

УДК 533.6.011.72

В. А. АПАРИНОВ, М. И. НИШТ, Г. Н. СТРЕЛКОВ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАДЕНИЯ
В ЖИДКОСТИ ПЛАСТИНЫ БЕСКОНЕЧНОГО РАЗМАХА**

На основе совместного решения уравнений динамики и нелинейной нестационарной аэродинамики исследуется движение тонкой пластины бесконечного размаха при ее свободном падении в жидкой среде. Считается, что пластина имеет некоторую конечную массу. Рассматривается срывной режим обтекания с фиксированными местами отрыва потока на кромках пластины. Задача решается численно с анализом движения пластины и развития ее вихревого следа. Смоделирован выход падающей пластины на режим авторотации. Установлены причины его возникновения и выявлены основные закономерности.

Первое теоретическое исследование падения в воздухе продолговатых пластин выполнил Жуковский [1]. В [2] с помощью численного метода, связывающего уравнения движения с тремя степенями свободы и двумерные уравнения Навье-Стокса, рассмотрено падение авторотирующей пластины. В отличие от [2], в настоящей работе начальная скорость движения пластины не задается, а рассматривается ее падение из состояния покоя. При этом жидкость считается идеальной, а сопротивление трения при необходимости учитывается с помощью одного из известных подходов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую плоскую пластину бесконечного размаха с хордой b и условной массой m , которая в момент времени $t=0$ начинает двигаться в жидкости из состояния покоя под действием силы тяжести mg . При этом на острых кромках пластины происходит отрыв потока и образуются линии тангенциального разрыва скорости σ_1 и σ_2 (фиг. 1).

Введем две системы координат: неподвижную инерциальную $O_g x_g y_g z_g$ и подвижную связанную $Oxyz$, поместив точку O в центре масс пластины, направив ось Ox по хорде пластины к передней кромке, а ось Oz — по нормали к плоскости чертежа, вдоль условного размаха пластины (фиг. 1). Пусть в момент $t=0$ начала координат O_g и O совпадают, а начальная ориентация пластины относительно неподвижной системы координат определяется углом тангажа θ_0 . Текущее положение пластины определим координатами ее центра масс $x_{g0}(t)$, $y_{g0}(t)$ и углом тангажа $\theta(t)$.

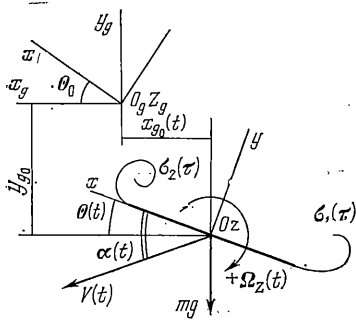
Уравнения динамики движения пластины в связанной системе координат имеют вид [3]:

$$\begin{aligned} mdV_x/dt &= -X + mV_y\Omega_z - mg \sin \theta \\ mdV_y/dt &= Y - mV_x\Omega_z - mg \cos \theta \\ J_z d\Omega_z/dt &= M_z \end{aligned} \tag{1.1}$$

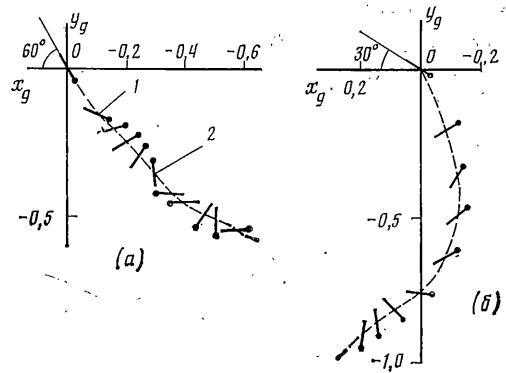
где Ω_z — угловая скорость вращения пластины, V_x и V_y — проекции вектора поступательной скорости пластины на оси связанной системы координат, X и Y — продольная и нормальная аэродинамические силы, M_z — аэродинамический момент тангажа, J_z — момент инерции пластины относительно оси Oz .

