МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1989

УДК 531.8

Ю. В. БОЛОТИН

УПРАВЛЕНИЕ СТАТИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВЫМИ ПОХОДКАМИ ШАГАЮЩИХ АППАРАТОВ

Задача управления шагающими аппаратами включает задачи построения программного движения и его стабилизации. Для статически устойчивых походок [1] решение задачи стабилизации сводится к обеспечению заданной программной зависимости углов в управляемых шарнирах от времени; ограничения, которым должна удовлетворять программная траектория, определяются геометрическими условиями «неопрокидывания» аппарата.

При увеличении скорости движения энергетически выгодно переходить к режимам движения с малым числом опорных конечностей [2], для которых статическая устойчивость невозможна. При построении программной траектории необходимо решать краевую задачу для дифференциальных уравнений динамики [3]. Кроме того, алгоритм управления, реализующий программную зависимость углов в управляемых шарнирах от времени, не обеспечивает движения вдоль программной траектории.

В публикуемой работе используется ослабленное толкование понятия программного движения: не различаются движения, различающиеся одно от другого параметризацией по времени [4]. Это позволяет использовать те же принципы управления, что и в статически устойчивом случае, для походок, у которых число опорных конечностей равно двум.

1. Шагающий аппарат является управляемой механической системой с переменными связями, структура которых определяется числом точек опоры и их положением на местности. Если не предполагать наличия в стопах присосок, связи односторонние; при смене знака нормальной к опоре составляющей реакции стопа отрывается от поверхности, что влечет за собой снятие части связей. Наложение новых связей происходит при постановке стопы на опору; соответствующее перераспределение скоростей описывается уравнениями удара, который будем считать идеально неупругим. Будем предполагать также невозможность проскальзывания: стопа неподвижна на опоре тогда и только тогда, когда нормальная к опоре составляющая реакции положительна.

Пусть состояние аппарата в безопорной фазе описывается векторами $\mathbf{q}$, $\mathbf{v}$ обобщенных координат и скоростей и лагранжианом $L(\mathbf{q},\mathbf{v})$. Аппарат управляется посредством вектора $\mathbf{Q}$ обобщенных управляющих моментов в шарнирах, вектор углов в которых будем обозначать $\boldsymbol{\varphi}$.

Пусть $\boldsymbol{\rho}_1,\ldots,\boldsymbol{\rho}_l$ — радиус-векторы стоп конечностей относительно связанной с местностью системы отсчета, и пусть условие касания опорной поверхности имеет вид $h(\boldsymbol{\rho})=0$. На отрезке времени, в течение которого опорные стопы неподвижны, движение аппарата описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}-\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}=\mathbf{Q}^T\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{q}}+\sum_i\left(\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_i}{\partial \mathbf{q}},\mathbf{R}_i\right) \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{\rho}_i(\mathbf{q})=\boldsymbol{\rho}_i^0,\quad (\mathbf{R}_i,\mathbf{v}_i)>0,\quad h(\boldsymbol{\rho}_j)>0$$

Здесь i, j — номера соответственно опорных и переносимых конечностей, лежащие в диапазоне $1\leqslant i,\ j\leqslant l$; $\boldsymbol{\rho}_i^0$ — положения точек опоры; $\mathbf{R}_i$ — реакции в опоре, $\mathbf{v}_i=\partial h/\partial\boldsymbol{\rho}_i$ — векторы верхней нормали к опорной поверхности.

