

**К ОПИСАНИЮ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЙ
НЕЛИНЕЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ
ПРИ МОНОТОННЫХ НАГРУЖЕНИЯХ МАЛОЙ КРИВИЗНЫ**

На примере однонаправленных волокнистых композитов излагается новый метод построения инкрементальных определяющих соотношений, которые содержат материальные функции только одного аргумента, определяемые по данным одноосных испытаний образцов из данного анизотропного материала. Теоретические результаты хорошо описывают количественно известные экспериментальные данные и качественный эффект — знакопеременное изменение поперечной (к направлению волокон) деформации при растяжении образца, вырезанного под небольшим углом к направлению волокон.

Рассмотрим следующий частный вид соотношений гипотетических (для определенности) ортотропных тел:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^* &= \varphi_1(x) \sigma_{11}^* - \mu_{12}(y) \varphi_2(y) \sigma_{22}^* - \mu_{13}(z) \varphi_3(z) \sigma_{33}^*, & \varepsilon_{23}^* &= A_1(w) \sigma_{23}^* \\ \varepsilon_{22}^* &= -\mu_{21}(x) \varphi_1(x) \sigma_{11}^* + \varphi_2(y) \sigma_{22}^* - \mu_{23}(z) \varphi_3(z) \sigma_{33}^*, & \varepsilon_{31}^* &= A_2(w) \sigma_{31}^* \\ \varepsilon_{33}^* &= -\mu_{31}(x) \varphi_1(x) \sigma_{11}^* - \mu_{32}(y) \varphi_2(y) \sigma_{22}^* + \varphi_3(z) \sigma_{33}^*, & \varepsilon_{12}^* &= A_3(w) \sigma_{12}^* \\ x &= x(w), & y &= y(w), & z &= z(w), & w &= \int \sigma_{ij} d(\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) \\ \mu_{21}(x) \varphi_1(x) &= \mu_{12}(y) \varphi_2(y), & \mu_{31}(x) \varphi_1(x) &= \mu_{13}(z) \varphi_3(z) \\ \mu_{32}(y) \varphi_2(y) &= \mu_{23}(z) \varphi_3(z) \end{aligned} \quad (1)$$

Материальные функции одной переменной φ_k , A_k , μ_{ij} определяются по данным соответствующих одноосных экспериментов в главных осях ортотропии x_i .

Для случая изотропных тел имеем $x=y=z=w$, $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=E_t^{-1}$, $\mu_{12}=\mu_{21}=\mu_{13}=\mu_{31}=\mu_{23}=\mu_{32}=\mu_t$, $A_1=A_2=A_3=(1+\mu_t)E_t^{-1}$, где $E_t(w)$, $\mu_t(w)$ — касательный модуль и мгновенный коэффициент Пуассона при растяжении образца. Поэтому соотношения (1) представим в виде

$$\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon^* \delta_{ij} = (1 + \mu_t) E_t^{-1} (\sigma_{ij}^* - \sigma^* \delta_{ij}), \quad \varepsilon^* = (1 - 2\mu_t) E_t^{-1} \sigma^* \quad (3)$$

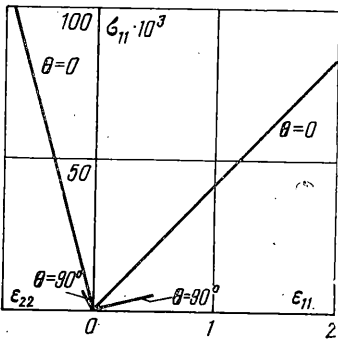
Видно, что если $(1 - 2\mu_t) E_t^{-1}$ является постоянной величиной, то изменения объема описываются линейно упругим законом и при простом (пропорциональном) нагружении соотношения (3) приведут к тем же результатам, что и известные соотношения теории малых упруго-пластических деформаций [1].

