

УДК 539.3:534.1

В. И. ГУЛЯЕВ, А. Л. ЗУБРИЦКАЯ, В. Л. КОШКИН

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ  
БИФУРКАЦИЙ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЙ  
СПУТНИКА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

Предложена методика и проведено исследование эволюции периодических движений спутника относительно центра масс, движущегося в центральном силовом поле, в зависимости от эксцентриситета эллиптической орбиты. В рассмотренной задаче обнаружена последовательность бифуркаций удвоения периода колебаний спутника. Показано, что эта последовательность обладает свойством универсальности Фейгенбаума с точностью, возрастающей с увеличением количества бифуркаций.

**1. Введение.** Одним из возможных механизмов перехода нелинейной консервативной динамической системы от периодического движения к хаотическому является возникающая при изменении характерного параметра  $\lambda$  бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода. Этот факт был обнаружен при численном исследовании простейших гамильтоновых отображений [1–3]. Было установлено, что такие последовательности обладают свойством универсальности [2, 4] в том смысле, что геометрически сходятся к некоторой точке накопления  $\lambda_{(\infty)}$  с показателем геометрической прогрессии  $\delta$ , не зависящим от конкретного вида отображения. Показатель  $\delta$  для консервативных систем (универсальная консервативная постоянная Фейгенбаума [2, 3]), связывая три соседних бифуркационных значения параметра  $\delta_{i \rightarrow \infty} = (\lambda_{(i+1)} - \lambda_{(i)}) / (\lambda_{(i+2)} - \lambda_{(i+1)}) = 8,72109720 \dots$ , позволяет по нескольким первым членам последовательности предсказать предельное значение  $\lambda_{(\infty)}$ , при котором колебания системы становятся хаотическими.

Методика настоящего исследования основана на совместном применении методов продолжения решения по параметру [5], теории Флоке [6, 7], теории ветвления [7, 8] и высокоточного численного интегрирования [9].

**2. Методика исследования.** Пусть движение нелинейной консервативной механической системы описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}^* = f(x, \lambda, t) \quad (2.1)$$

где  $f$  —  $T$ -периодическая по  $t$  вектор-функция, дифференцируемая необходимое число раз по  $x$  и  $\lambda$ ,  $\lambda$  — скалярный параметр.

В предположении непрерывной зависимости решения  $x(t)$  системы (2.1) от начальных условий  $x(0)$  и параметра  $\lambda$  представим его в виде  $x(t) = x(x(0), \lambda, t)$ . Условия  $T$ -периодичности траектории движения системы примем в форме

$$x(0) = x(x(0), \lambda, T) \quad (2.2)$$

Пусть при некотором значении параметра  $\lambda = \lambda_0$  система (2.1) имеет  $T$ -периодическое решение  $x_0(t)$ , удовлетворяющее условиям (2.2). Про-варьируем обе части (2.2) в окрестности состояния  $\lambda = \lambda_0$ ,  $x(t) = x_0(t)$ :

$$\delta x_0(0) = Y(T) \delta x_0(0) + y_\lambda(T) \delta \lambda_0 \quad (2.3)$$

Здесь  $Y(T) = \partial x(T) / \partial x(0)$  — матрица монодромии, определяемая из решения однородного матричного уравнения

$$Y^* = f_x Y \quad (Y(0) = E) \quad (2.4)$$

$E$  — единичная матрица,  $y_\lambda(T) = \partial x(T) / \partial \lambda$  — вектор, определяемый как частное решение неоднородной линеаризованной системы уравнений в вариациях

$$y_\lambda \dot{=} f_x y_\lambda + f_\lambda \quad (y_\lambda(0) = 0) \quad (2.5)$$

При заданном в (2.3)  $\delta \lambda_0$  неизвестные вариации начальных условий  $\delta x_0(0)$  могут быть определены из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$[Y(T) - E] \delta x_0(0) = -y_\lambda(T) \delta \lambda_0$$