При нарушении условия $(\mathbf{R}_i, \mathbf{v}_i)>0$ стопа отрывается от поверхности и конечность становится переносной; при нарушении условия $h(\rho_j)>0$ конечность ударяется об опору и становится опорной. Уравнения удара имеют вид

$$\begin{gathered}\partial L/\partial \mathbf{v}^- - \partial L/\partial \mathbf{v}^+ = \sum_i (\mathbf{R}_i, \partial \rho_i/\partial q) \\ (\partial \rho_i/\partial q \mathbf{v}^-)=0, \quad (\mathbf{R}_i, \mathbf{v}_i)>0 \\ ((\partial \rho_j/\partial \mathbf{q} \mathbf{v}^-, \mathbf{v}_i))>0\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь и ниже индексы «плюс», «минус» отвечают значениям переменных до и после удара соответственно; i — номера конечностей, которые в конце удара неподвижны на опоре, j — номера конечностей, которые в процессе удара отскакивают от опоры, $\mathbf{R}_i$ — импульсные опорные реакции.

Интервал движения между последовательными моментами постановки или отрыва стопы от опорной поверхности называется опорной фазой. Опорным контуром называется выпуклая оболочка P радиус-векторов точек опоры. Опорным контуром смены опорной фазы называется выпуклая оболочка радиус-векторов стоп конечностей, импульсные реакции в которых в момент удара отличны от нуля. В зависимости от числа точек опоры опорный контур представляет собой пустое множество, точку, отрезок, треугольник или выпуклый многогранник.

2. Число степеней подвижности аппарата в течение опорной фазы определяется числом опорных конечностей и может меняться от шага к шагу. Будем называть движение на шаге статически управляемым, если число степеней подвижности не превосходит числа независимых управляющих воздействий. Если число степеней подвижности больше числа управлений, то в фазовом пространстве можно выделить подпространство так называемых неуправляемых скоростей, производные которых в силу системы (1.1) не содержат управлений.

Если аппарат находится в фазе полета, неуправляемыми являются скорость центра масс и кинетический момент аппарата. Если опорный контур — непустое множество, неуправляемыми являются проекции кинетического момента на всевозможные прямые, содержащие опорный контур. Отсюда следует, что число неуправляемых скоростей может принимать четыре значения 6, 3, 1, 0 в зависимости от того, является ли опорный контур точкой, отрезком или многоугольником.

Ниже изучаются такие походки, для которых на каждой опорной фазе опорный контур представляет собой отрезок. Сюда относятся, например, парные рысь, иноходь, галоп четырехного аппарата, одноопорная ходьба плоского двуногого аппарата с узкими стопами и т. п. Опорные контуры P_n, $1\leqslant n<\infty$ последовательных опорных фаз будем характеризовать началом p_n и направляющим вектором $\mathbf{e}_n$. Пусть $\mathbf{k}_n$ — кинетический момент аппарата относительно точки p_n; он является линейной функцией обобщенных скоростей

$$\mathbf{k}_n = \eta_n(\mathbf{q})\mathbf{v} \tag{2.1}$$

Здесь $\eta_n(\mathbf{q})$ — матрица, элементы которой зависят от обобщенных координат. Уравнения баланса кинетического момента в проекции на опорный контур имеют вид

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{k}_n, \mathbf{e}_n) = ([\mathbf{r}_n, m\mathbf{g}], \mathbf{e}_n) \tag{2.2}$$

Здесь $m\mathbf{g}$ — вес аппарата, $\mathbf{r}_n$ — радиус-вектор его центра масс относительно точки p_n.

Будем рассматривать так называемый одноударный случай, когда опорный контур смены опорной фазы совпадает с опорным контуром опорной фазы, следующей за ударом. Это условие выполнено, например, для большинства аппаратов с антропоморфной конструкцией конечностей [5]. Тогда кинетический момент относительно опорного контура новой опорной фазы сохраняется при ударе; уравнения баланса кинетического момента при смене опорной фазы имеют вид

$$(\mathbf{k}_{n+1}^{-}, \mathbf{e}_{n+1}) = \left(\mathbf{k}_n^{+} + \left[m \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v}_n^{+}, p_{n+1} - p_n\right], \mathbf{e}_{n+1}\right) \tag{2.3}$$

