tg}\,\omega_0\approx\approx 4{,}493$; $\gamma_3^{\mathrm{I}}(\omega)$, $\gamma_4^{\mathrm{I}}(\omega)<0$ при $\omega>\pi$. В этих интервалах угла ω для соответствующих γ_i^{I} сомножители $|s-s^*|^{-\gamma_i^{\mathrm{I}}}\in M_{-1/2}(0, a_0)$ и содержащие их слагаемые можно объединить с остаточным членом $Q_i^{*\pm}(s)$, т. е. опустить их в явной записи (2.11). Кроме того, при $0<\omega<2\pi$ параметры $\gamma_i<{}^1/_2$ $(i=1\div 4)$.

Коэффициенты интенсивности плотности $A_i^{\mathrm{I}}(\omega, \varkappa)$ являются аналитическими функциями ω, имеющими в интересующих нас интервалах $0\leqslant\leqslant\gamma_i(\omega)<1$ простые полюсы при $\gamma_i^{\mathrm{I}}(\omega)=0$ (для конечных значений $h_m(s^*)$), что для A_1^{I}, A_3^{I}, A_4^{I} происходит при $\omega=\pi$, а для A_2^{I} — при $\omega=\omega_0$. Выделяя эти особенности, коэффициенты можно представить в виде

$$\begin{gathered}
A_1^{\mathrm{I}}(\omega, \varkappa)=A_1^{\mathrm{I}0}(\omega, \varkappa)+(\varkappa+1)^2[2(3\varkappa-1)\sin\omega]^{-1}B_1(\omega)\\
A_2^{\mathrm{I}}(\omega, \varkappa)=A_2^{\mathrm{I}0}(\omega, \varkappa)-\pi(\varkappa+1)\{2(\sin\omega-\omega\cos\omega)\times\\
\times\sin[(1-\gamma_2(\omega))(\omega-\pi)]\}^{-1}B_4(\omega)\\
A_3^{\mathrm{I}}(\omega, \varkappa)=A_3^{\mathrm{I}0}(\omega, \varkappa)-(\varkappa-1)(2\sin\omega)^{-1}B_4(\omega)\\
A_4^{\mathrm{I}}(\omega, \varkappa)=A_4^{\mathrm{I}0}(\omega, \varkappa)-(\varkappa^2-1)[2(3\varkappa-1)\sin\omega]^{-1}B_1(\omega)
\end{gathered} \tag{2.13}$$

Функции $A_i^{\mathrm{I}0}(\omega, \varkappa)$ непрерывны по ω при $0\leqslant\gamma_i<{}^1/_2$, если при этом заданные граничные усилия $g_i(s)$, от которых они зависят, меняются непрерывно по ω почти во всех точках $s\in\partial D$:

$$\begin{gathered}
B_k(\omega):=[g_i^-(s^*)y_i^{(k)-}(\omega)+g_i^+(s^*)y^{(k)+}(\omega)]/2\\
y_i^{(1)\mp}(\omega):=-(\delta_{ij}\sin\omega\mp e_{ij}\cos\omega)n_j^{\mp}(\omega), \quad y_i^{(2)\mp}(\omega):=\pm y_i^{(1)\mp}(\omega)\\
y_i^{(3)\mp}(\omega):=\mp e_{ij}y_j^{(1)\mp}(\omega), \quad y_i^{(4)\mp}(\omega):=\pm y_i^{(3)\mp}(\omega)
\end{gathered} \tag{2.14}$$

Отметим, что так как $B_4(\omega;\, \sigma_{0ij}n_j^{\mp})=0$, $B_1(\pi;\, \sigma_{0ij}n_j^{\mp})=0$, то $B_4(\omega;\, h_i^{\mp})==B_4(\omega;\, g_i^{\mp})$, $B_1(\pi;\, h_i^{\mp})=B_1(\pi;\, g_i^{\mp})$, т. е. параметры $B_4(\omega)$ и $B_1(\pi)$ порождаются лишь несамосогласованными в угловой точке частями заданных граничных усилий (которые не могут быть вызваны никаким непрерывным полем напряжений), и, следователь, $B_4(\omega)$ и $B_1(\pi)$ не меняются при наложении самосогласованных усилий.

Выпишем еще асимптотику при критических значениях углов $\omega=\omega_0$, π, когда некоторые из коэффициентов в (2.11) становятся неограниченными.