Для определения x , y , z кроме (2) необходимо еще одно уравнение, так как найденные из первых двух уравнений (2) функции $y(x)$ и $z(x)$ должны привести (с приемлемой точностью) к той же функции $z(y)$, что и третье уравнение (2) (например, это имеет место для трансверсально изотропного тела). Если же такое совпадение не имеет места, то нужно будет усложнить модель (1), учитывая характерную особенность рассматриваемого класса материалов. Поэтому исследования моделей типа (1) целесообразно вести после получения соответствующих экспериментальных данных. Вторую известна только работа [2], где получены данные относительно (стекло) волокнистого композита (с эпоксидной матрицей). На фиг. 1 приведены диаграммы растяжения вдоль и поперек волокон однонаправленного волокнистого композита [2] (ось 1 направлена вдоль волокон), а на фиг. 2 изображена зависимость $\sigma_{12} = \sigma_{12}(\varepsilon_{12})$ [2]. На этих и других фигурах по оси абсцисс отложены деформации в процентах, а по оси ординат напряжения в МПа, причем для удобства сопоставления с первоисточником принято $1 \text{ кг/см}^2 = 0,1 \text{ МПа}$; сплошными линиями изображены экспериментальные данные, а штриховыми — теоретические. $E_1 = 4,265 \text{ МПа}$, $E_2 = 1,28 \text{ МПа}$, $\nu_{12} = 0,274$. Поэтому для этого материала соотношения (1) примут вид

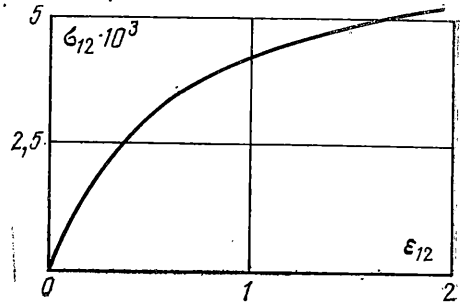
$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^* &= E_1^{-1} \sigma_{11}^* - \nu_{12} E_2^{-1} (\sigma_{22}^* + \sigma_{33}^*), & \varepsilon_{23}^* &= A_1(w) \sigma_{23}^* \\ \varepsilon_{22}^* &= -\nu_{21} E_1^{-1} \sigma_{11}^* + E_2^{-1} \sigma_{22}^* - \nu E_2^{-1} \sigma_{33}^*, & \varepsilon_{31}^* &= A(w) \sigma_{31}^* \\ \varepsilon_{33}^* &= -\nu_{21} E_1^{-1} \sigma_{11}^* - \nu E_2^{-1} \sigma_{22}^* + E_2^{-1} \sigma_{33}^*, & \varepsilon_{12}^* &= A(w) \sigma_{12}^* \end{aligned} \quad (4)$$

где E_k , ν_{ij} , ν — постоянные, $\nu_{21} E_2^{-1} = \nu_{21} E_1^{-1}$. Как видно, для такого материала нет необходимости в определении x , y , z .

Так как σ_{ij} (в x_i) приводимы к главным осям x_i' , то целесообразно начать исследование с самого простейшего случая — случая одноосного растяжения ($\sigma_{11}' \neq 0$) в x_i' . Пусть θ — угол между направлением волокон и осью x_1' (направлением растяжения). На фиг. 3 приведены (сплошные линии) данные растяжения образцов [2], вырезанных под углом $\theta = 15, 30, 45, 60^\circ$: σ_{11}' — напряжение растяжения; ε_{11}' и ε_{22}' — продольная и поперечная деформации. К сожалению, в [2] не изменена деформация сдвига ε_{12}' . Согласно известным формулам преобразования, в системе x_i имеем плоское напряженное состояние $\sigma_{11} = \sigma_{11}' \cos^2 \theta$, $\sigma_{22} = \sigma_{11}' \sin^2 \theta$, $\sigma_{12} = -0,5 \sigma_{11}' \sin 2\theta$, а в основные соотношения входит только одна функция $A(w)$, которая определяется по кривой сдвига (фиг. 2).