3. Пусть задано некоторое программное движение шагающего аппарата $\mathbf{q}_*(t)$ с индексом статической неуправляемости, равным единице, вектор скорости $\mathbf{q}_*^{\cdot}$ на котором не обращается в ноль. Назовем траекторией движения кривую Γ в конфигурационном пространстве, определенную как геометрическое место точек $\mathbf{q}_*(t)$. Зафиксируем параметризацию кривой $\mathbf{q}_*=\mathbf{q}_*(s)$, $0 \leqslant s < \infty$ некоторой монотонно зависящей от времени величиной s, называемой путевым параметром. Пусть s_n, $1 \leqslant n < \infty$ — точки смены опорной фазы, P_n — опорный отрезок, отвечающий участку кривой $s_n \leqslant s \leqslant s_{n+1}$, $\mathbf{v}_* = d\mathbf{q}_*/ds$ — касательный вектор Γ на участках движения в фиксированной опорной фазе. Кривая Γ может иметь изломы в точках смены опорной фазы, обусловленные скачком скоростей при ударной постановке стопы на опорную поверхность. Пусть $\mathbf{v}_n^{+} = \mathbf{v}_*(s_{n+1}-0)$, $\mathbf{v}_{n+1}^{-} = \mathbf{v}_*(s_{n+1}+0)$ — касательные векторы к кривой соответственно левее и правее s_{n+1}.

Назовем движение шагающего аппарата движением с заданной траекторией Γ, если в каждый момент времени конфигурация $\mathbf{q}$ принадлежит Γ. Фазовое состояние аппарата в таком движении характеризуется значением путевого параметра и путевой скорости $w = s^{\cdot}$.

На участке движения в фиксированной опорной фазе кинетический момент относительно точки p_n связан с путевой скоростью формулой

$$\mathbf{k}_n = \eta_n(\mathbf{q}_*(s))\mathbf{v}_*(s)w \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в уравнения баланса кинетического момента, получим

$$\frac{d}{dt}(\eta_n(\mathbf{q}_*(s))\mathbf{v}_*(s)w, \mathbf{e}_n) = ([\mathbf{r}_n(\mathbf{q}_*(s)), m\mathbf{g}], \mathbf{e}_n) \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) является несингулярным дифференциальным уравнением, если траектория Γ удовлетворяет условию невырожденности

$$(\eta_n(\mathbf{q}_*(s))\mathbf{v}_*(s), \ \mathbf{e}_n) \neq 0 \tag{3.3}$$

означающему, что кинетический момент в программном движении не обращается в ноль. В точках, где нарушается (3.3), для поддержания движения вдоль Γ необходимо приложить бесконечное управление. Как правило, это приводит к нарушению условий контакта с опорой.

Предположим, что условие невырожденности выполнено. Тогда движение с заданной траекторией корректно определено в течение опорной фазы и непрерывно зависит от начальных условий. Возможны монотонные движения вперед, то есть в направлении возрастания s, монотонные движения назад, а также возвратные движения [6].

Будем рассматривать движения вперед. Интегрируя (3.2) на отрезке $s_n \leqslant s \leqslant s_{n+1}$, получим закон преобразования величины кинетического момента относительно опорного контура в течение опорной фазы

$$(\mathbf{k}_n^{+}, \mathbf{e}_n)^2 = (\mathbf{k}_n^{-}, \mathbf{e}_n)^2 + 2\int_{s_n}^{s_{n+1}} ([\mathbf{r}_n(\mathbf{q}_*), m\mathbf{g}], \mathbf{e}_n)(\eta_n(\mathbf{q}_*), \mathbf{e}_n)\, d\mathbf{q}_* \tag{3.4}$$

Уравнения преобразования скоростей при смене опорной фазы определяются из соотношений (3.1), (2.2) согласно формулам

$$(\eta_{n+1}(\mathbf{q}_*(s_n))\mathbf{v}_{n+1}^{-}, \mathbf{e}_{n+1})w_{n+1}^{-} =$$
$$= \left(\eta_n(\mathbf{q}_*(s_n))\mathbf{v}_n^{+} + \left[m\frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_*}\mathbf{v}_n^{+}, p_{n+1} - p_n\right], \mathbf{e}_{n+1}\right) w_n^{+} \tag{3.5}$$