Решение задачи Коши для системы (2.1) с начальными условиями  $x_1(0) = x_0(0) + \delta x_0(0)$  при  $\lambda_1 = \lambda_0 + \delta \lambda_0$  будет удовлетворять условиям периодичности (2.2) с некоторой невязкой  $r_{(1)}$ , имеющей порядок отброшенных в (2.3) членов разложения в ряд Тейлора. Уточнение начальных условий может быть произведено методом Ньютона — Канторовича, тогда ( $k$  — число итераций):

$$x_1(0) = x_0(0) + \delta x_0(0) + \sum_{j=1}^k \delta x_{r(j)}(0) \quad (2.6)$$

$$\delta x_{r(j)}(0) = -[Y(T) - E]^{-1} r_{(j)} \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

Продолжая далее варьирование параметра  $\lambda$ , найдем соответствующие его значениям  $\lambda_m$  приближенные  $T$ -периодические решения  $x_m(t)$  системы (2.1).

Вычисляемая на каждом шаге продолжения матрица монодромии  $Y(T)$  определяет условия существования и единственности периодического решения линеаризованной системы в рассматриваемой окрестности и позволяет анализировать его устойчивость [6]. Состояние, в котором хотя бы для одного из мультипликаторов  $\rho_i$  матрицы  $Y(T)$  выполняются условия  $|\rho_i| = 1$ ,  $\arg \rho_i = 2\pi/n$ , является бифуркационным, а соответствующая ему в пространстве состояний точка — точкой ветвления. В частности, при  $\rho_i = -1$  имеет место бифуркация удвоения периода. Ответвляющееся бифуркационное  $2T$ -периодическое решение уравнения (2.1) может быть построено лишь с привлечением уравнений ветвления, так как в рассматриваемой точке ветвления  $\det |Y(2T) - E| = 0$

Для построения приближенных уравнений ветвления учтем в (2.3) члены высших порядков малости. При этом отметим, что вторые производные от решения нелинейной системы (2.1)  $x(t)$  по начальным условиям  $x(0)$  и параметру  $\lambda$  в окрестности некоторого состояния  $x_m(t)$ ,  $\lambda_m$  могут быть представлены как первые производные по  $x(0)$  и  $\lambda$  от матрицы фундаментальных решений  $Y(t)$  линеаризованной однородной системы и частного решения  $y_\lambda(t)$  неоднородной линеаризованной системы в той же окрестности. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x(0)} \frac{\partial x(t)}{\partial x(0)} &= \frac{\partial Y(t)}{\partial x(0)} = Z(t) \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial x(t)}{\partial x(0)} &= \frac{\partial Y(t)}{\partial \lambda} = Z_\lambda(t) \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial x(t)}{\partial \lambda} &= \frac{\partial y_\lambda(t)}{\partial \lambda} = z_\lambda(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для построения трехиндексной функциональной матрицы  $Z(t)$  продифференцируем по  $x(0)$  обе части матричного уравнения (2.4):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial Y}{\partial x(0)} \right] = \left\{ f_{xx} \frac{\partial x}{\partial x(0)}, Y \right\} + f_x \frac{\partial Y}{\partial x(0)}$$

или с учетом принятых обозначений (2.7):

$$Z = \{f_{xx} Y, Y\} + f_x Z \quad (2.8)$$

где  $\{f_{xx}Y, Y\}=C$  — трехиндексный объект, элементы которого определяются по формуле

$$C_{ijk} = \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_m \partial x_p} y_{pk} y_{mj} \quad (i, j, k = \overline{1, n}).$$

Таким образом, задача определения вторых производных от решения системы (2.1) по начальным условиям и параметру в окрестности известного состояния сводится к задаче Коши для системы (2.8) с начальными условиями  $Z(0)=0$ . Системы уравнений для  $Z_\lambda(t)$  и  $z_\lambda(t)$  строятся аналогично и имеют вид

$$Z_\lambda^* = \{(f_{xx}y_\lambda + f_{x\lambda}), Y\} + f_x Z_\lambda \quad (Z_\lambda(0)=0) \quad (2.9)$$

