МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1989

УДК 539.3

И. Г. ТЕРЕГУЛОВ

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ И ВОЛОКНИСТО КОМПОЗИТНЫХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

В [1] на основе термодинамического анализа получена общая форма определяющих соотношений для анизотропных и композитных оболочек при неупругих конечных деформациях в предположении, что работа внутренних напряжений на приращениях необратимой части деформации рассеивается в виде тепла. Это предположение базируется на экспериментальных данных [2], в которых показано, что работа, затраченная на пластическое деформирование, не менее чем на 90% переходит в тепло. В настоящей статье дается построение общей теории определяющих соотношений с асимптотическим их анализом и классификацией форм их представлений для различных соотношений жесткостных характеристик и при различных степенях точности представления этих соотношений. В частном случае они совпадают с известными [3]. Приводится описание пути возможного экспериментального отыскания зависящих от инвариантов деформированного состояния функций, входящих в определяющие соотношения. Обзор литературы по рассматриваемой проблеме дан в [1].

1. Пусть F — свободная энергия в единице массы среды оболочки, ρ_* — плотность в деформированном состоянии, x^i — лагранжевы координаты с координатными векторами $\mathbf{r}_i=\partial\mathbf{r}/\partial x^i$ в недеформированном и $\mathbf{r}_i^*=\partial\mathbf{r}^*/\partial x^i$ — в деформированном состояниях, $\mathbf{r}^*=\mathbf{r}+\mathbf{u}$, $\mathbf{u}$ — вектор перемещения

$$\boldsymbol{\Sigma}=\sigma^{ik}\mathbf{r}_i^*\mathbf{r}_k^*=\sigma_i^{\cdot k}\mathbf{r}_*^i\mathbf{r}_k^*=\sigma_{ik}\mathbf{r}_*^i\mathbf{r}_*^k$$

$$\sigma_{ik}=\sigma_{ki}$$

$$\mathbf{E}=\varepsilon_{ik}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^k=\varepsilon_k^{\cdot i}\mathbf{r}_i\mathbf{r}^k=\varepsilon^{ik}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_k$$

$$\varepsilon_{ik}=\varepsilon_{ki}$$

$\boldsymbol{\Sigma}$ — тензор напряжения Коши, заданный составляющими в базисе $\mathbf{r}_i^*$, $\mathbf{E}$ — тензор деформации Грина, заданный составляющими в базисе $\mathbf{r}_i$. Базисы $\mathbf{r}_*^i$, $\mathbf{r}^i$ — взаимны к базисам $\mathbf{r}_i^*$ и $\mathbf{r}_i$, соответственно, $g_{ik}^*=(\mathbf{r}_i^*\mathbf{r}_k^*)$, $g_{ik}=(\mathbf{r}_i\mathbf{r}_k)$, s — энтропия в единице массы, T — абсолютная температура, p — плотность внутренних источников тепла в единице массы, $\mathbf{q}=q_i^*\mathbf{r}_*^i=q^i\mathbf{r}_i$ — вектор потока тепла, $\delta q_j^{(i)}$ — j-я часть тепла, образующегося внутри системы за счет перехода механической энергии в тепловую. Согласно первого и второго принципов термодинамики имеем [1]:

$$\rho_*\,dF=\sigma^{ik}\,d\varepsilon_{ik}-\rho_* s\,dT-\sum_j\delta q_j^{(i)}$$

$$T\rho_*\,ds=\left[p\rho_*-\frac{\rho_*}{\rho}\nabla_i\left(\frac{\rho}{\rho_*}q_*^{\,i}\right)\right]dt+\sum_j{}'\delta q_j^{(i)} \tag{1.1}$$

Пусть при этом

$$\sum_j\delta q_j^{(i)}=\sum_j\sigma^{mn}\delta\check{\varepsilon}_{mn(j)},\qquad \sigma^{mn}\delta\check{\varepsilon}_{mn(j)}\geqslant 0 \tag{1.2}$$

где $\delta\check{\varepsilon}_{mn(j)}$ — j-я часть деформации, за счет которой образуется тепло δq. В силу (1.2) это необратимая часть деформации. В частности, при $\delta\check{\varepsilon}_{mk(1)}=\delta\varepsilon_{mk(p)}$, $\delta\check{\varepsilon}_{mk(2)}=\delta\varepsilon_{mk(c)}$; где $\delta\varepsilon_{mk(p)}$ — пластическая деформация,

$\delta\varepsilon_{mk(c)}$ — деформация ползучести, из (1.2) и (1.1) имеем обобщение [1] формул Грина в виде

$$\sigma^{ik}=\rho_*\partial F/\partial e_{ik} \tag{1.3}$$

где $\delta e_{ik}=d\varepsilon_{ik}-\delta\varepsilon_{ik(p)}-\delta\varepsilon_{ik(c)}$ — мгновенная упругая (обратимая в бесконечно малом) часть деформации. Второе из уравнений (1.1) доставляет уравнение распространения тепла, и, соответственно, уравнения связанной термомеханики неупругих (необратимых) процессов.