Объединяя (3.4), (3.5), уравнения движения вперед можно записать в виде системы конечно-разностных уравнений

$$\xi_{n+1}=\sigma_n\xi_n+a_n,\quad \xi_n=(\mathbf{k}_n^+,\,\mathbf{e}_n)^2\quad (1\leqslant n<\infty) \tag{3.6}$$

$$\sigma_n=\left(\eta_n(\mathbf{q}_*(s_n))\mathbf{v}_n^+ + \left[m\frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial \mathbf{q}_*}\mathbf{v}_n^+,\,p_{n+1}-p_n\right],\,\mathbf{e}_{n+1}\right)^2(\eta_n(\mathbf{q}_*(s_n)),\,\mathbf{e}_n)^{-2} \tag{3.7}$$

$$a_n=2\int\limits_{s_n}^{s_{n+1}}([\mathbf{r}_n(\mathbf{q}_*),\,m\mathbf{g}],\,\mathbf{e}_n)(\eta_n(\mathbf{q}_*),\,\mathbf{e}_n)\,d\mathbf{q}_*(s)$$

Параметры (3.7) определяются формой кривой Г. Их эквивалентное выражение через параметры задающего Г программного движения имеет вид

$$\sigma_n=(\mathbf{k}_{n+1}^-,\,\mathbf{e}_{n+1})^2/(\mathbf{k}_n^+,\,\mathbf{e}_n)^2,\qquad a_n=2\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}([\mathbf{r}_n,\,m\mathbf{g}],\,\mathbf{e}_n)(\mathbf{k},\,\mathbf{e}_n)\,dt \tag{3.8}$$

4. Пусть программное движение является периодическим. Тогда существует целое $N>0$ такое, что параметры (3.7) удовлетворяют соотношениям $\sigma_{n+N}=\sigma_n$, $a_{n+N}=a_n$, а разностное уравнение (3.6) имеет N-периодическое решение ξ_n^*. Будем называть программное движение геометрически устойчивым, если указанное решение экспоненциально устойчиво, и геометрически неустойчивым, если это решение экспоненциально неустойчиво.

Движение является геометрически устойчивым (неустойчивым) тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет соотношению

$$\prod_{n=1}^{N}\sigma_n\leqslant 1 \tag{4.1}$$

При выполнении (4.1) оно однозначно определяется своей траекторией посредством соотношения

$$\left(1-\prod_{n=1}^{N}\sigma_n\right)\xi_1=\sum_{n=1}^{N}\prod_{k=n+1}^{N}\sigma_k a_n \tag{4.2}$$

Случай, когда (4.1) превращается в равенство, будем называть критическим случаем устойчивости; ему соответствует однопараметрическое семейство периодических движений.

Примеры. Рассмотрим частный случай однопериодических походок, таких как симметричные одноопорная ходьба двуногого, парные рысь, иноходь четырехногого аппарата. Здесь условие геометрической устойчивости сводится к неравенству $(\mathbf{k}_n^+,\,\mathbf{e}_n)>(\mathbf{k}_n^-,\,\mathbf{e}_n)$, означающему, что кинетический момент относительно опорного контура в программном движении в конце шага больше, чем в его начале. Выясним геометрический смысл последнего условия для некоторых специальных типов походок.

1. Пусть опорная поверхность горизонтальна, а походка является плоской, то есть опорный контур перпендикулярен некоторой неподвижной вертикальной плоскости, в которой движется центр масс аппарата. Тогда для геометрической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы в конце шага вертикальная составляющая скорости центра масс была направлена вниз [4].