Фиг. 1



Фиг. 2

Путем разбиения процесса растяжения на мелкие шаги были проведены расчеты по соотношениям (4). Расчетные значения ϵ_{11}' и ϵ_{22}' отличались от экспериментальных тем больше (по величине), чем меньше θ и больше σ_{11}' (например, при $\theta=15^\circ$ и $\sigma_{11}'=22,5 \cdot 10^{-3}$ расчетное значение ϵ_{11}' превышало в два раза экспериментальную величину, а ϵ_{22}' — в четыре раза). Такого различия следовало ожидать, так как (4) является весьма сильным упрощением общих соотношений. Однако, дело в том, что в (4) учтены не все характерные особенности рассматриваемого класса сильно анизотропных тел (см. фиг. 1, 2).

Входящие в (4), как и в (1), материальные данные не учитывают взаимовлияние нормальных и касательных напряжений, так как они определены при одноосных испытаниях. Такое взаимовлияние тем существеннее, чем сильнее анизотропия. Действительно, рассмотрим равновесие изображенного на фиг. 4 малого плоского элемента в осях x_i (с единичными сторонами) при (макроскопически) однородном напряженном состоянии. Условия равновесия вдоль осей x_i выполнены, а равенство нулю момента сил (например, относительно точки O) дает

$$\begin{aligned} \sigma_{21} &= \sigma_{21}^* = \sigma_{12} - 2\epsilon_{12} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) & (\sigma_{11} - \sigma_{22} > 0) \\ \sigma_{12} &= \sigma_{12}^* = \sigma_{21} - 2\epsilon_{12} (\sigma_{22} - \sigma_{11}) & (\sigma_{11} - \sigma_{22} < 0) \end{aligned} \quad (5)$$

Для материала, имеющего большую податливость на сдвиг по сравнению с растяжением, второй член $2\epsilon_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{22})$ в (5) не будет пренебрежимо малым, если $|\sigma_{11} - \sigma_{22}| \gg |\sigma_{12}|$. Это неравенство выполняется при небольших значениях $\theta \leq 20^\circ$. Если же податливости на сдвиг и растяжения близки, то те же малые ϵ_{12} вызывают гораздо меньшую деформацию ϵ_{12} и второй член в (5) станет пренебрежимо малым. Таким образом, имеет место $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$ и это тем заметнее, чем сильнее анизотропия соответствующих свойств. В силу (5) при сложном напряженном состоянии сильно анизотропное тело не может быть линейно упругим даже при малых деформациях.

Заметим, что в теории конечных деформаций известно так называемое «универсальное соотношение» [3], напоминающее (5), где компоненты тензора напряжений Писколы для случая деформации чистого сдвига взаимосвязаны выражением $p^{21} = -p^{12} + 2\epsilon^{12}p^{11}$. Здесь же речь идет о малых деформациях (но деформациях сильно анизотропных тел). Поэтому следует сохранить симметричность σ_{ij} и правые части (5) вычислять по известным формулам преобразования, а эффект кажущейся несимметричности (5) учесть путем замены соотношений типа $\epsilon_{12} = F\sigma_{12}$ на $\epsilon_{12} = F\sigma_{12}^*$, поскольку величина сдвиговой деформации $\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$ уменьшается в силу наличия противомомента (1 рода), т. е. второго члена в (5).

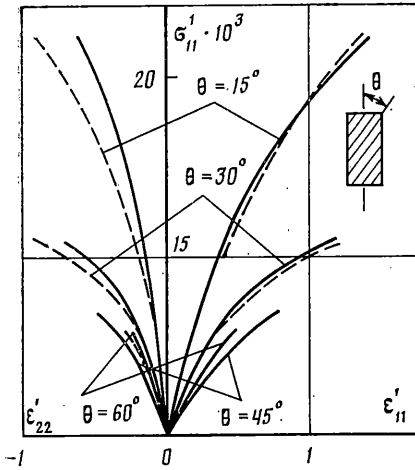
До сих пор структурные особенности материала не были использованы и поэтому (5) относится к любому анизотропному телу. Рассмотрим теперь влияние волокнистой структуры на примере простейшего случая однонаправленного композита.