Определив с помощью системы уравнений (1.1) в различные моменты времени неизвестные величины V_x , V_y и Ω_z , можно рассчитать траекторию движения пластины и закон изменения угла тангажа:

$$\begin{aligned} dx_{g0}/dt &= V_x \cos \theta - V_y \sin \theta \\ dy_{g0}/dt &= V_x \sin \theta + V_y \cos \theta, \quad d\theta/dt = \Omega_z \end{aligned} \tag{1.2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Для решения системы уравнений (1.1) необходимо в каждый расчетный момент времени знать величины аэродинамических сил и момента, действующих на пластину. Так как пластина плоская, то продольная сила X обуславливается лишь трением пластины о жидкость ($X=X_t$). Нормальная же сила Y и момент M_z (в принятой системе координат), в свою очередь, обуславливаются только перепадом давления на пластине.

2. Расчет аэродинамической нагрузки. Для определения величин Y и M_z применим аппарат нелинейной нестационарной теории тонкой несущей поверхности. При этом рассмотрим двумерное течение идеальной жидкости и используем известные теоретические положения [4].

Введем безразмерные линейную и угловую скорости движения пластины, а также безразмерное время (V — мгновенное значение скорости движения): $w=W/V$, $\omega_z=\Omega_z b/V$, $\tau=tV/b$. Заменяем пластину суммарным нестационарным вихревым слоем с безразмерной интенсивностью $\gamma(\tau, x)$, а линии тангенциального разрыва скорости σ_1 и σ_2 — свободными вихревыми слоями с безразмерной интенсивностью $\delta_1(s)$ и $\delta_2(s)$ соответственно (x и s — точки на пластине и линиях σ , определяемые безразмерными координатами в долях величины b). Считаем, что везде вне пластины и ее вихревого следа поток является потенциальным, а на бесконечном удалении от них — покоится. При переходе через σ_1 и σ_2 соблюдается условие непрерывности давления и нормальной составляющей скорости. На кромках пластины выполняются условия гипотезы Чаплыгина — Жуковского о конечности скоростей.

Тогда, на основании [5, 6], для рассматриваемого случая можно записать в безразмерном виде расчетную систему уравнений нелинейной нестационарной аэродинамики (в связанной системе координат, фиг. 1):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\gamma(\tau, x) dx}{x_a - x} + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \int_0^\tau v_y [x_a, 0, x_i(\tau, s), y_i(\tau, s)] \times \delta_i(s) \frac{dl_i}{ds} ds = -\sin \alpha(\tau) + \omega_z(\tau) x_a \quad (2.1)$$

$$\int_0^1 \gamma(\tau, x) dx + \sum_{i=1}^2 \int_0^\tau \delta_i(s) \frac{dl_i}{ds} ds = 0$$

Здесь a — рассматриваемая точка на поверхности пластины, i — номер свободного вихревого слоя, α — угол атаки пластины, определяемый в каждый момент времени из соотношения $\alpha = \arctg(-V_x/V_y)$, а величины v_y и dl_i определяются по следующим формулам:

$$v_y(x_a, y_a, x, y) = (x_a - x) [(x_a - x)^2 + (y_a - y)^2]^{-1} \quad (2.2)$$

$$dl_i = \{ [x_{is}'(\tau, s)]^2 + [y_{is}'(\tau, s)]^2 \}^{1/2} ds \quad (2.3)$$

Первое из уравнений системы (2.1) — сингулярное интегральное уравнение, представляющее собой граничное условие о непротекании пластины, второе — условие теоремы Томсона о постоянстве циркуляции скорости по жидкому контуру, охватывающему пластину и ее вихревой след.

Входящее в выражение (2.3) множество точек $\{[x_i(\tau, s), y_i(\tau, s)], 0 \leq s \leq \tau\}$ представляет собой кривую расположения i свободного вихревого слоя в момент τ . Координаты любой точки этой кривой, начавшей двигаться от кромки пластины в момент r , $0 \leq r \leq \tau$, в данный момент безразмерного времени τ определяются из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i(\tau, r)}{\partial \tau} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 v_x[x_i(\tau, r), y_i(\tau, r), x, 0] \times \\ &\times \gamma(\tau, x) dx - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \int_0^\tau v_x[x_i(\tau, r), y_i(\tau, r), x_i(\tau, s), y_i(\tau, s)] \times \\ &\times \delta_i(s) \frac{dl_i}{ds} ds - \cos \alpha(\tau) + \omega_z(\tau) y_i(\tau, r) \quad (2.4) \\ \frac{\partial y_i(\tau, r)}{\partial \tau} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 v_y[x_i(\tau, r), y_i(\tau, r), x, 0] \gamma(\tau, x) dx + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \int_0^\tau v_y[x_i(\tau, r), y_i(\tau, r), x_i(\tau, s), y_i(\tau, s)] \delta_i(s) \frac{dl_i}{ds} ds + \\ &+ \sin \alpha(\tau) - \omega_z(\tau) x_i(\tau, r) \end{aligned}$$