При $\omega=\omega_0\approx 257{,}5°$, имеем $\gamma_2^{\mathrm{I}}(\omega_0)=0$; $\gamma_1^{\mathrm{I}}(\omega_0)>0$; $\gamma_3^{\mathrm{I}}(\omega_0)$, $\gamma_4^{\mathrm{I}}(\omega_0)<0$.

$$\begin{gathered}
Q_i^{\mathrm{I}\mp}(s)=A_i^{\mathrm{I}}(\omega_0, \varkappa)d_{1i}^{\mathrm{I}\mp}(\omega_0, \varkappa)|s-s^*|^{-\gamma_1^{\mathrm{I}}}+\pi(\varkappa+1)\times\\
\times(\omega_0\sin\omega_0)^{-2}B_4(\omega_0)\{-d_{0i}^{\mathrm{I}\mp}(\omega_0, \varkappa)\ln|s-s^*|\mp\\
\mp(\omega_0/2)e_{ij}d_{0j}^{\mathrm{I}\mp}(\omega_0, \varkappa)\mp(\omega_0-\pi)(\varkappa-1)[(\varkappa+1)\sin\omega_0]^{-1}q_{ip}^{\mp}(\omega_0, 0)n_p^{\mp}\}+\\
+A_2^{\mathrm{I}0}(\omega_0, \varkappa)d_{0j}^{\mathrm{I}\mp}(\omega_0, \varkappa)+Q_i^{\mathrm{I}*\mp}(s)
\end{gathered} \tag{2.15}$$

При $\omega=\pi$ имеем

$$\gamma_1(\pi)=\gamma_3(\pi)=\gamma_4(\pi)=0, \quad \gamma_2(\pi)<0$$

$$\begin{gathered}
Q_i^{\mathrm{I}\mp}(s)=(\varkappa^2-1)(4\pi\varkappa)^{-1}e_{ij}[g_j^-(s^*)-g_j^+(s^*)]\ln|s-s^*|\pm\\
\pm(\varkappa+1)^2(8\varkappa)^{-1}[g_i^-(s^*)-g_i^+(s^*)]+[(\varkappa-1)(\varkappa+1)^{-1}A_1^{\mathrm{I}0}(\varkappa, \pi)+\\
+A_4^{\mathrm{I}0}(\varkappa, \pi)]n_i-A_3^{\mathrm{I}0}(\pi, \varkappa)e_{ij}n_j+Q_i^{\mathrm{I}*\pm}(s)
\end{gathered} \tag{2.16}$$

Соотношения (2.15), (2.16), как и (2.11), получены из (2.8) — (2.10) путем вычисления вычетов $\langle Q_{ip}\rangle(\gamma)\rho^{-\gamma}$ по γ при соответствующих углах ω, но они могут быть получены и из (2.11) — (2.13) с помощью предельных переходов при $\gamma_i \to 0$ с учетом следующих из (2.12) соотношений

$$\left.\frac{d\gamma_2^{\mathrm{I}}}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}=\frac{2}{\omega_0},\quad \left.\frac{d\gamma_1^{\mathrm{I}}}{d\omega}\right|_{\omega=\pi}=\frac{2}{\pi}$$
$$\left.\frac{d\gamma_3^{\mathrm{I}}}{d\omega}\right|_{\omega=\pi}=-\frac{\varkappa+1}{\pi\varkappa},\quad \left.\frac{d\gamma_4^{\mathrm{I}}}{d\omega}\right|_{\omega=\pi}=-\frac{\varkappa-1}{\pi\varkappa},\quad \left.\frac{d^2\gamma_1}{d\omega^2}\right|_{\omega=\pi}=-\frac{8}{\pi^2} \tag{2.17}$$

Переходя к исследованию асимптотики решения ГИУ III, отметим, что она не может быть получена из (2.11)—(2.16) прямой подстановкой $\varkappa=1$, так как функция $\gamma_3^{\mathrm{I}}(\omega,\varkappa)$ не является непрерывной одновременно по обоим своим аргументам.

Делая в (2.6), (2.7), (2.10) подстановку $\varkappa=1$ и лишь после этого вычисляя вычеты $\langle Q_{ip}^{\mathrm{III}}\rangle(\gamma)\rho^{-\gamma}$, получим асимптотику

$$Q_i^{\mathrm{III}\mp}(s)=\sum_{k=1}^{4}A_k^{\mathrm{III}}(\omega)\,d_{ki}^{\mathrm{III}\mp}(\omega)\,|s-s^*|^{-\gamma_k^{\mathrm{III}}}\mp\pi(\sin\omega-\omega\cos\omega)^{-1}\times$$
$$\times B_4(\omega)n_i^{\mp}(\omega)+\pi[\sin\omega+(2\pi-\omega)\cos\omega]^{-1}A_0(\omega)n_i^{\mp}(\omega)+Q_i^{\mathrm{III}*\mp}(s) \tag{2.18}$$

$$d_{1i}^{\mathrm{III}\mp}:=q_{ip}^{\mp}(\omega,\gamma_1^{\mathrm{III}}(\omega))n_p^{\mp},\quad d_{2i}^{\mathrm{III}\mp}:=e_{ij}q_{jp}^{\mp}(\omega,\gamma_2^{\mathrm{III}}(\omega))n_p^{\mp}$$
$$d_{3i}^{\mathrm{III}\mp}:=\pm q_{ip}^{\pm}(2\pi-\omega,\gamma_3^{\mathrm{III}}(\omega))n_p^{\mp},\quad d_{4i}^{\mathrm{III}\mp}:=\pm e_{ij}q_{jp}^{\pm}(2\pi-\omega,\gamma_4^{\mathrm{III}}(\omega))n_p^{\mp}$$