где  $\{(f_{xx}y_\lambda + f_{x\lambda}), Y\}=C_\lambda$  — квадратная матрица, элементы которой определяются по формуле

$$C_{\lambda ij} = \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_m \partial x_p} y_{\lambda p} y_{mj} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_m \partial \lambda} y_{mj} \quad (i, j = \overline{1, n})$$

$$z_\lambda^* = \{(f_{xx}y_\lambda + f_{x\lambda}), y_\lambda\} + f_x z_\lambda + f_{\lambda\lambda} \quad (z_\lambda(0)=0) \quad (2.10)$$

где  $\{(f_{xx}y_\lambda + f_{x\lambda}), y_\lambda\}=c_\lambda$  — столбец из  $n$  элементов, определяющихся по формуле

$$c_{\lambda i} = \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_m \partial x_p} y_{\lambda p} y_{\lambda m} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_m \partial \lambda} y_{\lambda m} \quad (i = \overline{1, n})$$

Уравнения для определения третьих производных решения уравнения (2.1) в окрестности точки ветвления по  $x(0)$  и  $\lambda$  могут быть получены полчленным дифференцированием (2.8) — (2.10) — и т. д.

Учет высших членов разложения в ряд Тейлора в (2.3) позволяет построить приближенные уравнения ветвления периодических решений в форме условий периодичности второго, третьего и более высоких порядков. Так, при учете членов второго порядка малости в (2.3) приближенные уравнения ветвления имеют вид

$$[Y(2T) - E]\delta x(0) + y_\lambda(2T)\delta\lambda + \frac{1}{2}\{Z(2T)\delta x(0), \delta x(0)\} + \frac{1}{2}\{Z_\lambda(2T)\delta x(0), \delta\lambda\} + \frac{1}{2}\{z_\lambda(2T)\delta\lambda, \delta\lambda\} = 0 \quad (2.11)$$

Решение системы нелинейных алгебраических уравнений (2.11) может быть получено путем отделения корней при заданном  $\delta\lambda$  с последующим уточнением методом Ньютона. При этом, если система (2.11) не имеет решений или среди корней имеются кратные, в уравнениях ветвления необходимо учесть следующие члены разложения и вычисления повторить. Построенные таким образом бифуркационные решения удвоенного периода могут быть продолжены по каждой из ветвей. На них в свою очередь могут быть найдены бифуркационные точки и построены ответвляющиеся решения более высокой кратности периода (если такие имеются) и т. д.

По описанной методике построения дерева ветвлений периодических решений системы (2.1) проводились вычисления с удвоенной точностью. Системы уравнений (2.1), (2.4), (2.5) и в точках ветвления (2.8) — (2.10) интегрировались совместно методом Эверхарта одиннадцатого порядка [9] с высокой точностью. Шаг продолжения  $\delta\lambda$  выбирался таким образом, чтобы после 2—3 итераций метода Ньютона — Канторовича (2.6) выполнялось условие  $\|r_{(k)}\| \leq 10^{-10} \max_t |x(t)|$ . В окрестности бифуркационных значений параметра  $\lambda$  решение уточнялось методом половинного деления.

**3. Основные результаты.** Рассмотрим задачу о колебаниях относительно центра масс спутника, движущегося по эллиптической орбите в цент-