Здесь безразмерная функция v_y вычисляется по формуле (2.2), а v_x — следующим образом:

$$v_x(x_a, y_a, x, y) = (y_a - y) [(x_a - x)^2 + (y_a - y)^2]^{-1} \quad (2.5)$$

Кривая $\{[x_i(r_0, r), y_i(r_0, r)] \mid r \leq r_0 \leq \tau\}$ является траекторией, которую прошла точка i свободного вихревого слоя, сошедшая в момент r с соответствующей кромки пластины, к расчетному моменту τ .

Таким образом, задача об определении нормальной аэродинамической нагрузки, действующей на пластину, сводится к решению системы уравнений (2.1) относительно неизвестной интенсивности $\gamma(\tau, x)$ суммарного вихревого слоя с учетом развития свободных вихревых слоев, определяемого уравнениями (2.4). Тогда, по найденным значениям $\gamma(\tau, x)$ в каждый расчетный момент времени с помощью интеграла Коши — Лагранжа можно определить нестационарное нагружение пластины [4].

3. Математическая модель. Полная математическая модель динамики падения в идеальной жидкости пластины при ее отрывном обтекании описывается системой интегродифференциальных уравнений (1.1), (1.2), (2.1) и (2.4). Как видно из этих уравнений, существует сложная взаимосвязь входящих в них параметров. Движение пластины зависит от действующей на нее аэродинамической нагрузки, которая сама зависит от движения пластины и от развивающегося вихревого следа, на который, в свою очередь, влияет характер движения пластины.

В [7] на примере моделирования вынужденных колебаний в потоке пластины бесконечного размаха на упругой подвеске показано, что при наличии существенных нелинейных эффектов, связанных со срывным режимом обтекания кромок пластины, указанную взаимосвязь разрывать нельзя и моделировать вынужденные колебания необходимо путем совместного решения систем уравнений динамики движения и нелинейной нестационарной аэродинамики. Практически это осуществляется последовательным решением этих уравнений шаг за шагом по времени.

В настоящей работе при совместном рассмотрении уравнений (1.1), (1.2), (2.1) и (2.4) моделируется сложный динамический процесс движения самой пластины и возмущенной ею окружающей среды.

Решение системы уравнений (2.1) с учетом (2.4) осуществляется численно, с помощью метода дискретных вихрей [4]. При этом сингулярные интегральные уравнения (2.1) сводятся к системе простых линейных алгебраических уравнений [6]. Интегрирование дифференциальных уравнений динамики (1.1) и (1.2) проводится методом Рунге — Кутты с временным шагом Δt , который связан с интервалом безразмерного времени $\Delta \tau$ решения задачи аэродинамики следующим образом $\Delta t = \Delta \tau b / V$. При последовательном решении уравнений динамики движения и аэродинамики осуществляется на каждом шаге переход от размерных величин к безразмерным и наоборот.

4. Учет силы трения. При решении конкретного примера можно внести количественные поправки на силу трения, например, по приближенной методике, основанной на эмпирических данных [8]. В тех случаях, когда число Рейнольдса не превышает величины $Re = 10^6$, коэффициент одностороннего трения плоской пластины c_f можно определить по формуле [8]:

$$c_f = 0,072 Re^{-1/5} \quad (4.1)$$

Для определения местного значения числа Re в различных точках на поверхности пластины, последняя разбивается на N участков, в серединах которых в процессе решения задачи методом дискретных вихрей вычисляется безразмерная касательная скорость w_x . Эта скорость является скоростью на суммарном вихревом слое, моделирующем пластину. Тогда безразмерные касательные скорости в точке j на верхней w_{xj+} и нижней w_{xj-} поверхностях пластины определяются следующим образом:

$$w_{xj+} = w_{xj} + 1/2 \gamma(\tau, x_j), \quad w_{xj-} = w_{xj} - 1/2 \gamma(\tau, x_j)$$