Здесь $Q_i^{\mathrm{III}*\mp}(s)\in M_{-1/2}(0,a_0)$, $\forall a_0>0$; $\gamma_i^{\mathrm{III}}(\omega)$ $(i=1\div4)$ — максимальные при $\mathrm{Re}\,\gamma_i^{\mathrm{III}}<1$ корни соответственно уравнений

$$\Delta_*(1,\omega,\gamma_1^{\mathrm{III}})=0,\quad \Delta_*(-1,\omega,\gamma_2^{\mathrm{III}})/\gamma_2^{\mathrm{III}}=0$$
$$\Delta_*(1,2\pi-\omega,\gamma_3^{\mathrm{III}})=0,\quad \Delta_*(-1,2\pi-\omega,\gamma_4^{\mathrm{III}})/\gamma_4^{\mathrm{III}}=0 \tag{2.19}$$

Отсюда имеем, что $\gamma_1^{\mathrm{III}}(\omega)<0$ при $\omega<\pi$; $\gamma_2^{\mathrm{III}}(\omega)<0$ при $\omega<\omega_0=\mathrm{tg}\,\omega\approx4{,}493$; $\gamma_3^{\mathrm{III}}(\omega)<0$ при $\omega>\pi$; $\gamma_4^{\mathrm{III}}(\omega)<0$ при $\omega>\omega_{00}=2\pi+\mathrm{tg}\,\omega_{00}\approx1{,}790$. В этих интервалах угла ω для соответствующих γ_i^{III} сомножители $|s-s^*|^{-\gamma_i^{\mathrm{III}}}\in M_{-1/2}(0,a_0)$ и содержащие их слагаемые можно объединить с остаточным членом $Q_i^{\mathrm{III}*\pm}(s)$, т. е. опустить их в явной записи (2.18). Кроме того, при $0<\omega<2\pi$ параметры $\gamma_i^{\mathrm{III}}<{}^1/_2$ $(i=1\div4)$.

Как и для Q_i^{I}, коэффициенты интенсивности плотности $A_i^{\mathrm{III}}(\omega)$ являются аналитическими функциями ω. В интервале $0\leqslant\gamma_i(\omega)<1$ соответствующие коэффициенты $A_1^{\mathrm{III}}(\omega)$ и $A_3^{\mathrm{III}}(\omega)$ непрерывны, а коэффициенты $A_2^{\mathrm{III}}(\omega)$ и $A_4^{\mathrm{III}}(\omega)$ имеют простые полюсы при $\omega=\omega_0(\gamma_2^{\mathrm{III}}(\omega)=0)$ и $\omega=\omega_{00}(\gamma_4^{\mathrm{III}}(\omega)=0)$ соответственно. Выделяя эти особенности, коэффициенты $A_2^{\mathrm{III}}, A_4^{\mathrm{III}}$ можно представить в виде

$$A_2^{\mathrm{III}}(\omega)=A_2^{\mathrm{III}\,0}(\omega)-\pi(\sin\omega-\omega\cos\omega)^{-1}B_4(\omega)$$
$$A_4^{\mathrm{III}}(\omega)=A_4^{\mathrm{III}\,0}(\omega)-\pi[\sin\omega+(2\pi-\omega)\cos\omega]^{-1}A_0(\omega) \tag{2.20}$$

Функции $A_2^{\mathrm{III}\,0}(\omega)$, $A_4^{\mathrm{III}\,0}(\omega)$ уже непрерывны для $0\leqslant\gamma_i^{\mathrm{III}}<{}^1/_2$. Отметим еще, что $\gamma_1^{\mathrm{III}}(\pi)=0$ и $A_1^{\mathrm{III}}(\pi)=-B_1(\pi)={}^1/_2(g_i^{-}-g_i^{+})e_{ip}n_p$. Кроме того, несмотря на сделанные выше оговорки, прослеживается аналогия между членами асимптотики Q^{I} и Q^{III}, если положить $A_i^{\mathrm{III}}(\omega)=$

$=A_i^{\mathrm{I}}(1,\omega)\sin[(1-\gamma_i^{\mathrm{III}})(\omega-\pi)]\quad (i=1,2);\quad A_i^{\mathrm{III}}(\omega)=A_i^{\mathrm{I}}(1,\omega)\quad (i=3,4)$. Однако при этом параметр $A_3^{\mathrm{I}}(1,\omega)=A_3^{\mathrm{I0}}(1,\omega)$ уже не будет непрерывным в точке $\omega=\omega_{00}$.