Введем в рассмотрение заданный в базисе $\mathbf{r}_i$ тензор $T=t^{ik}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_k=t_i{}^{\cdot k}\mathbf{r}^i\mathbf{r}_k=$ $=t_{ik}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^k$, контравариантные составляющие которого определяются равенствами $\rho_*t^{ik}=\sigma^{ik}$, $t^{ik}=t^{ki}$. Очевидно, что

$$\sigma_{ik}=\rho_*t^{pq}g_{pi}{}^*g_{qk}{}^*,\quad \sigma_i{}^{\cdot k}=\rho_*t^{pk}g_{pi}{}^*$$

Определяющие соотношения для тонких анизотропных оболочек должны иметь вид [1]:

$$\rho t^{\alpha\beta}=A_1(g^{\alpha\beta}+\Lambda^{\alpha\beta})+2A_2(e^{\alpha\beta}-{}^1/_2g^{\alpha\beta}e^\gamma{}_{\gamma\cdot}-{}^1/_2\Lambda^{\alpha\beta}\Lambda^{\rho\gamma}e_{\rho\gamma})+$$
$$+A_3(g^{\alpha\beta}-\Lambda^{\alpha\beta})\quad(\alpha,\beta,\ldots=1,2) \tag{1.4}$$

что следует из (1.3) при $e_{\alpha3}=0$, а также условия $\sigma^{33}=\rho_*\partial F/\partial e_{33}=0$, принимаемого для тонких оболочек (гипотезы Кирхгофа). Здесь $t^{\alpha\beta}$ — контравариантные составляющие тензора условных напряжений, отнесенных к начальному недеформированному базису $\mathbf{r}_\alpha$ ($\alpha=1$, 2) лагранжевых координат x^α на поверхности S_z, равноудаленной от срединной поверхности S_0 на расстояние $z=x^3$ при $g_{33}=1$; $g_{3\alpha}=0$ — составляющие метрического тензора на поверхности S_z. Тензор $\mathbf{\Lambda}=\Lambda^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\alpha\mathbf{r}_\beta$ удовлетворяет условию $\Lambda^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}=0$.

Параметры A_1, A_2, A_3 — функции инвариантов по отношению к преобразованиям координат x^α на S_z [1]:

$$I_1=e^{\cdot}{}_\alpha{}^\alpha+\Lambda^{\alpha\beta}e_{\alpha\beta},\quad I_3=e_\alpha{}^{\cdot\alpha}-\Lambda^{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}$$
$$I_2=e_{\alpha\beta}e^{\alpha\beta}-{}^1/_2(e_\alpha{}^{\cdot\alpha})^2-{}^1/_2(\Lambda^{\alpha\beta}e_{\alpha\beta})^2 \tag{1.5}$$
$$A_1=\rho\partial F/\partial I_1,\quad A_2=\rho\partial F/\partial I_2,\quad A_3=\rho\partial F/\partial I_3$$

2. Рассмотрим однонаправленно армированный слой композита, ось Ox^1 которого совместим с направлением армирования, Ox^2 направим ортогонально Ox^1 в плоскости слоя, а Ox^3 ($x^3=z$) так, чтобы система координат $Ox^1x^2x^3$ имела правую ориентацию. В этой системе до деформации локально считаем $g_{11}{}^\circ=g_{22}{}^\circ=g_{33}{}^\circ=1$, $g_{12}{}^\circ=g_{23}{}^\circ=g_{31}{}^\circ=0$, $\Lambda_{11}{}^\circ=-\Lambda_{22}{}^\circ=1$, $\Lambda_{12}{}^\circ=$ $=0$. Наряду с системой Ox^α введем ортогональную систему координат $O\xi^\alpha$, для которой (локально) $g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$, $g_{12}=g_{23}=g_{31}=0$. Если $O\xi^1$ составляет угол φ с осью Ox^1 и $d\varphi>0$ при повороте вокруг оси Ox^3 против хода часовой стрелки, то в системе $O\xi^\alpha$: $\Lambda_{11}=-\Lambda_{22}=\cos 2\varphi$, $\Lambda_{12}=\sin 2\varphi$ и соотношения (1.4), (1.5) примут вид

