На фиг. 3 приведены штриховые кривые, определенные по соотношениям (10). Довольно хорошее их совпадение с экспериментальными кривыми подтверждает приемлемость (10) для описания монотонного нагружения малой кривизны рассматриваемого материала. Заметим, что указанные выше соотношения с несимметричной матрицей приводят почти к таким же теоретическим кривым, т. е. ε_{11}' и ε_{22}' оказываются приемлемыми, но за счет изменения ε_{12}' получаются другие значения ε_{22}, не описывающие поперечный эффект.

Таким образом, более полное выделение особенностей данного класса материалов и их предварительный учет позволили ограничиться в соотношениях (10) одной материальной функцией только одного переменного. Обобщение (10) на случай трехосного растяжения, к которому приводятся любые σ_{ij}, не представляет большого труда и здесь не рассматривается. Только в этом случае появится еще одна функция одной переменной $A_1(w)$. Также нетрудно обобщить (10) на случай неоднонаправленных композитов.

Несвойственная ортотропному телу структура соотношений (10) есть следствие выделения характерных особенностей сильно анизотропного тела. Для слабо анизотропных тел присутствие добавочных членов в (10) не помешает: их влияние автоматически станет малым и нет необходимости при численном расчете заранее пренебрегать ими. В общих же определяющих соотношениях такие особенности скрыты в оставляемых в неопределенном виде материальных функциях многих переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М; Л: Гостехиздат, 1948. 376 с.
2. *Amijima S., Adachi T.* Nonlinear stress-strain response of laminated composities. J. Compos. Mater. 1979. V. 13. P. 206–218.
3. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
4. *Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А.* Сопротивление полимерных и композиционных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 571 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.II.1987

УДК 624.072.4

Е. Д. ФОТИНИЧ

СВИВКА — КРАЙНЯЯ ФОРМА РАВНОВЕСИЯ ИЗОГНУТО-ЗАКРУЧЕННОГО СТЕРЖНЯ

Рассматривается так называемая свивка – простейшее, но типичное образование, характерное для нитей, шнуров, проводов и вообще стержневых систем с малой, но не исчезающей, жесткостью на изгиб и кручение.

В настоящей заметке определяются изгибающий и крутящий моменты, внутренние и контактные силы и угол свивки. Установлено, что определяющим параметром является отношение жесткости на изгиб к жесткости на кручение.

На некоторой длине L (фиг. 1) будем рассматривать свивку как однородное образование, состоящее из двух винтообразно искривленных жил, соприкасающихся по прямой $H-H$, которую будем называть осью свивки. За пределами отрезка L условия равномерного и плотного контакта между жилами нарушаются. Возникают зазоры и контактные сосредоточенные силы, расположение и величина которых зависят от размеров петли (справа) и от условий входа стержня в свивку (слева). В этом отношении свивка напоминает заключенный в трубу сжатый стержень (см. [1]).

Мысленно рассечем свивку плоскостью, перпендикулярной ее оси (фиг. 2) и введем систему самоуравновешенных моментов M_1, M_2 и сил Q_2.

Так как к петле никаких внешних сил не приложено, то

$$M_1=Q_2R \tag{1}$$

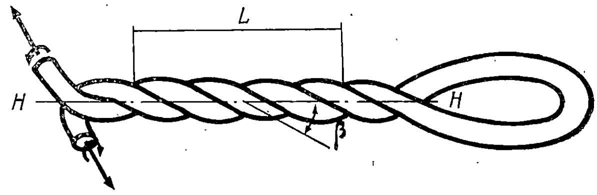
где R – радиус поперечного сечения. Моменты M_1 и M_2 не являются ни крутящими, ни изгибающими, поскольку сечение перпендикулярно оси свивки, но не осям жил. Оси жил представляют собой две винтовые линии, расположенные на поверхности образующего цилиндра радиуса R (фиг. 3). На этом же рисунке показаны моменты M_1 и M_2, сила Q_2 и усилия контактного взаимодействия q.

В двух произвольных точках винтовой линии O и A введем системы осей *1'*, *2'*, *3'* и *1*, *2*, *3* (фиг. 3). Оси *1* и *1'* направлены вдоль оси свивка, оси *2*, *2'* – по касательной, а *3*, *3'* – соответственно по нормали к поверхности образующего цилиндра.

Так как точки O и A равноправны, составляющие моменты и силы для осей *1'*, *2'*, *3'* должны быть такими же, что и для осей *1*, *2*, *3*:

$$Q_1'=0, \quad Q_2'=Q_2, \quad Q_3'=0 \tag{2}$$

$$M_1'=M_1, \quad M_2'=M_2, \quad M_3'=0 \tag{3}$$



Фиг. 1

С другой стороны, левые части этих равенств могут быть вычислены с помощью условий равновесия:

$$Q_1'=0, \quad Q_2'=Q_2 \cos\varphi+\int_0^x q \sin(\varphi-\psi)\, d\zeta$$

$$Q_3'=-Q_2 \sin\varphi+\int_0^x q \cos(\varphi-\psi)\, d\zeta$$

Будем считать, что усилие контактного взаимодействия q от координаты x, а следовательно и от углов α и ψ, не зависит.