Как и выше для Q_i^{I}, выпишем еще асимптотику для Q_i^{III} при критических значениях углов. При $\omega=\omega_0\approx 257{,}5°$ будет

$$\gamma_2^{\mathrm{III}}(\omega_0)=0;\quad \gamma_1^{\mathrm{III}}(\omega_0)>0;\quad \gamma_3^{\mathrm{III}}(\omega_0)\quad \gamma_4^{\mathrm{III}}(\omega_0)<0$$

$$Q_i^{\mathrm{III}\mp}(s)=A_1^{\mathrm{III}}(\omega_0)\,d_{1i}^{\mathrm{III}\mp}(\omega_0)\,|s-s^*|^{-\gamma_1^{\mathrm{III}}}\mp$$
$$\mp[2\pi(\omega_0^2\sin\omega_0)^{-1}B_4(\omega_0)\ln|s-s^*|+A_2^{\mathrm{III0}}(\omega_0)]\,n_i{}^{\mp}+$$
$$+\pi(\omega_0\sin\omega_0)^{-1}B_4(\omega_0)\,e_{ij}n_j{}^{\mp}+(2\cos\omega_0)^{-1}A_0(\omega_0)\,n_i{}^{\mp}+Q_i^{\mathrm{III}*\mp}(s)\quad (2.21)$$

При $\omega=\pi$ будем иметь

$$\gamma_1^{\mathrm{III}}(\pi)=\gamma_3^{\mathrm{III}}(\pi)=0,\qquad \gamma_2^{\mathrm{III}}(\pi),\qquad \gamma_4^{\mathrm{III}}(\pi)<0$$

$$Q_i^{\mathrm{III}\mp}(s)=\pm(g_i{}^{-}-g_i{}^{+})/2-A_0(\pi)\,n_i-A_3(\pi)\,e_{ip}n_p+Q_i^{\mathrm{III}*\mp}(s)$$

При $\omega=\omega_{00}\approx 102{,}5°$ будем иметь $\gamma_4^{\mathrm{III}}(\omega_{00})=0$;

$$\gamma_3^{\mathrm{III}}(\omega_{00})>0;\qquad \gamma_1^{\mathrm{III}}(\omega_{00})\qquad \gamma_2^{\mathrm{III}}(\omega_{00})<0 \qquad (2.22)$$

$$Q_i^{\mathrm{III}}(s)=A_3^{\mathrm{III}}(\omega_{00})\,d_{3i}^{\mathrm{III}\mp}(\omega_{00})\,|s-s^*|^{-\gamma_3^{\mathrm{III}}}+$$
$$+[2\pi(2\pi-\omega_{00})^{-2}(\sin\omega_{00})^{-1}A_0(\omega_{00})\ln|s-s^*|+$$
$$+A_4^{\mathrm{III0}}(\omega_{00})]\,n_i{}^{\mp}\pm(2\cos\omega_{00})^{-1}B_4(\omega_{00})\,n_i{}^{\mp}\pm\pi[(2\pi-$$
$$-\omega_{00})\sin\omega_{00}]^{-1}A_0(\omega_{00})\,e_{ij}n_j{}^{\mp}+Q_i^{\mathrm{III}*\mp}(s)$$

Соотношения (2.21)–(2.22), как и соответствующие соотношения для Q^{I}, могут быть получены как с помощью прямого вычисления вычетов $\langle Q_{ip}^{\mathrm{III}}\rangle(\gamma)\rho^{-\gamma}$ для критических углов ω, так и путем предельного перехода в (2.18) с учетом следующих из (2.19) соотношений

$$\left.\frac{d\gamma_2^{\mathrm{III}}}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}=\frac{2}{\omega_0},\qquad \left.\frac{d\gamma_1^{\mathrm{III}}}{d\omega}\right|_{\omega=\pi}=-\left.\frac{d\gamma_3^{\mathrm{III}}}{d\omega}\right|_{\omega=\pi}=\frac{2}{\pi}$$
$$\left.\frac{d\gamma_4^{\mathrm{III}}}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_{00}}=-\frac{2}{2\pi-\omega_{00}} \qquad (2.23)$$

В представлениях (2.11)–(2.22) коэффициенты A_i, B_k являются функционалами от заданных правых частей h_{ip} на сторонах клина.

При анализе асимптотики решения ГИУ, на произвольном контуре ∂D, составленном из отрезков кривых Ляпунова, можно записать уравнение в окрестности рассматриваемой угловой точки s^* в виде (2.1) с некоторым конечным верхним пределом a_0, где ядро K_{ijpm} формируется по касательным к ∂D в угловой точке. Далее получившееся ГИУ на отрезке $[0, a_0]$ необходимо продолжить с помощью тех же формул для ядра на полуось $[0,\infty)$, положив $Q_{jm}(\rho)=0$, $\rho>a_0$. Образовавшиеся при этом добавочно интегральные члены необходимо перенести в правую часть. Эта правая часть $h_{im}{}^0(\rho)$ тогда станет уже условно заданной, но по-прежнему будет принадлежать $L^2{}^{\vee}_{,-1/2}(0,\infty)$, а при малых ρ $h_{im}{}^0(\rho)=h_{im}{}^0(0)+h_{im}{}^{0*}(\rho)$, $h_{im}{}^{0*}\in M_{-1/2}(0,a_0)$, если этим классам на отрезке $[0,a_0]$ принадлежала исходная правая часть h_{im}.