$$\rho t_{11}=2A_1\cos^2\varphi+2A_3\sin^2\varphi+2A_2[(e_{11}-e_{22})\sin 2\varphi-2e_{12}\cos 2\varphi]\sin 2\varphi$$
$$\rho t_{22}=2A_1\sin^2\varphi+2A_3\cos^2\varphi-2A_2[(e_{11}-e_{22})\sin 2\varphi-2e_{12}\cos 2\varphi]\sin 2\varphi, \tag{2.1}$$
$$\rho t_{12}=(A_1-A_3)\sin 2\varphi-A_2[(e_{11}-e_{22})\sin 2\varphi-2e_{12}\cos 2\varphi]\cos 2\varphi$$

$$I_1=2(e_{11}\cos^2\varphi+e_{22}\sin^2\varphi+e_{12}\sin 2\varphi) \tag{2.2}$$
$$I_3=2(e_{11}\sin^2\varphi+e_{22}\cos^2\varphi-e_{12}\sin 2\varphi)$$
$$2I_2=[(e_{11}-e_{22})\sin 2\varphi-2e_{12}\cos 2\varphi]^2$$

В случае совпадения осей $O\xi^\alpha$ и Ox^α имеем

$$I_1=2e_{11}{}^\circ,\quad I_3=2e_{22}{}^\circ,\quad I_2=2(e_{12}{}^\circ)^2$$
$$\rho t_{11}{}^\circ=2A_1,\quad \rho t_{22}{}^\circ=2A_3,\quad \rho t_{12}{}^\circ=2A_2e_{12}{}^\circ$$

Если обозначим $t_{11}{}^\circ=t_1$, $t_{22}{}^\circ=t_2$, $t_{12}{}^\circ=t_3$, $e_{11}{}^\circ=e_1$, $e_{22}{}^\circ=e_2$, $2e_{12}{}^\circ=e_3$, то согласно (1.3) $t_i=\partial F/\partial e_i$. Так как $\delta e_{\alpha\beta}$ — приращение упругих деформаций, то им соответствуют приращения напряжений $\delta t^{\alpha\beta}=A^{\alpha\beta\rho\gamma}\delta e_{\rho\gamma}$ такие, что

$$\delta t^{\alpha\beta}\delta e_{\alpha\beta}=A^{\alpha\beta\rho\gamma}\delta e_{\rho\gamma}\delta e_{\alpha\beta}=\sum_{i,j=1}^{3} D_{ij}\delta e_i\delta e_j\geqslant 0$$

$$\delta t_i=\sum_{j=1}^{3} D_{ij}\delta e_j, \qquad D_{ij}=\partial^2 F/\partial e_i\partial e_j \tag{2.3}$$

Следовательно, матрица коэффициентов D_{ij}, будучи симметричной, порождает неотрицательную квадратичную форму. Обозначим $D_{11}=C_1$, $D_{22}=C_2$, $D_{33}=C_3$, $D_{12}=m_{12}C_1, \ldots$, где C_1 имеет порядок модуля упругости E_1 в направлении армирования, C_2 — порядок модуля E_2, $C_3\sim G_{12}$, m_{ij} — аналоги коэффициентов Пуассона. Таким образом

$$\|D_{ij}\|=\left\|\begin{matrix} C_1 & m_{12}C_1 & m_{13}C_1 \\ m_{21}C_2 & C_2 & m_{23}C_2 \\ m_{31}C_3 & m_{32}C_3 & C_3 \end{matrix}\right\|$$

В силу симметрии $D_{ij}=D_{ji}$ имеем $m_{ik}C_i=m_{ki}C_k$ (не суммировать), а в силу условия (2.3) коэффициенты матрицы $\|D_{ij}\|$ подчинены условиям

$$C_1>0,\ C_2>0,\ C_3>0,\ m_{12}m_{21}<1,\ m_{13}m_{31}<1,\ m_{23}m_{32}<1 \tag{2.4}$$

Обозначим $E_2/E_1=\eta^2\leqslant 1$, $G_{12}/E_2=\varkappa^2\leqslant 1$. В силу условий (2.4) имеет место соотношение порядков

$$\|D_{ij}\|\sim E_1\left\|\begin{matrix} 1 & \eta & \varkappa\eta \\ \eta & \eta^2 & \varkappa\eta^2 \\ \varkappa\eta & \varkappa\eta^2 & \varkappa^2\eta^2 \end{matrix}\right\| \tag{2.5}$$