Пусть σ_{11}^g — напряжение стекловолокна, σ_{11}^r — эпоксидной смолы, возникающие при растяжении композита вдоль волокон. Тогда

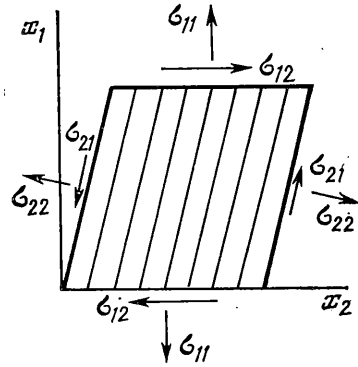
$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^g n + \sigma_{11}^r (1 - n) \quad (n = S^g/S) \quad (6)$$

где S , S^g — площади элемента композита и поперечного сечения всех волокон элемента ($\sigma_{11}^g > \sigma_{11} > \sigma_{11}^r$). Вообще говоря, σ_{11}^g и σ_{11}^r непостоянны даже в такой малой области, как сечение одного волокна и пространства между соседними волокнами. Но для дальнейшего неравномерность микронапряжений не играет существенной роли и можно принять σ_{11}^g и σ_{11}^r постоянными, что уже использовано в (6). Из (6) имеем $N = \sigma_{11} - \sigma_{11}^r = n(\sigma_{11}^g - \sigma_{11}^r)$. Это выражение определяет величину «избыточного» усилия в элементе композита, которое действует на группу несвязанных между собой волокон. Это усилие также создает противомомент (2 рода) $M = \gamma N$ при наличии искажения прямого угла $\gamma = 2\epsilon_{12}$ элемента, препятствующий этой же деформации ϵ_{12} . Поэтому вместо (5) должны иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^* &= \sigma_{12} - 2\epsilon_{12} (\sigma_{11} - \sigma_{22} + N) & (\sigma_{11} - \sigma_{22} > 0) \\ \sigma_{12}^* &= \sigma_{12} - 2\epsilon_{12} (\sigma_{22} - \sigma_{11} + N) & (\sigma_{11} - \sigma_{22} < 0) \end{aligned} \quad (7)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Пусть $\sigma_{11}^g = m\sigma_{11}^r$ ($m > 1$). Тогда из (6) имеем $\sigma_{11}^r = \sigma_{11} / [n(m-1) + 1]$. Поэтому $N = \sigma_{11} n(m-1) [n(m-1) + 1]^{-1}$.

Для рассматриваемого материала $n = 0,5$ [2]. Поэтому $N = \sigma_{11} (m-1) / (m+1)$. Величина m зависит, главным образом, от ϵ_{11} . Считая $\epsilon_{11}^g = \epsilon_{11}^r$, значение m можно определить по кривым растяжения волокон и смолы. В [2] таких данных нет. Но, например, согласно [4] $E^r = 0,3$ МПа, $E^g = 7,4$ и поэтому $\sigma_{11}^g / \sigma_{11}^r = E^g / E^r = 25$ (в упругой области). Функция $\psi = (m-1) / (m+1)$ быстро выходит на асимптоту $\psi = 1$ (например, при $m = 25$ имеем $\psi = 0,93$). В нелинейной области кривой растяжения смолы ψ еще быстрее стремится к 1. Таким образом, можно приближенно принять $N = \sigma_{11}$. Тогда вместо (7) имеем

$$\sigma_{12}^* = \sigma_{12} - 2\epsilon_{12}(2\sigma_{11} - \sigma_{22}) \quad (\sigma_{11} - \sigma_{22} > 0) \quad (8)$$

$$\sigma_{12}^* = \sigma_{12} - 2\epsilon_{12}\sigma_{22} \quad (\sigma_{11} - \sigma_{22} < 0)$$

Если материал однороден, то $m = 1$ и $N = 0$, т. е. вместо (8) будем иметь (5). При малом угле θ имеем $\sigma_{22} \approx 0$ и поэтому из сравнения (5) и (8) находим, что противомоменты 1 и 2 родов для рассматриваемого композита примерно равны по величине.