2. Пусть масса конечностей мала и не влияет на динамику аппарата, а его корпус движется поступательно. Тогда для геометрической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы объем параллелепипеда, натянутого на радиус-вектор центра масс, вектор скорости и направляющую опорного контура в конце шага был больше, чем в его начале. Отсюда следует, например, что при прямолинейном движении центра масс имеет место критический случай устойчивости.

Выше траектория Г строилась по заданному программному движению. Рассмотрим обратную задачу. Пусть Г — кусочно-гладкая кривая в конфигурационном пространстве, на каждом гладком участке которой опорный контур представляет собой отрезок, выполнены условия невырожденности (3.3) и в каждой точке $\mathbf{q}_n$ излома (смены опорной фазы) знаки коэффициентов при скоростях в (3.5) совпадают. Тогда движение вдоль Г существует и однозначно определено начальными условиями.

Если кривая N-периодическая и удовлетворяет условиям геометрической устойчивости (4.1), то соответствующее конечно-разностное уравнение (3.6) имеет устойчивое N-периодическое решение ξ_n^*, $1\leqslant n<\infty$, определенное соотношениями (4.2). Этому решению соответствует геометрически устойчивое периодическое движение аппарата, если на каждой опорной фазе скорость движения вдоль Г не обращается в ноль

$$\xi_n^*+\int\limits_{\mathbf{q}_n}^{\mathbf{q}}([\mathbf{r}_n(q),m\mathbf{g}],\mathbf{e}_n)(\eta_n(\mathbf{q}),\mathbf{e}_n)\,d\mathbf{q}>0 \tag{4.3}$$

В критическом случае устойчивости, когда неравенство (4.1) превращается в равенство, периодическое движение с траекторией Г существует лишь в исключительных случаях [1].

5. Рассмотрим задачу стабилизации движения шагающего аппарата. Пусть траектория Г задана на n-й опорной фазе уравнением $\varphi=\varphi_n^*(s(\mathbf{q}))$, где путевой параметр $s_n(\mathbf{q})$ является функцией конфигурации аппарата. Введем алгоритм управления в виде отрицательной обратной связи по рассогласованиям текущих и программных значений углов в управляемых шарнирах

$$\mu W(\mu d/dt)\,\mathbf{Q}=\varphi-\varphi_n^*(s_n(\mathbf{q}))+T_n\left(\varphi^{\cdot}-\frac{\partial\varphi_n^*}{\partial s}\frac{\partial s_n}{\partial\mathbf{q}}\mathbf{v}\right) \tag{5.1}$$

Здесь W — матричный полином относительно оператора d/dt дифференцирования по времени, $T_n>0$ — весовой множитель. Управление (5.1) приводит уравнения движения (1.1) к сингулярно возмущенному виду [7]. Построим асимптотическое приближение решений, полагая $\mu=0$:

$$\varphi-\varphi_n^*(s_n(\mathbf{q}))+T_n\left(\varphi^{\cdot}-\frac{\partial\varphi_n^*}{\partial s}\frac{\partial s_n}{\partial\mathbf{q}}\mathbf{v}\right)=0 \tag{5.2}$$

Если выполнено (5.2), то при возрастании t движение выходит на программную траекторию Г. Величина T_n характеризует скорость выхода.

Пусть в некоторый момент времени t_n равенство (5.2) нарушается. Это может произойти, например, в результате удара переносимой стопы об опорную поверхность. Тогда в системе возникают быстрые переходные процессы, приближенно описываемые уравнениями

$$\frac{d}{\partial\tau}\frac{\partial L}{\partial\mathbf{v}}=\mathbf{Q}^T\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{q}}+\sum_i\left(\frac{\partial\rho_i}{\partial\mathbf{q}},\mathbf{R}_i\right)$$

$$W(d/d\tau)\,\mathbf{Q}=T_n\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{q}}-\frac{\partial\varphi_n^*}{\partial s}\frac{\partial s_n}{\partial\mathbf{q}}\right)\mathbf{v}+\varphi(\mathbf{q})-\varphi_n^*(s_n(\mathbf{q})) \tag{5.3}$$

$$(\partial\rho_i/\partial\mathbf{q})\,\mathbf{v}=0,\quad \mathbf{q}=\mathrm{const}$$