| $i$ | $e_{(i)}$         | $\delta_{(i)}$ | $\gamma_{(i)}(0)$ | $\gamma'_{(i)}(0)$ |
|-----|-------------------|----------------|-------------------|--------------------|
| 1   | 0,485119598303158 |                | 0                 | -1,86799991247931  |
| 1'  | 0,490622862957456 | 6,178469       | 1,55100000253307  | -1,55280238096206  |
| 2   | 0,488629721260237 | 8,31949        | 1,84006691253306  | -1,43112447843418  |
| 3   | 0,488307126456110 | 8,70491        | 1,76284333280912  | -1,46218153113133  |
| 4   | 0,488268350668321 | 8,7157119      | 1,78312235600912  | -1,45371682012614  |
| 5   | 0,488263896195606 | 8,7198318      | 1,78802677471420  | -1,45167998377740  |
| 6   | 0,488263385110482 | 8,7210853      | 1,78816016233797  | -1,45162283214530  |
| 7   | 0,488263326498649 |                | 1,78825855694414  | -1,45158212342689  |
| 8   | 0,488263319777945 |                | 1,78827545620457  | -1,45157515271991  |

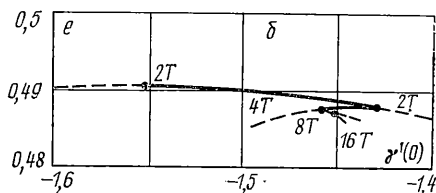
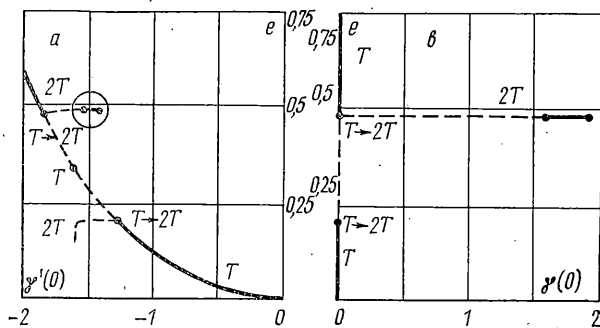
ральном силовом поле. Уравнение плоских колебаний спутника относительно центра масс имеет вид [10]:

$$(1+e \cos v) \gamma'' - (2e \sin v) \gamma' + n^2 \sin \gamma = 4e \sin v \quad (3.1)$$

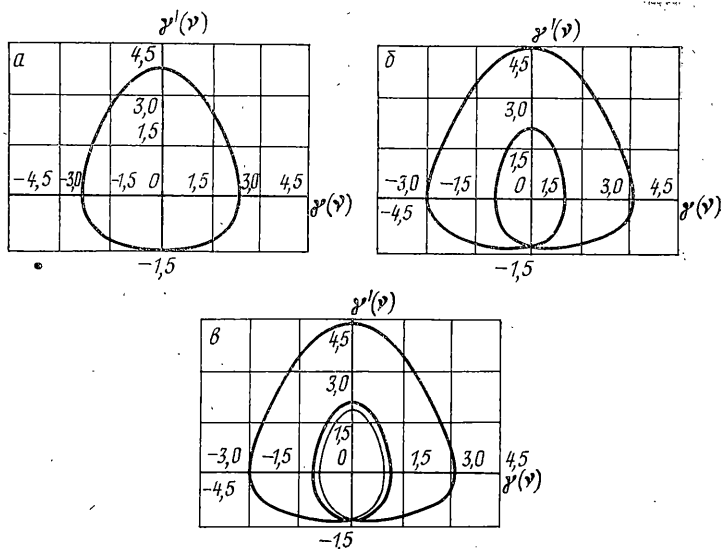
где  $e$  — эксцентриситет орбиты;  $n^2 = 3(A-C)/B$ ;  $A, B, C$  — моменты инерции спутника;  $v$  — истинная аномалия;  $\gamma(v) = 2\theta(v)$ ,  $\theta(v)$  — угол между радиус-вектором и главной центральной осью инерции, соответствующей максимальному моменту инерции; штрихом обозначена производная по  $v$ . В расчетах, результаты которых приводятся ниже, принято  $n^2 = 3/5$ .