Согласно вышеизложенному вместо $\epsilon_{12}^* = A(\omega)\sigma_{12}^*$ в (4) примем $\epsilon_{12}^* = A\sigma_{12}^*$ и воспользуемся выражением (8). Тогда

$$\begin{aligned} \epsilon_{12}^* &= B[\sigma_{12}^* - 2\epsilon_{12}(2\sigma_{11}^* - \sigma_{22}^*)] \quad (\sigma_{11} - \sigma_{22} > 0) \\ \epsilon_{12}^* &= C(\sigma_{12}^* - 2\epsilon_{12}\sigma_{22}^*) \quad (\sigma_{11} - \sigma_{22} < 0) \end{aligned} \quad (9)$$

$$B = A[1 + 2A(2\sigma_{11} - \sigma_{22})]^{-1}, \quad C = A(1 + 2A\sigma_{22})^{-1}$$

После такой замены соотношения (4) будут иметь несимметричную матрицу коэффициентов. Однако, по изложенным ниже причинам, примем следующие соотношения с симметричной матрицей (случай плоского напряженного состояния):

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^* &= E_1^{-1}\sigma_{11}^* - \nu_{12}E_2^{-1}\sigma_{22}^* - 4B\epsilon_{12}\sigma_{12}^*, \quad \epsilon_{22}^* = -\nu_{21}E_1^{-1}\sigma_{11}^* + E_2^{-1}\sigma_{22}^* + 2B\epsilon_{12}\sigma_{12}^* \\ \epsilon_{33}^* &= -\nu_{21}E_1^{-1}\sigma_{11}^* - \nu E_2^{-1}\sigma_{22}^*, \quad \epsilon_{12}^* = B(-4\epsilon_{12}\sigma_{11}^* + 2\epsilon_{12}\sigma_{22}^* + \sigma_{12}^*) \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь использовано первое уравнение из (9). Если же $\sigma_{11} - \sigma_{22} < 0$, то следует воспользоваться вторым уравнением.

Переход к (10) обусловлен тем, что линейные (относительно скоростей) соотношения обычно имеют симметричную матрицу коэффициентов, допускающую применение известных теорем об единственности и так далее. К тому же соотношения с несимметричной матрицей не описывают (согласно результатам конкретного численного расчета), а соотношения (10) описывают следующий обнаруженный по данным растяжения при $\theta = 15^\circ$ поперечный эффект. При $\sigma_{11}' = \sigma'_{11\max} = 22,5 \cdot 10^{-3}$ МПа имеем (см. фиг. 3) $\epsilon_{11}' = 1,45\%$, $\epsilon_{22}' = -0,61\%$. Поэтому согласно формулам преобразования имеем

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{11}' \cos^2 \theta + \epsilon_{22}' \sin^2 \theta + \epsilon_{12}' \sin 2\theta = 1,312 + 0,5\epsilon_{12}', \quad \epsilon_{22} = -0,472 - 0,5\epsilon_{12}'$$

Поскольку ϵ_{12}' не измерена, то остается определить знак ϵ_{22} (деформации поперек волокон) оценочным путем. Так как $\sigma_{22} > 0$, то $\epsilon_{11} < E_1^{-1}\sigma_{11} = 22,5 \cos^2 15^\circ / 4265 = 0,492\%$. Поэтому $\epsilon_{12}' < -1,64\%$ и, следовательно, $\epsilon_{22} > 0$. Однако, в самом начале растяжения когда можно воспользоваться законом Гука, $\epsilon_{22} = -\nu_{21}E_1^{-1}\sigma_{11} + E_2^{-1}\sigma_{22} = -0,76 \cdot 10^{-4} \sigma_{11}' \%$ < 0 . Таким образом, вначале ϵ_{22} убывает ($\epsilon_{22} < 0$), а затем возрастает и переходит в положительную область ($\epsilon_{22} > 0$) при простом растяжении. Можно было и ожидать, что волокнистость структуры приведет к такому поперечному эффекту (что подтверждается и численными расчетами при $N = 0$, когда этот эффект также не описывается).