Таким образом удается прийти к уже исследованной системе (2.1) на полуоси с условно заданной правой частью $h_{im}{}^0$. Кроме того, так как около угловой точки s^* исходные g_i и условно заданные правые части различаются лишь на самосогласованные усилия, параметры $B_4(\omega)$ и $B_1(\omega)$ могут определяться по тем же формулам (2.14) через исходные усилия g_i. Этого нельзя сказать о коэффициентах A_i, которые для тела с произвольной границей через правые части априори (без полного решения уравнения на этой границе) не выражаются.

Далее, если в окрестности угловой точки s^* правая часть $g_i{}^{\mp}(s)$ – гельдерова функция, то можно показать, что остаточный член $Q_i{}^{*\mp}(s)$ в асимптотиках (2.11)–(2.22) – тоже принадлежит пространству Гельдера и $Q_i{}^{*\mp}(s^*)=0$.

Отметим, что представления асимптотик (2.11)–(2.22) инвариантны относительно положения декартовой системы координат.

В [13] представлена асимптотика плотности $Q_i^{\mathrm{I}}(s)$ ГИУ I, содержащая лишь старшие члены, которые соответствуют слагаемым с коэффициентами A_1^{I} и A_3^{I} в (2.11). Эта асимптотика была получена путем сведения интегральных уравнений к вспомогательным краевым задачам и использования асимптотик для решений последних, которые были известны ранее. Степени сингулярности, данные в [13], совпадают с γ_1^{I} и γ_3^{I}, тогда как представленный там вид собственных векторов — иной.

В [14] методика, близкая к применяемой в данной работе, была использована для анализа асимптотики плотности прямых граничных интегральных уравнений плоских задач для уравнения Лапласа.

3. Асимптотика напряжений. Из представлений (1.2), (1.3) можно получить представления для трансформант напряжений $\langle\sigma_{ij}\rangle(\gamma,\theta)$ в клиновидной области через трансформанты плотностей $\langle Q_{ip}\rangle(\gamma)$. Отсюда с использованием (2.8) и прямого вычисления вычетов при передвижении, как и выше, контура интегрирования в γ-плоскости в обратном преобразовании Меллина, получим асимптотику напряжений около угловой точки s^*. В местной полярной системе координат (ρ,θ) с началом в угловой точке s^* и углом θ, отсчитываемым против часовой стрелки от биссектрисы угла ω, при $\pi<\omega<2\pi$, $\omega\neq\omega_0$ напряжения имеют вид

$$\sigma_{ij}(\rho,\theta)=\sum_{m=1}^{2}K_m\sigma_{ij}^{(m)}(\theta)\rho^{-\gamma_m}+\sigma_{ij}^{0}(\theta)+\sigma_{ij}^{*}(\rho,\theta) \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{\rho\rho}^{(1)}:=(2-\gamma_1)\cos(\gamma_1\omega/2)\{\cos[(2-\gamma_1)\omega/2]\}^{-1}\cos[(2-\gamma_1)\theta]+\\+(\gamma_1+2)\cos(\gamma_1\theta)\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{\theta\theta}^{(1)}:=-(2-\gamma_1)\cos(\gamma_1\omega/2)\{\cos[(2-\gamma_1)\omega/2]\}^{-1}\cos[(2-\gamma_1)\theta]+\\+(2-\gamma_1)\cos(\gamma_1\theta)\end{gathered}$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{(1)}:=-(2-\gamma_1)\cos(\gamma_1\omega/2)\{\cos[(2-\gamma_1)\omega/2]\}^{-1}\sin[(2-\gamma_1)\theta]+\gamma_1\sin(\gamma_1\theta)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2)}:=-\gamma_2\cos(\gamma_2\omega/2)\{\cos[(2-\gamma_2)\omega/2]\}^{-1}\sin[(2-\gamma_2)\theta]-(\gamma_2+2)\sin(\gamma_2\theta)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(2)}:=-\gamma_2\cos(\gamma_2\omega/2)\{\cos[(2-\gamma_2)\omega/2]\}^{-1}\sin[(2-\gamma_2)\theta]-(2-\gamma_2)\sin(\gamma_2\theta)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{(2)}:=-\gamma_2\cos(\gamma_2\omega/2)\{\cos[(2-\gamma_2)\omega/2]\}^{-1}\cos[(2-\gamma_2)\theta]+\gamma_2\cos(\gamma_2\theta)$$