Здесь $\tau=(t-t_n)/\mu$ — быстрое время, $\mathbf{Q}/\mu$, $\mathbf{R}_i/\mu$ — переходные составляющие управления и опорных реакций. Условием затухания переходных процессов является равномерная экспоненциальная устойчивость по $\mathbf{v}$ системы (5.3) [8].

Решение задачи стабилизации ходьбы с индексом статической неуправляемости, равным единице, сводится к выбору путевого параметра $s_n(\mathbf{q})$, построению траектории движения, удовлетворяющей условиям невырожденности и геометрической устойчивости, и построению регулятора (5.1), обеспечивающего экспоненциальную устойчивость переходных процессов (5.3).

В отличие от статически управляемого случая, последние две задачи, как правило, не являются независимыми. Изменение траектории может привести к возникновению неустойчивости переходных процессов. От указанной трудности можно избавиться за счет специального выбора путевого параметра $s_n(\mathbf{q})$. Имеет место следующее утверждение [9].

Пусть в точке $\mathbf{q}$ путевой параметр является неуправляемой координатой, то есть с точностью до интегрирующего множителя $\lambda_n(q)$ представляет собой первообразную кинетического момента аппарата относительно опорного контура

$$\lambda_n(\mathbf{q})\,ds_n(\mathbf{q})=(\eta_n(\mathbf{q})\,d\mathbf{q},\,\mathbf{e}_n) \tag{5.4}$$

Тогда условия устойчивости переходных процессов в точке $\mathbf{q}$ одинаковы для всех траекторий, проходящих через эту точку.

Для существования точного решения дифференциального уравнения (5.4) во всем конфигурационном пространстве необходимо, чтобы кинетический момент удовлетворял условию интегрируемости Фробениуса [10], которое в общем случае не выполнено. Однако обычно возможен выбор путевого параметра, удовлетворяющий (5.4) приближенно. Например, допустимо использовать решение линеаризированных уравнений (5.4).

Эффективность предложенной методики управления проверялась путем математического моделирования движения двуногого шагающего аппарата с электроприводом постоянного тока. Учитывались реальные характеристики приводов: электромагнитные процессы в двигателях, неидеальность редукторов, запаздывание в системе управления. Установлена возможность применения алгоритма при управлении лабораторным макетом шагающего аппарата [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Охоцимский Д. Е., Голубев Ю. Ф.* Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата. М.: Наука, 1984. 310 с.
2. *Белецкий В. В., Болотин Ю. В.* Модельная оценка энергетики двуногой ходьбы и бега // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 89–94.
3. *Ларин В. Б.* Управление шагающими аппаратами. Киев: Наук. думка. 1980. 168 с.
4. *Болотин Ю. В.* О разделении движений в задаче стабилизации двуногой ходьбы // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 48–53.
5. *Формальский А. М.* Перемещение антропоморфных механизмов. М.: Наука, 1982. 368 с.
6. *Болотин Ю. В.* Динамическая стабилизация статически неустойчивых походок шагающего аппарата: Препринт № 63. М.: Ин-т прикл. математики АН СССР им. М. В. Келдыша. 1983. 28 с.
7. *Болотин Ю. В., Новожилов И. В.* Управление походкой двуногого шагающего аппарата // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 3. С. 47–52.
8. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: МГУ, 1978. 106 с.
9. *Белецкий В. В., Болотин Ю. В.* Математическое моделирование управления движением электромеханического двуногого шагающего аппарата: Препринт № 2. М.: Ин-т прикл. математики АН СССР им. М. В. Келдыша. 1986. 28 с.
10. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

Москва

Поступила в редакцию 23.III.1987