

УДК 539.3

В. Д. КОНДАКОВ

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КРУГОВЫХ КОЛЕЦ
ПОСТОЯННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Выводятся формулы собственных частот круговых колец постоянного поперечного сечения, одна из главных центральных осей которого образует заданный угол с плоскостью кольца. Считается, что геометрия колец отвечает условиям применимости механики тонких криволинейных стержней. Известные формулы собственных частот замкнутых круговых стержней постоянного поперечного сечения, одна из главных центральных осей которого лежит в плоскости кольца [1-3], являются частными случаями полученных формул. Рассмотренная задача представляет практический интерес, например, при исследовании вибраций однорядных конических роликоподшипников [4].

1. Расчетная схема ненагруженных круговых колец постоянного поперечного сечения представлена на фиг. 1, где ψ — заданный угол, образуемый с плоскостью кольца одной из главных центральных осей его поперечного сечения, R — радиус осевой линии, проходящей через центры тяжести сечений, τ — орт касательной к осевой линии, φ — центральный угол сечения. Уравнения свободных колебаний (без диссипации) рассматриваемых колец в линейной постановке с учетом отсутствия их естественной закрученности могут быть представлены аналогично [3] с помощью локальных производных и вектора кручения и кривизны κ [5] в виде

$$\begin{aligned} \rho F \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 &= R^{-1} \partial \mathbf{N} / \partial \varphi + \kappa \times \mathbf{N} \\ \rho J \partial^2 \theta / \partial t^2 &= R^{-1} \partial \mathbf{M} / \partial \varphi + \kappa \times \mathbf{M} + \tau \times \mathbf{N} \\ \mathbf{M} &= A (R^{-1} \partial \theta / \partial \varphi + \kappa \times \theta) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$R^{-1} \partial \mathbf{u} / \partial \varphi + \kappa \times \mathbf{u} = \theta \times \tau + (EF)^{-1} \mathbf{N} \cdot \tau \tau$$

где

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

$$\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3), \quad \mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$$

векторы смещения оси, поворота сечения, внутренних сил и моментов соответственно, F — площадь поперечного сечения, ρ — плотность материала, J — диагональная матрица полярного и главных моментов инерции поперечного сечения, A — диагональная матрица жесткостей кольца при кручении и изгибе

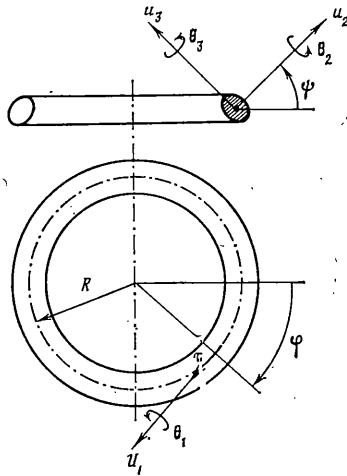
$$J = \begin{vmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} GJ_1 & 0 & 0 \\ 0 & EJ_2 & 0 \\ 0 & 0 & EJ_3 \end{vmatrix}$$

где E и G — модули упругости первого и второго рода. Компоненты вектора кручения и кривизны, которые могут, например, быть найдены через вектор Дарбу [5] имеют вид

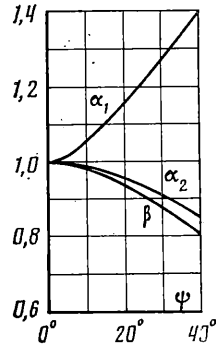
$$\kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = -R^{-1} \sin \psi, \quad \kappa_3 = -R^{-1} \cos \psi$$

Разделение переменных системы (1.1) по методу Фурье

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\varphi, t) &= \mathbf{u}(\varphi) e^{i\omega t}, & \theta(\varphi, t) &= \theta(\varphi) e^{i\omega t} \\ \mathbf{N}(\varphi, t) &= \mathbf{N}(\varphi) e^{i\omega t}, & \mathbf{M}(\varphi, t) &= \mathbf{M}(\varphi) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (1.2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