Переходя от безразмерных скоростей w_{xj+} и w_{xj-} к размерным W_{xj+} и W_{xj-} , можно на каждом расчетном шаге для точки j определить число Re на верхней и нижней поверхностях пластины и, следовательно, по (4.1) рассчитать c_{fj} :

$$Re_{j+} = W_{xj+} L_j / \nu, \quad Re_{j-} = W_{xj-} L_j / \nu$$

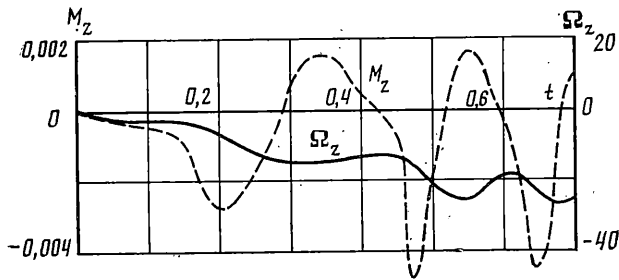
Здесь ν — кинематический коэффициент вязкости, L_j — характерный линейный размер (расстояние от наветренной кромки пластины до конца рассматриваемого участка j).

Наконец, полная сила трения определяется суммированием всех элементарных сил трения на верхней и нижней поверхностях пластины:

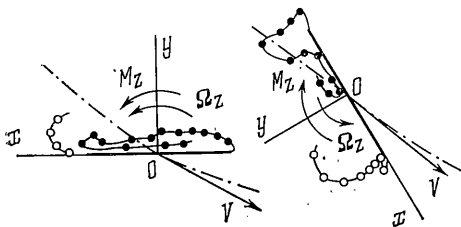
$$X_t = \sum_{j=1}^N c_{fj+} \frac{\rho W_{j+}^2 b}{2N} + \sum_{j=1}^N c_{fj-} \frac{\rho W_{j-}^2 b}{2N}$$

5. Результаты исследования. Моделировалось падение в воздухе тонкой изотропной пластины бесконечного размаха с условной массой $m = 0,025$ кг и с хордой $b = 0,1$ м при начальных значениях угла тангажа в диапазоне $30^\circ \leq \theta_0 \leq 80^\circ$. В результате проведенных исследований установлено следующее. Независимо от значения θ_0 падение пластины завершается выходом на режим авторотации. При этом направление вращения пластины зависит от величины θ_0 . Установлено, что значение θ_0 , при котором происходит изменение направления вращения при авторотации, соответствует примерно 35° . Причем при $|\theta_0| \leq 35^\circ$ выход пластины на режим авторотации может произойти после нескольких ее колебаний по тангажу. Падение пластины с авторотацией приводит к горизонтальному смещению при $\Omega_z > 0$ влево, а при $\Omega_z < 0$ — вправо с углом наклона траектории примерно в 45° , что соответствует выводам [1].

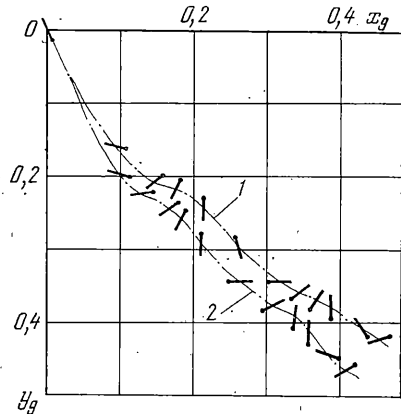
В качестве примера на фиг. 2а, б показаны рассчитанные траектории падения пластины при $\theta_0 = 60^\circ$ и 30° соответственно и ее положения в



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

отдельные моменты времени (точкой помечена задняя кромка пластины). Видно, что при $\theta_0=60^\circ$ пластина сразу выходит на режим авторотации с $\Omega_z < 0$ (фиг. 2, а), а при $\theta_0=30^\circ$ сначала вращается против часовой стрелки, а затем изменяет направление вращения и авторотирует с $\Omega_z > 0$ (фиг. 2, б). Изменение направления вращения пластины сопровождается изменением направления горизонтального смещения траектории ее падения (фиг. 2, б).

Проанализируем механизм возникновения авторотации на примере падения пластины с $\theta_0=60^\circ$. На фиг. 3 для этого случая приведены зависимости от времени угловой скорости вращения Ω_z (c^{-1}) и момента тангажа M_z (Нм), а на фиг. 4 показана пластина в двух положениях, соответствующих точкам 1 и 2 (фиг. 2, а) с элементами траектории падения и с ближним вихревым следом (светлыми кружками на фиг. 4 показаны свободные дискретные вихри, сходящие с передней кромки пластины, а темными ∇ с задней кромки).