$$\begin{gathered}\sigma_{\rho\rho}^{0}(\theta)=-B_1(\cos\omega\cos2\theta+1)/\sin\omega+B_2\sin2\theta-B_3\cos2\theta-\\-B_4[2\theta+(\cos\omega+\omega\sin\omega)\sin2\theta]/(\sin\omega-\omega\cos\omega)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{\theta\theta}^{0}(\theta):=B_1(\cos\omega\cos2\theta-1)/\sin\omega-B_2\sin2\theta+B_3\cos2\theta-\\-B_4[2\theta-(\cos\omega+\omega\sin\omega)\sin2\theta]/(\sin\omega-\omega\cos\omega)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{\rho\theta}^{0}(\theta):=[B_1\operatorname{ctg}\omega+B_3]\sin(2\theta)+B_2\cos2\theta+B_4[1-(\cos\omega+\omega\sin\omega)\cos2\theta]/\\/(\sin\omega-\omega\cos\omega)\qquad(\gamma_k=\gamma_k^{\mathrm{I}}(\omega)=\gamma_k^{\mathrm{III}}(\omega),\ k=1,2)\end{gathered}$$

Коэффициенты интенсивности напряжений K_i выражаются через коэффициенты интенсивности A_i^{I} или A_i^{III} плотности ГИУ I или III соответственно

$$\begin{gathered}K_i=A_i^{\mathrm{I}}2(\varkappa+1)^{-1}\{\operatorname{ctg}(\gamma_1\pi)\sin[(1-\gamma_i)(\omega-\pi)]+\\+(\varkappa-1)(\varkappa+1)^{-1}\cos[(1-\gamma_i)(\omega-\pi)]\}\end{gathered} \tag{3.3}$$

$$K_i=A_i^{\mathrm{III}}\operatorname{ctg}(\gamma_i\pi) \tag{3.4}$$

Коэффициенты $B_k(\omega)$ в не зависящих от радиуса членах $\sigma_{ij}^{0}(\theta)$ даются соотношениями (2.14), т. е. явно выражаются через предельные значения приложенных усилий $g_i^{\mp}(s^*)$. При получении этих выражений для σ_{ij}^0 кроме прямого и обратного преобразования Меллина использовалась также подстановка (3.1) в граничные условия $\sigma_{ij}n_j|_{\partial D}=g_i$.

Возвращаясь к краевым задачам в областях с произвольной границей, составленной из отрезков кривых Ляпунова, несложно заметить, что рассуждения, аналогичные тем, что даны в конце п. 2, приведут к представлению напряжений в виде $\sigma_{il}=\sigma_{il}^{(a)}+\sigma_{il}^{(b)}$ Здесь член $\sigma_{il}^{(a)}$ дается формулами (1.2)–(1.3), в которых ∂D заменена на границу клина, образованную касательными к исходной границе в угловой точке s^*, а плотность Q_i совпадает с исходной в некоторой зоне около точки s^* и равна нулю вне этой зоны. Асимптотика этого члена дается формулами (3.1), (3.2), в которых постоянные B_i ($i=1$, 2, 3) в σ_{ij}^0 заменяются на неопределенные постоянные. Остаточный член $\sigma_{ij}^{(b)}$, порожденный значениями Q_i на отдаленной от s^* части исходной границы ∂D, а также кривизной ∂D вблизи s^*, является непрерывной функцией вплоть до s^* и, таким образом, скажется только на неопределенности постоянных B_i ($i=1$, 2, 3). Подставляя σ_{il} в исходные граничные условия $\sigma_{ij}n_j|_{\partial D}=g_i$, получаем для B_i их прежние значения, даваемые (2.14).

Остаточный член $\sigma_{il}^*(\rho,\theta)\to 0$ при $\rho\to 0$, если $g_i^{\mp}(s)$ – функции Гельдера в окрестности точки s^*. Для $\pi<\omega<\omega_0$ $\rho^{-\gamma_2}\to 0$ при $\rho\to 0$ и члены для $m=2$ можно присоединить к σ_{ij}^*, т. е. опустить в явной записи (3.1).

Учитывая (2.13), (2.20), из (3.3), (3.4) получаем, что при $\omega=\pi$, ω_0 коэффициенты $K_1(\omega)$, $K_2(\omega)$ становятся неограниченными и их можно представить в виде

$$K_1(\omega)=K_1^0(\omega)+B_1(\omega)/(2\sin\omega)$$

$$K_2(\omega)=[K_2^0(\omega)-\pi B_4(\omega)/(\sin\omega-\omega\cos\omega)]\operatorname{ctg}(\gamma_2\pi)$$