приводит к системе линейных однородных дифференциальных уравнений относительно функций (все они зависят только от φ): $u_1, u_2, u_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3, N_1, N_2, N_3, M_1, M_2, M_3$, определяющих собственные формы колебаний, которая имеет вид (где штрих означает производную по φ):

$$\rho FR\omega^2 u_1 + N_1' + N_2 \cos \psi - N_3 \sin \psi = 0 \quad (1.3)$$

$$\rho FR\omega^2 u_2 + N_2' - N_1 \cos \psi = 0, \quad \rho FR\omega^2 u_3 + N_3' + N_1 \sin \psi = 0$$

$$\rho J_1 R\omega^2 \theta_1 + M_1' + M_2 \cos \psi - M_3 \sin \psi = 0 \quad (1.4)$$

$$\rho J_2 R\omega^2 \theta_2 + M_2' - M_1 \cos \psi - R N_3 = 0$$

$$\rho J_3 R\omega^2 \theta_3 + M_3' + M_1 \sin \psi + R N_2 = 0$$

$$\theta_1' + \theta_2 \cos \psi - \theta_3 \sin \psi - R(GJ_1)^{-1} M_1 = 0 \quad (1.5)$$

$$\theta_2' - \theta_1 \cos \psi - R(EJ_2)^{-1} M_2 = 0, \quad \theta_3' + \theta_1 \sin \psi - R(EJ_3)^{-1} M_3 = 0$$

$$u_1' + u_2 \cos \psi - u_3 \sin \psi - R(EF)^{-1} N_1 = 0 \quad (1.6)$$

$$u_2' - u_1 \cos \psi - R\theta_3 = 0, \quad u_3' + u_1 \sin \psi + R\theta_2 = 0$$

Учитывая, что в силу замкнутости колец, граничные условия сводятся к условиям периодичности [2], с учетом структуры уравнений системы (1.3)–(1.6) можно найти собственные формы колебаний в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10} \sin k\varphi, & \theta_1 &= \theta_{10} \cos k\varphi, & u_2 &= u_{20} \cos k\varphi \\ \theta_2 &= \theta_{20} \sin k\varphi, & u_3 &= u_{30} \cos k\varphi, & \theta_3 &= \theta_{30} \sin k\varphi \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$N_1 = N_{10} \cos k\varphi, \quad M_1 = M_{10} \sin k\varphi$$

$$N_2 = N_{20} \sin k\varphi, \quad M_2 = M_{20} \cos k\varphi$$

$$N_3 = N_{30} \sin k\varphi, \quad M_3 = M_{30} \cos k\varphi$$

или

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10}^* \cos k\varphi, & \theta_1 &= \theta_{10}^* \sin k\varphi, & u_2 &= u_{20}^* \sin k\varphi \\ \theta_2 &= \theta_{20}^* \cos k\varphi, & u_3 &= u_{30}^* \sin k\varphi, & \theta_3 &= \theta_{30}^* \cos k\varphi \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$N_1 = N_{10}^* \sin k\varphi, \quad M_1 = M_{10}^* \cos k\varphi, \quad N_2 = N_{20}^* \cos k\varphi$$

$$M_2 = M_{20}^* \sin k\varphi, \quad N_3 = N_{30}^* \cos k\varphi, \quad M_3 = M_{30}^* \sin k\varphi$$

где $k=0, 1, 2, \dots$ — номер соответствующей формы или собственной частоты. Необходимо заметить, что при $k=0$ соотношениями (1.7) и (1.8) определяются осесимметричные формы колебаний типа форм Хоппе и Бессета [3].

Подстановка в систему (1.3) — (1.6) соотношений (1.7) или (1.8) при $k \neq 0$ приводит к линейной однородной алгебраической системе, условие существования ненулевого решения которой — искомое уравнение для собственных частот изгибных колебаний колец в виде

$$\det D = 0, \quad D = \|d_{i,j}\| \quad (i, j = 1, \dots, 12) \quad (1.9)$$

где ненулевые коэффициенты равны

$$\begin{aligned} d_{1,1} &= \rho FR \omega^2, & d_{1,7} &= k, & d_{1,8} &= \cos \psi, & d_{1,9} &= -\sin \psi \\ d_{2,2} &= \rho FR \omega^2, & d_{2,7} &= -\cos \psi, & d_{2,8} &= -k \\ d_{3,3} &= \rho FR \omega^2, & d_{3,7} &= \sin \psi, & d_{3,9} &= -k \\ d_{4,4} &= \rho J_1 R \omega^2, & d_{4,10} &= -k, & d_{4,11} &= \cos \psi, & d_{4,12} &= -\sin \psi \\ d_{5,5} &= \rho J_2 R \omega^2, & d_{5,9} &= -R, & d_{5,10} &= -\cos \psi, & d_{5,11} &= k \\ d_{6,6} &= \rho J_3 R \omega^2, & d_{6,8} &= R, & d_{6,10} &= \sin \psi, & d_{6,12} &= k \\ d_{7,4} &= -k, & d_{7,5} &= -\cos \psi, & d_{7,6} &= \sin \psi, & d_{7,10} &= R/(GJ_1) \\ d_{8,4} &= \cos \psi, & d_{8,5} &= k, & d_{8,11} &= R/(EJ_2) \\ d_{9,4} &= -\sin \psi, & d_{9,6} &= k, & d_{9,12} &= R/(EJ_3) \\ d_{10,1} &= k, & d_{10,2} &= -\cos \psi, & d_{10,3} &= \sin \psi, & d_{10,7} &= R/(EF) \\ d_{11,1} &= -\cos \psi, & d_{11,2} &= k, & d_{11,6} &= -R \\ d_{12,1} &= \sin \psi, & d_{12,3} &= k, & d_{12,5} &= R \end{aligned}$$