На фиг. 3 приведены штриховые кривые, определённые по соотношениям (10). Довольно хорошее их совпадение с экспериментальными кривыми подтверждает приемлемость (10) для описания монотонного нагружения малой кривизны рассматриваемого материала. Заметим, что указанные выше соотношения с несимметричной матрицей приводят почти к таким же теоретическим кривым, т. е. ϵ_{11}' и ϵ_{22}' оказываются приемлемыми, но за счёт изменения ϵ_{12}' получаются другие значения ϵ_{22} , не описывающие поперечный эффект.

Таким образом, более полное выделение особенностей данного класса материалов и их предварительный учет позволили ограничиться в соотношениях (10) одной материальной функцией только одного переменного. Обобщение (10) на случай трехосного растяжения, к которому приводятся любые σ_{ij} , не представляет большого труда и здесь не рассматривается. Только в этом случае появится еще одна функция одной переменной $A_1(w)$. Также нетрудно обобщить (10) на случай неоднаправленных композитов.

Несвойственная ортотропному телу структура соотношений (10) есть следствие выделения характерных особенностей сильно анизотропного тела. Для слабо анизотропных тел присутствие добавочных членов в (10) не помешает: их влияние автоматически станет малым и нет необходимости при численном расчете заранее пренебрегать ими. В общих же определяющих соотношениях такие особенности скрыты в оставляемых в неопределенном виде материальных функциях многих переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.; Л: Гостехиздат, 1948. 376 с.
2. *Atijima. S., Adachi T.* Nonlinear stress-strain response of laminated composites. J. Compos. Mater. 1979. V. 13. P. 206–218.
3. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
4. *Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Терерс Г. А.* Сопротивление полимерных и композиционных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 571 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.II.1987

УДК 624.072.4

Е. Д. ФОГИНИЧ

СВИВКА — КРАЙНЯЯ ФОРМА РАВНОВЕСИЯ ИЗОГНУТО-ЗАКРУЧЕННОГО СТЕРЖНЯ

Рассматривается так называемая свивка — простейшее, но типичное образование, характерное для нитей, шнуров, проводов и вообще стержневых систем с малой, но не исчезающей, жесткостью на изгиб и кручение.

В настоящей заметке определяются изгибающий и крутящий моменты, внутренние и контактные силы и угол свивки. Установлено, что определяющим параметром является отношение жесткости на изгиб к жесткости на кручение.

На некоторой длине L (фиг. 1) будем рассматривать свивку как однородное образование, состоящее из двух винтообразно искривленных жил, соприкасающихся по прямой $H-H$, которую будем называть осью свивки. За пределами отрезка L условия равномерного и плотного контакта между жилами нарушаются. Возникают зазоры и контактные сосредоточенные силы, расположение и величина которых зависят от размеров петли (справа) и от условий входа стержня в свивку (слева). В этом отношении свивка напоминает заключенный в трубу сжатый стержень (см. [1]).

Мысленно рассечем свивку плоскостью, перпендикулярной ее оси (фиг. 2) и введем систему самоуравновешенных моментов M_1, M_2 и сил Q_2 .

Так как к петле никаких внешних сил не приложено, то

$$M_1 = Q_2 R \quad (1)$$

где R — радиус поперечного сечения. Моменты M_1 и M_2 не являются ни крутящими, ни изгибающими, поскольку сечение перпендикулярно оси свивки, но не осям жил. Оси жил представляют собой две винтовые линии, расположенные на поверхности образующего цилиндра радиуса R (фиг. 3). На этом же рисунке показаны моменты M_1 и M_2 , сила Q_2 и усилия контактного взаимодействия q .

В двух произвольных точках винтовой линии O и A введем системы осей $1', 2', 3'$ и $1, 2, 3$ (фиг. 3). Оси 1 и $1'$ направлены вдоль оси свивки, оси $2, 2'$ — по касательной, а $3, 3'$ — соответственно по нормали к поверхности образующего цилиндра.

Так как точки O и A равноправны, составляющие моменты и силы для осей $1', 2', 3'$ должны быть такими же, что и для осей $1, 2, 3$:

$$Q_1' = 0, \quad Q_2' = Q_2, \quad Q_3' = 0 \quad (2)$$

$$M_1' = M_1, \quad M_2' = M_2, \quad M_3' = 0 \quad (3)$$