При этом функции $K_1^0(\omega)$, $K_2^0(\omega)$ будут уже непрерывными при критических углах $\omega=\pi$, $\omega=\omega_0$ соответственно, если с изменением ω непрерывно меняется граница ∂D и заданные на ней функции g_i. Их значения при этих углах можно выразить через члены асимптотик плотностей ГИУ I или ГИУ III:

$$K_1^0(\pi)=(3\varkappa-1)(\varkappa+1)^{-2}A_1^{\mathrm{I}0}(\pi,\varkappa)$$

$$K_2^0(\omega_0)=-2(\varkappa+1)^{-1}\sin\omega_0 A_2^0(\omega_0,\varkappa)-2\pi^2(\varkappa-1)[(\varkappa+1)\omega_0^3\sin\omega_0]^{-1}B_4(\omega_0)$$

$$K_1^0(\pi)=-\lim_{\omega\to\pi}\frac{A_1^{\mathrm{III}}(\omega)+B_1(\omega)}{2\sin\omega}-B_1(\pi),\qquad K_2^0(\omega_0)=A_2^{\mathrm{III}\,0}(\omega_0)$$

Выпишем асимптотику напряжения при критических углах. При $\omega=\omega_0\approx 257{,}5^\circ$:

$$\begin{gathered}\sigma_{\rho\rho}=K_1\sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\theta)\rho^{-\gamma_1}+[-2(\omega^2\sin\omega)^{-1}B_4(\omega)\ln\rho-\\ -K_2^0(\omega)/\pi][2\theta+\sin(2\theta)/\cos\omega]-B_1(\omega)[\cos\omega\cos(2\theta)+\\ +1]/\sin\omega+B_2(\omega)\sin(2\theta)-B_3(\omega)\cos(2\theta)+2(\omega^2\sin\omega)^{-1}\times\\ \times B_4(\omega)[\theta(1-\cos(2\theta)/\cos\omega)-(\omega/2)\sin\omega\sin(2\theta)]+\sigma_{\rho\rho}^*(\rho,\theta)\\[2ex] \sigma_{\theta\theta}=K_1\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\theta)\rho^{-\gamma_1}+[-2(\omega^2\sin\omega)^{-1}B_4(\omega)\ln\rho-\\ -K_2^0(\omega)/\pi][2\theta-\sin(2\theta)/\cos\omega]+B_1(\omega)(\cos\omega\cos\theta-1)/\sin\omega-\\ -B_2(\omega)\sin(2\theta)+B_3(\omega)\cos(2\theta)-2(\omega^2\sin\omega)^{-1}B_4(\omega)[\theta(1-\\ -\cos(2\theta)/\cos\omega)-(\omega/2)\sin\omega\sin 2\theta]+\sigma_{\theta\theta}^*(\rho,\theta)\\[2ex] \sigma_{\rho\theta}=K_1\sigma_{\rho\theta}^{(1)}(\theta)\rho^{-\gamma_1}+[-2(\omega^2\sin\omega)^{-1}B_4(\omega)\ln\rho-\\ -K_2^0(\omega)/\pi][\cos(2\theta)/\cos\omega-1]+[B_1(\omega)\operatorname{ctg}\omega+\\ +B_3(\omega)]\sin 2\theta+B_2(\omega)\cos 2\theta+2(\omega^2\sin\omega)^{-1}B_4(\omega)[\theta\sin(2\theta)/\cos\omega-\\ -(\omega/2)\sin\omega\cos 2\theta]+\sigma_{\rho\theta}^*(\rho,\theta)\end{gathered}\tag{3.5}$$

При $\omega=\pi$:

$$\sigma_{\rho\rho}=[(2/\pi)B_1(\pi)\ln\rho+2K_1^0(\pi)][1-\cos(2\theta)]+$$
$$+\pi^{-1}B_1(\pi)[2\theta\sin(2\theta)-1-\cos 2\theta)+B_2(\pi)\sin 2\theta-$$

$$-B_3(\pi)\cos 2\theta-\pi^{-1}B_4(\pi)[2\theta-\sin(2\theta)]+\sigma_{\rho\rho}^*(\rho,\theta)$$

$$\sigma_{\theta\theta}=[(2/\pi)B_1(\pi)\ln\rho+2K_1^0(\pi)][1+\cos(2\theta)]-$$
$$-\pi^{-1}B_1(\pi)[2\theta\sin(2\theta)-1-\cos(2\theta)]-B_2(\pi)\sin 2\theta+$$
$$+B_3(\pi)\cos 2\theta-\pi^{-1}B_4(\pi)[2\theta+\sin(2\theta)]+\sigma_{\theta\theta}^*(\rho,\theta) \quad (3.6)$$

$$\sigma_{\rho\theta}=[(2/\pi)B_1(\pi)\ln\rho+2K_1^0(\pi)]\sin(2\theta)+$$
$$+\pi^{-1}B_1(\pi)[2\theta\cos(2\theta)+\sin(2\theta)]+B_2(\pi)\cos(2\theta)+$$
$$+B_3(\pi)\sin(2\theta)+\pi^{-1}B_4(\pi)[1+\cos(2\theta)]+\sigma_{\rho\theta}^*(\rho,\theta)$$

Асимптотика напряжений (3.5), (3.6) при особых углах $\omega=\omega_0$, π может быть получена как непосредственно по описанной выше методике для остальных углов, так и путем предельного перехода из (3.1), (3.2) при $\omega\to\omega_0$, π с учетом (2.17), (2.22).