2. Раскрывая определитель (1.9) можно показать, что данное соотношение представляет собой уравнение четвертой степени относительно квадрата собственной частоты. Если пренебречь или инерцией вращения сечения колец во втором соотношении (1.1) или изменением длины их осевой линии в четвертом соотношении (1.1), то степень соответствующих уравнений вида (1.9) уменьшится на единицу. Во всех этих случаях для решения уравнения (1.9) можно использовать численные методы.

Если пренебречь и инерцией вращения сечения колец и изменением длины их осевой линии, что соответствует условиям, при которых получены для случая $\psi=0$ аналитические решения Хоппе и Мичела [3]:

$$\omega_{1k}^2 = k^2(k^2-1)^2(k^2+1)^{-1}EJ_3(\rho FR^4)^{-1} \quad (2.1)$$

$$\omega_{2k}^2 = k^2(k^2-1)^2[k^2GJ_1(EJ_2)^{-1}+1]^{-1}GJ_1(\rho FR^4)^{-1}$$

то соответствующее соотношение вида (1.9) сводится к квадратному уравнению относительно ω^2 , корни которого дают искомые выражения для собственных частот в виде

$$\begin{aligned} \omega_{1k}^2 &= k^2(k^2-1)(k^2+1)^{-1}\{ (k^2-1)[\cos^2 \psi + (J_2/J_3)\sin^2 \psi] + \\ &+ 2(J_2/J_3-1)^2 \cos^2 \psi \sin^2 \psi [k^2GJ_1(EJ_3)^{-1} + \\ &+ (J_2/J_3)\cos^2 \psi + \sin^2 \psi]^{-1} \} EJ_3(\rho FR^4)^{-1} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \omega_{2k}^2 &= k^2(k^2-1)\{ (k^2-1)GJ_1(EJ_2)^{-1}[\cos^2 \psi + \\ &+ (J_3/J_2)\sin^2 \psi] - (1-J_3/J_2)^2 \cos^2 \psi \sin^2 \psi \} \times \\ &\times [k^2GJ_1(EJ_2)^{-1} + \cos^2 \psi + (J_3/J_2)\sin^2 \psi]^{-1} EJ_2(\rho FR^4)^{-1} \end{aligned}$$

Формулы (2.1) являются частными случаями (2.2), которые соответствуют условиям $\psi=0$ или $\psi=\pi/2$ (при $\psi=\pi/2$ у главных моментов инерции поперечного сечения колец в (2.1) необходимо переставить индексы).

3. Подстановка в (1.3)–(1.6) осесимметричных форм колебаний вида (1.7) при $k=0$ приводит в силу распадающейся системы к двум линейным однородным алгебраическим системам из трех уравнений каждая, условие существования ненулевого решения которых (при учете и инерции вращения сечения колец и изменения длины их осевой линии) дает искомые выражения для собственных частот в виде

$$\begin{aligned}\omega_0^2 &= E(\rho R^2)^{-1}(J_2 \cos^2 \psi + J_3 \sin^2 \psi) / J_1 \\ \omega_0^2 &= E(\rho R^2)^{-1}\end{aligned}\quad (3.1)$$

Соотношения (3.1) полезно сравнить с аналогичными результатами Бессета и Хоппе, полученными для случая $\psi=0$:

$$\omega_0^2 = E(\rho R^2)^{-1} J_2 / J_1, \quad \omega_0^2 = E(\rho R^2)^{-1} \quad (3.2)$$

Подстановка осесимметричных форм вида (1.8) при $k=0$ дает только нулевые собственные частоты, что соответствует движению кольца как абсолютно твердого тела.

Получим собственные частоты изгибных колебаний круговых колец для случая $\psi=0$, в которых учитывается влияние инерции вращения сечения колец и изменение длины их осевой линии. Подстановка с этой целью собственных форм (1.7) или (1.8) при $k \neq 0$ в систему (1.3)–(1.6) при $\psi=0$ приводит к двум несвязанным линейным однородным алгебраическим системам из шести уравнений каждая, условие существования нулевого решения которых дает два квадратных уравнения относительно ω^2 .