Примем в качестве порождающего  $2\pi$ -периодического решения устойчивое стационарное состояние:  $e=0$ ,  $\gamma(v)=0$ ,  $\gamma'(v)=0$ . Продолжение решения по параметру  $e$  показывает, что при  $0 < e < 0,190826$  спутник совершает устойчивые колебания с периодом  $2\pi$ . При  $e \approx 0,190826$  имеет место бифуркация удвоения периода. При дальнейшем увеличении эксцентриситета  $e$   $2\pi$ -периодические колебания становятся неустойчивыми. Отвечающее  $4\pi$ -периодическое решение также является неустойчивым и при продолжении не приводит к последующим бифуркациям удвоения периода.

При дальнейшем увеличении эксцентриситета  $2\pi$ -периодические колебания спутника являются неустойчивыми вплоть до значения  $e = e_{(1)} \approx 0,485120$ . При этом значении эксцентриситета орбиты возможна бифуркация удвоения периода колебаний. Как и в первом случае, отвечающее  $4\pi$ -периодическое решение является устойчивым и остается таковым при увеличении  $e$  до значения  $e = e_{(1')} \approx 0,490623$ . При  $e = e_{(1')}$  происходит смена устойчивости в результате наличия на ветви  $4\pi$ -периодических решений регулярной экстремальной точки [7]. Дальнейшее продолжение ветви  $4\pi$ -периодических решений возможно лишь при уменьшении эксцентриситета  $e$ . Причем для значений  $e$ , лежащих в диапазоне  $e_{(1')} \leq e < e_{(2)}$  (см. таблицу),  $4\pi$ -периодические колебания спутника являются устойчивыми. При значении эксцентриситета орбиты  $e = e_{(2)}$  в результате бифуркации удвоения периода  $4\pi$ -периодические колебания спутника теряют устойчивость с появлением устойчивых  $8\pi$ -периодических колебаний. Колебания с периодом  $8\pi$  являются устойчивыми при значениях эксцентриситета  $e_{(2)} \leq e < e_{(3)}$  и при  $e = e_{(3)}$  теряют устойчивость в результате бифуркации удвоения периода с возникновением устойчивых  $16\pi$ -периодических колебаний. Дальнейшее уменьшение эксцентриситета приводит к лавинообразному развитию неустойчивостей в результате быстросходящейся последовательности бифуркаций удвоения периода колебаний. На фиг. 1, а, в показаны проекции бифуркационной диаграммы  $\Phi[e, \gamma(0), \gamma'(0)]$  на плоскости  $eO\gamma(0)$  и  $eO\gamma'(0)$ . Выделенный окружностью фрагмент фиг. 1, а в увеличенном виде показан на фиг. 1, б. Участки, соответствующие неустойчивым колебаниям спутника показаны пунктирными кривыми. В таблице приведены значения эксцентриситета орбиты  $e$ , соответствующие первым восьми бифуркациям ( $i=1,8$ ) удвоения периода колебаний спутника, и начальные условия  $2\pi$ -периодических решений уравнений (2.1) при  $e = e_{(i)}$ . Анализ бифуркационной диаграммы и бифуркационных значений  $e_{(i)}$  ( $i=1,8$ ) показывает, что их последователь-



Фиг. 1



Фиг. 2

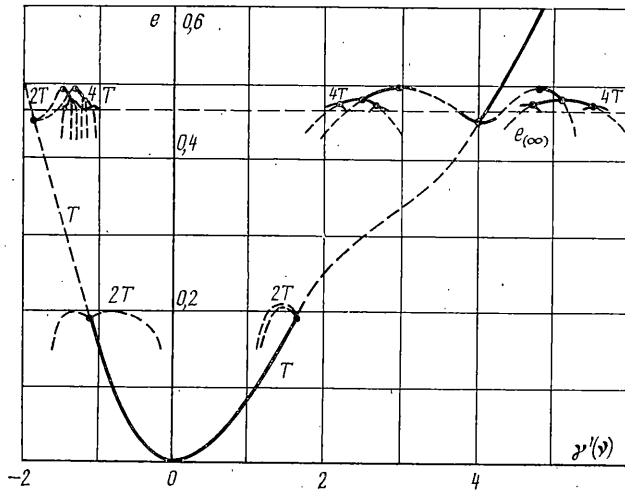
ность быстро сходится к некоторой предельной точке (точке накопления [3])  $e_{(\infty)}$  приближенно по закону геометрической прогрессии с показателем  $\delta_{(i)}$ , стремящимся к универсальной консервативной постоянной Фейгенбаума с увеличением  $i$ , т. е.