Из (3.5), (3.6) видно, что при $\omega=\omega_0$, π появляется логарифмическая особенность в представлении для напряжений, которая при $\omega=\pi$, т. е. в точке гладкости контура ∂D, является главной. Коэффициент при логарифме явно выражается через правые части граничных условий: для $\omega=\omega_0$ – через несамосогласованную часть заданных усилий (т. е. непредставимую вследствие условий парности напряжений через непрерывное вплоть до s^* поле напряжений, а для $\omega=\pi$ (точка гладкости границы) – через скачок касательных усилий. Отметим, что все коэффициенты в ограниченных слагаемых напряжений также явно выражаются через предельные значения заданных усилий $g_i^{\mathrm{I}}(s^*)$ за исключением $K_1^0(\pi)$, $K_2^0(\omega_0)$, выражаемых через коэффициенты асимптотики плотности ГИУ. Полученные в [9] с помощью модификации методики [7] представления для напряжений около входящих углов совпадают с соответствующими членами (3.2), (3.5), (3.6) после некоторых преобразований.

Для выходящих углов ($0<\omega<\pi$) напряжения конечны и имеют вид $\sigma_{ij}(\rho,\theta)=$ $=\sigma_{ij}^0(\theta)+\sigma_{ij}^*(\rho,\theta)$, где σ_{ij}^0 даются выражениями (3.2), а $\sigma_{ij}^*(\rho,\theta)\to 0$, $\rho\to 0$, если $g_i^{\mp}(s)$ – гельдеровы функции в левой и правой окрестностях точки s^*.

Отметим еще, что при численном решении коэффициенты асимптотик (2.15), (2.16), (2.21), (2.22), (3.5), (3.6) для критических углов ω_0, π, ω_{00} могут быть получены не только путем прямой аппроксимации плотностей или напряжений около углов, содержащей логарифмические члены, но и (с учетом связи между коэффициентами критических и докритических асимптотик) по значениям коэффициентов при достаточно близких докритических углах ω.

Итак, нами получены асимптотики плотностей ГИУ и полей напряжений в окрестности углов в сжимаемой и несжимаемой упругой среде, а также в задаче Стокса для несжимаемой вязкой жидкости. Эта информация может быть далее использована, во-первых, для прояснения поведения решения около углов. В частности, из приведенных результатов видно, что при углах $\omega\leqslant\pi$ главные члены асимптотики напряжений полностью определяются поведением заданных усилий около углов и могут быть вычислены без полного решения краевой задачи. Во-вторых, эта информация необходима для уточнения численных методов решения задач с угловыми точками за счет более точной аппроксимации решения около углов, основанной на полученных в работе асимптотиках, а также для прямого вычисления коэффициентов интенсивности напряжений по коэффициентам интенсивности плотности интегрального уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Михайлов С. Е., Котов Ю. И.* Интегральные уравнения плоских задач теории упругости для областей с отверстиями и углами. ЦНИИПСК. М., 1986, 73 с.– Деп. в ВИНИТИ 17.09.86, № 6695–В86.
2. *Эскин Г. М.* Задача сопряжения для уравнений главного типа с двумя независимыми переменными // Тр. Моск. мат. о-ва. 1970. Т. 21. С. 245–292.
3. *Михайлов С. Е.* Решение задач об антиплоской деформации упругих тел с угловыми точками методом интегральных уравнений // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 6. С. 981–987.
4. *Мазья В. Г.* К теории потенциала для системы Ламе в области с кусочно-гладкой границей // Дифференц. уравнения в частных производных и их приложения: Труды Всесоюз. симпоз. в Тбилиси. 1982 г. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1986. С. 123–129.
5. *Михайлов С. Е.* Сингулярность напряжений в плоском наследственно упругом стареющем теле с угловыми точками // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 2. С. 125–138.
6. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 479 с.
7. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. Appl. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 526–528.
8. *Moffatt H. K., Duffy B. R.* Local similarity solutions and their limitations // J. Fluid Mech. 1980. V. 96. Pt 2. P. 299–313.
9. *Ting T. C. T.* The wedge subjected to tractions: a paradox re-examined // J. Elast. 1984. V. 14. № 3. P. 235–247.

10. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР. 1963. 367 с.
11. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
12. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
13. *Заргарян С. С.* Об особенностях решений системы сингулярных интегральных уравнений плоской теории упругости при заданных на границе напряжениях // Докл. АН АрмССР. 1983. Т. 77. № 4. С. 167–172.
14. *Costabel M., Stephan E.* Curvature terms in the asymptotic expansions for solutions of boundary integral equations on curved polygons // J. Integr. Equat. 1983. V. 5. № 4. P. 353–371.

Москва

Поступила в редакцию
5.I.1988