Искомые формулы собственных частот имеют следующий вид: колебания в плоскости колец

$$\begin{aligned}\omega_{1k}^2 &= k^2(k^2-1)^2 [k^2+1+(2k^4- \\ &-k^2+1)J_3(FR^2)^{-1}] EJ_3(\rho FR^4)^{-1} \\ \omega_{2k}^2 &= [k^2+1+(2k^4-k^2+1)J_3(FR^2)^{-1}] \times \\ &\times [1+(k^2+1)J_3(FR^2)^{-1}] E(\rho R^2)^{-1} - \\ &- k^2(k^2-1)^2 [k^2+1+(2k^4-k^2+1)J_3(FR^2)^{-1}]^{-1} EJ_3(\rho FR^4)^{-1}\end{aligned}\quad (3.3)$$

колебания по нормали к плоскости колец

$$\begin{aligned}\omega_{1k}^2 &= k^2(k^2-1)^2 \{ [k^2 GJ_1(EJ_2)^{-1}+1] [k^2 J_2(FR^2)^{-1}+1] + \\ &+ k^2 J_1(FR^2)^{-1} [k^2+GJ_1(EJ_2)^{-1}] \}^{-1} GJ_1(\rho FR^4)^{-1} \\ \omega_{2k}^2 &= \{ k^2 GJ_1(EJ_2)^{-1}+1+k^2 J_1(FR^2)^{-1} [k^2+ \\ &+GJ_1(EJ_2)^{-1}] [k^2 J_2(FR^2)^{-1}+1]^{-1} \} EJ_2(\rho FR^2)^{-1} - \\ &- k^2(k^2-1)^2 \{ [k^2 GJ_1(EJ_2)^{-1}+1] [k^2 J_2(FR^2)^{-1}+1] + \\ &+ k^2 J_1(FR^2)^{-1} [k^2+GJ_1(EJ_2)^{-1}] \}^{-1} GJ_1(\rho FR^4)^{-1}\end{aligned}\quad (3.4)$$

Необходимо заметить, что соотношения (3.3), (3.4) справедливы с точностью до величин второго порядка относительно малых параметров прямопропорциональных $J_2/(FR^2)$ или $J_3/(FR^2)$.

В качестве иллюстрации полученных аналитических результатов рассматривается зависимость от угла ψ отношения значений собственных частот найденных при $k=2$ по (2.2) и (3.1) соответственно к (2.1) и (3.2) — α_1 , α_2 , β . Собственные частоты по (2.2) и (3.1) определяются для колец, сечение которых представляет прямоугольную трапецию с высотой равной $2a$ и нижним и верхним основаниями соответственно равными $a-\Delta$ и $a+\Delta$ при изменении Δ от нуля до a (угол ψ при этом изменяется от нуля до 45°), а по (2.1) и (3.2) — для колец прямоугольного сечения ($\Delta=0$) радиуса R , т. е. в расчете учитывается и условие неизменности массы колец. Зависимости $\alpha_1(\psi)$, $\alpha_2(\psi)$, $\beta(\psi)$, представленные на фиг. 2, позволяют сделать вывод о том, что только изменением конфигурации поперечного сечения кольца при прочих неизменных условиях можно добиться существенного увеличения одних и уменьшения других его собственных частот.

Отличие значений собственных частот найденных при $k=2,3$ и $R=15a$ по (3.3), (3.4) от найденных соответственно по (2.1) не превышает 2%, что указывает на относительно слабое влияние инерции вращения сечения колец и изменения длины их осевой линии на значения собственных частот.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ананьев И. Е.* Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем. М.: Гостехиздат, 1946. 223 с.
2. *Бидерман В. Л.* Теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1980. 408 с.
3. *Грудев И. Д.* Колебания тонких криволинейных стержней // Вибрации в технике. Т. 3. Колебания машин, конструкций и их элементов/Под ред. Ф. М. Диментберга и К. С. Колесникова. М.: Машиностроение, 1980. С. 18–36.
4. *Кондаков В. Д., Постников О. К., Шульга П. М.* Вопросы промышленного контроля шумности однорядных конических роликоподшипников // Динамические методы испытаний и диагностирования машин-автоматов и автоматических линий. М.: Наука, 1981. С. 102–110.
5. *Светлицкий В. А.* Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1978. 222 с.

Волгоград

Поступила в редакцию
23.II.1987