В положении 1 (фиг. 4; $t=0,244$ с) пластина обтекается при положительном угле атаки $\alpha=127,5^\circ$ с образованием в результате отрыва потока на задней кромке интенсивного вихря и, как следствие, дополнительного разрежения на верхней поверхности ее кормовой части. При этом появляется отрицательный аэродинамический момент, под действием которого до $t=0,275$ с происходит увеличение угловой скорости вращения пластины (фиг. 3). После того как, двигаясь по траектории, пластина начинает падать передней кромкой вперед (положение 2 на фиг. 4; $t=0,409$ с), кормовой вихрь разрушается, и образуется разрежение на верхней поверхности носовой части. Появляется положительный момент тангажа, который стремится уменьшить по абсолютной величине угловую скорость (фиг. 3). Изменения общего направления вращения пластины при этом не происходит, так как продолжительность действия этого положительного момента (0,105 с) и его абсолютная величина меньше, чем ранее действующего отрицательного момента (0,275 с), и, кроме того, сказывается инерционность вращающейся пластины. Затем, в течение некоторого времени, пластина обтекается под отрицательным углом атаки и разрежение образу-

ется на нижней поверхности ее носовой части. Это приводит к дальнейшему увеличению абсолютной величины угловой скорости вращения (фиг. 3). При этом момент тангажа периодически меняет знак на положительный, что приводит к периодическому уменьшению угловой скорости вращения по абсолютной величине (фиг. 3). В целом же при рассмотренных начальных условиях (m , b , θ_0) время действия отрицательного момента тангажа больше и величина его больше, чем положительного, поэтому пластина и выходит на режим авторотации с вращением против часовой стрелки и с колебаниями угловой скорости относительно некоторого установившегося значения.

Изменение во времени поступательной скорости движения пластины при этом, как и всех других кинематических параметров, носит также колебательный характер.

6. Сравнение с экспериментальными данными. Для проверки достоверности получаемых с помощью математического моделирования результатов проводилось их сравнение с результатами специально проведенного физического эксперимента. Для этого исследовалось падение в воздухе пластины, изготовленной из тонкого картона с хордой 0,082 м, размахом 0,187 м и имеющей массу 0,00258 кг. Эксперимент проводился в закрытом помещении при атмосферном давлении 99 кПа и температуре 22° С (плотность воздуха при этом $\rho=1,169$ кг/м³). Перед падением пластина фиксировалась с $\theta_0=65^\circ$. Процесс падения регистрировался с помощью кинокамеры со скоростью съемки 32 кадра/с. В расчетах рассматривалась пластина бесконечного размаха, но при вычислении аэродинамических сил за расчетную бралась площадь исследуемой в физическом эксперименте пластины.

На фиг. 5 (расстояние — в м) приведены траектории падения указанной пластины, полученные в расчете (кривая 1) и в физическом эксперименте (кривая 2). Здесь же показаны положения пластины на различных участках траектории. Точкой отмечена задняя кромка пластины. Совпадение результатов численного и физического экспериментов удовлетворительное. Наблюдаемое отличие можно объяснить конечностью удлинения пластины в эксперименте и, следовательно, влиянием концевых эффектов обтекания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский Н. Е. О падении в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси. // Полн. собр. соч., М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР. 1937. Т. 5. С. 100–115.
2. Gallarvay C. R., Hankey W. L. Free-falling autorotating plate.— a coupled fluid and flight mechanics problem «J. Aircraft», 1985, 22, № 11.
3. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Аэродинамика самолета: Динамика продольного и бокового движения. М.: Машиностроение, 1979. 349 с.
4. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978, 351 с.
5. Апаринов В. А., Лифанов И. К. Особенности математической модели отрывного обтекания тонкого профиля. // Авиация и воздухоплавание. М.: ИИЕТ СССР, 1981. С. 39–44.
6. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.
7. Апаринов В. А., Морозов В. И. Нелинейные колебания тонкого профиля в нестационарном потоке при отрывном и безотрывном обтекании. // Взаимодействие оболочек с жидкостью. Казань: АН СССР, Каз. Филиал, 1981. Вып. 14. С. 170–176.
8. Самойлович Г. С. Гидроаэромеханика. М.: Машиностроение, 1980. 280 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.VI.1987