Так как $\zeta=R\psi \operatorname{ctg}\beta$, а $d\zeta=R \operatorname{ctg}\beta\, d\psi$, интегрирование по ζ заменяется интегрированием по ψ от нуля до φ. Тогда

$$Q_2'=Q_2 \cos\varphi+qR \operatorname{ctg}\beta\,(1-\cos\varphi), \quad Q_3'=-Q_2 \sin\varphi+qR \operatorname{ctg}\beta \sin\varphi$$

Таким образом, первое из условий (2) выполняется тождественно, при любых Q_2 и q, а из двух других следует

$$Q_2=qR \operatorname{ctg}\beta. \tag{4}$$

Аналогичным образом поступают и с условиями (3). Воспользовавшись условиями равновесия, получим

$$M_1'=M_1-Q_2R(1-\cos\varphi)+\int_0^x qR \sin(\varphi-\psi)\, d\zeta$$

$$M_2'=M_2 \cos\varphi+Q_2x \sin\varphi-\int_0^x q(x-\zeta) \cos(\varphi-\psi)\, d\zeta$$

$$M_3'=M_2 \sin\varphi-Q_2x \cos\varphi-\int_0^x q(x-\zeta) \sin(\varphi-\psi)\, d\zeta$$

После интегрирования будем иметь

$$M_1'=M_1-Q_2R(1-\cos\varphi)+qR^2 \operatorname{ctg}\beta\,(1-\cos\varphi)$$

$$M_2'=M_2\cos\varphi+Q_2x \sin\varphi-qR \operatorname{ctg}\beta\,[x \sin\varphi-R \operatorname{ctg}\beta\,(1-\cos\varphi)]$$

$$M_3'=M_2 \sin\varphi-Q_2x \cos\varphi-qR \operatorname{ctg}\beta\,[R \operatorname{ctg}\beta \sin\varphi-x \cos\varphi]$$

Теперь заметим, что условия (3) удовлетворяются независимо от x и φ, если к найденному соотношению (4) присоединить следующее:

$$M_2=qR^2 \operatorname{ctg}^2\beta \tag{5}$$

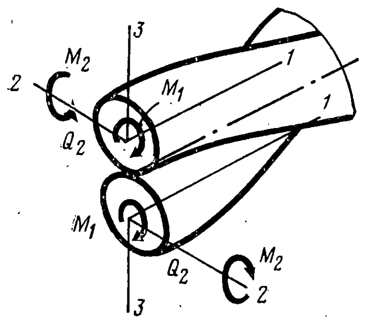
От сечения, нормального к оси свивки, перейдем к сечениям, нормальным к оси жилы, и найдем крутящий и изгибающий моменты, а также нормальную и поперечную силы

$$M_t=M_1 \cos\beta+M_2 \sin\beta, \quad M_b=M_2 \cos\beta-M_1 \sin\beta, \quad N=Q_2 \sin\beta, \quad Q=Q_2 \cos\beta$$

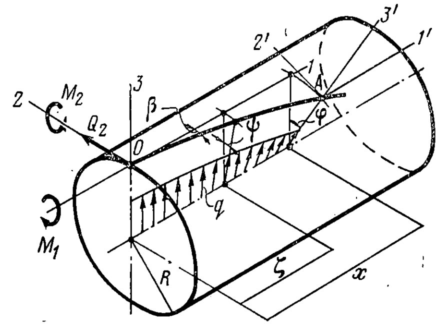
Воспользовавшись соотношениями (1), (4) и (5), получим

$$M_t=2q_0R^2 \operatorname{ctg}\beta, \quad M_b=q_0R^2\,(\operatorname{ctg}^2\beta-1) \quad Q=q_0R \operatorname{ctg}\beta, \quad N=q_0R \tag{6}$$

где q_0 — контактная нагрузка, сдвинутая по линии ее действия к осевой линии жилы. Осевая линия жилы длиннее, чем ось свивки, и соответственно $q_0=q \cos\beta$. Изгибаю-



Фиг. 2



Фиг. 3

щий момент пропорционален изменению кривизны, а крутящий — изменению крутки. Поскольку до свивки стержень был прямым, то

$$M_t = GI_p \sin\beta\cos\beta/R, \quad M_b = EI\sin^2\beta/R \tag{7}$$

Здесь EI — жесткость на изгиб, GI_p — жесткость на кручение, $\sin^2\beta/R$ — кривизна винтовой линии, а $\sin\beta\cos\beta/R$ — ее крутка.

Подставляем сюда M_t и M_b из (6) и исключая q_0, получим

$$\operatorname{ctg}\beta = (2e+1)^{1/2} \tag{8}$$

где $e = EI/GI_p$. Для сплошного или трубчатого кругового сечения $e = 1+\mu$ (μ — коэффициент Пуассона). Если $\mu = 0{,}5$, то $\beta = 26{,}6°$. Подставляя β из (8) в выражения (7) и (6), находим

$$M_t = GI_p(2R)^{-1}(2e+1)^{1/2}(e+1)^{-1}, \quad M_b = EI(2R)^{-1}(e+1)^{-1}$$

$$q_0 = GI_p(4R^3)^{-1}(e+1)^{-1}, \quad N = GI_p(4R^2)^{-1}(e+1)^{-1}$$

$$Q = GI_p(4R)^{-1}(2e+1)^{1/2}(e+1)^{-1}$$

Полученные соотношения отличаются простотой, а формула (8) находит количественное подтверждение в простейшем эксперименте с резиновым шнуром, имеющим сплошное сечение.

В заключение следует отметить, что из-за соизмеримости размеров поперечного сечения и радиуса кривизны упругой линии, напряжения в свивке будут иметь порядок модуля упругости. Поэтому полученные соотношения для материалов типа стали оказываются неприемлемыми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Феодосьев В. И.* О стесненном продольном изгибе упругого стержня // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 176–179.

Москва

Поступила в редакцию
9.XII.1987