$$\delta_{(i)} = (e_{(i+1)} - e_{(i)}) / (e_{(i+2)} - e_{(i+1)}) \rightarrow \delta \quad (i \rightarrow \infty)$$

Отметим, что уже при  $i=6$  ( $\delta - \delta_{(i)} \approx 10^{-6}$ ). Наличие геометрической сходимости бифуркационных значений  $e_{(i)}$  к точке накопления позволяет приближенно вычислить значение  $e_{(\infty)}$ , при котором колебания спутника будут носить хаотический характер

$$e_{(\infty)} \approx e_{(i)} + (e_{(i+1)} - e_{(i)}) \delta / (\delta - 1) = 0,488263312186808 \quad (i=6)$$

Подчеркнем, что под хаотическим движением здесь подразумевается поведение системы в области фазового пространства, характеризуемой неустойчивостью всех  $2^i \pi$ -периодических траекторий, включая траекторию с периодом  $\infty$ . Проследим теперь как изменяются траектории движения



Фиг. 3

спутника относительно центра масс в результате последовательности бифуркаций удвоения периода колебаний. Фазовые портреты  $2^i\pi$ -периодических колебаний, соответствующие бифуркационным значениям  $e_{(i)}$  ( $i=1, 2, 8$ ) приведены на фиг. 2, а–в. На фиг. 3 приведено дерево ветвлений, представляющее собой сечение поверхности в расширенном фазовом пространстве  $(\gamma(v), e, \gamma'(v))$  плоскостью  $\gamma'(v)=0$ . На фазовых портретах видно, что каждая бифуркация удвоения периода приводит к расщеплению фазовой траектории. Однако расстояние  $\Delta_{(i)}$  между соседними участками траектории уменьшается с увеличением  $i$ , т. е.  $\Delta_{(i)} \rightarrow 0$  ( $i \rightarrow \infty$ ). В связи с этим отметим, что фазовая траектория 256л-периодических колебаний (фиг. 2, в) пересекает ось  $\gamma$  в 256 точек.

В результате проведенного исследования установлено, что при некоторых значениях эксцентриситета эллиптической орбиты плоские колебания спутника относительно центра масс могут носить хаотический характер, возникающий в результате последовательности бифуркаций удвоения периода. Показано, что такая последовательность геометрически сходится к предельному значению с показателем  $\delta_{(i)}$ , стремящимся к консервативной постоянной Фейгенбаума.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Greene J. M., Mackay R. S., Vivaldi F., Feigenbaum M. J. Universal Behaviour in Families of Area – Preserving Maps // *Physica*. 1981. V. 3D. № 3. P. 468–486.
2. Helleman R. H. G. Feigenbaum Sequences in Conservative and Dissipative Systems // *Chaos and Order in Nature: Intern. Sympos. of Synergetics*. Bavaria, 1981. Berlin: Springer, 1981. P. 232–248.
3. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
4. Feigenbaum M. J. Universal Behaviour in Nonlinear Systems // *Los Alamos Sci*. 1980. V. 1. № 1. P. 4–27. (рус. перев.: Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // *Успехи физ. наук*. Т. 141. Вып. 2. С. 343–374.)
5. Гуляев В. И., Баженов В. А., Гоцуляк Е. А. и др. Устойчивость периодических процессов в нелинейных механических системах. Львов: Вища шк., 1983. 287 с.
6. Демидович В. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
7. Йосс Ж., Джексофф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983. 300 с.
8. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.
9. Everhart E. An Implicit Single Sequence Methods for Integrating Orbits // *Celest. Mech.*, 1974. V. 10. P. 35–55.
10. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.