Например, из условий $m_{12}m_{21}<1$, $m_{12}C_1=m_{21}C_2$ следует, что $m_{12}\lesssim\eta$. Так как

$$D_{ij}=\partial t_i/\partial e_j=\partial t_j/\partial e_i \tag{2.6}$$

то из соотношения порядков (2.5) следует, что, например, $\partial t_1/\partial e_1$ в асимптотическом разложении начинается с членов, содержащих η и $\varkappa$ в нулевой степени, $\partial t_1/\partial e_2$ начинается с членов, содержащих η в первой степени, $\partial t_1/\partial e_3$ начинается с членов, содержащих произведение первых степеней η и $\varkappa$:

$$t_1=\varphi_{00}(e_1)+\eta\varphi_{10}(e_1, e_2)+\eta\varkappa\varphi_{11}(e, e_2, e_3, \eta, \varkappa) \tag{2.7}$$

Здесь φ_{11} в асимптотическом разложении по степеням η и $\varkappa$ начинается с членов, содержащих η и $\varkappa$ в нулевых степенях:

$$\varphi_{11}=\sum_{k,m=0}^{\infty}\varphi_{11km}\eta^k\varkappa^m$$

Аналогично

$$\begin{aligned} t_2&=\eta\psi_{10}(e_1)+\eta^2\psi_{20}(e_1, e_2)+\eta^2\varkappa\psi_{21}(e_1, e_2, e_3, \eta, \varkappa) \\ t_3&=\eta\varkappa\chi_{11}(e_1)+\eta^2\varkappa\chi_{21}(e_1, e_2)+\eta^2\varkappa^2\chi_{22}(e_1, e_2, e_3, \eta, \varkappa) \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\psi_{21}=\sum_{k,m=0}^{\infty}\psi_{21km}\eta^k\varkappa^m, \qquad \chi_{22}=\sum_{k,m=0}^{\infty}\chi_{22km}\eta^k\varkappa^m$$

На выбор вида функций φ_{ik}, ψ_{ik}, χ_{ik} накладывает ограничение условие (2.6).

3. Введем в рассмотрение единый малый параметр ε так, что $\eta=\varepsilon^m$, $\varkappa=\varepsilon^n$, $0<\varepsilon\leqslant 1$ и дадим классификацию по *типам* (m, n, l), где l — число членов, удерживаемых в ряду для t_1.

Тип (∞, n, l). Асимптотика $\eta\to 0$ дает лишь один член $t_1=\varphi_{00}(e_1)$ или

$t_1=B_{11}(e_1)e_1$, что соответствует нитяной модели однонаправленно армированного слоя. В этом случае $A_1=A_{11}(I_1)I_1$, $A_2=0$, $A_3=0$, а соотношения (1.4) примут вид $t_{\alpha\beta}=A_{11}(I_1)I_1(g_{\alpha\beta}+\Lambda_{\alpha\beta})$.

Тип (m, ∞, l). Асимптотика $\varkappa\to 0$ дает

$$t_1=\varphi_{00}(e_1)+\eta\varphi_{10}(e_1, e_2)$$
$$t_2=\eta\psi_{10}(e_1)+\eta^2\psi_{20}(e_1, e_2), \quad t_{12}=0 \tag{3.1}$$

Эти соотношения при выполнении условий (2.6) или

$$\partial\varphi_{10}/\partial e_2=d\psi_{10}/de_1, \ \partial\psi_{20}/\partial e_1=0$$

описывают поведение перекрестно армированного с мгновенными модулями E_1 и E_2 композита с нулевой жесткостью на сдвиг. Из (3.1) следует, что $\psi_{20}=\psi_{20}(e_2)$, $\psi_{10}(e_1, e_2)=\psi_{10}'(e_1)e_2+\varphi_{10}^{\circ}(e_1)$.

Таким образом, в этом случае

$$t_1=B_{11}(e_1)e_1+B_{12}(e_1)e_2$$
$$t_2=B_{21}(e_1)e_1+B_{22}(e_2)e_2, \quad t_3=0 \tag{3.2}$$

при условии $B_{12}(e_1)=d[e_1B_{21}(e_1)]/de_1$.

Тип $(m, \infty, 1)$. Если в рядах (2.7) ограничиться первым членом в разложении для t_1, то отсюда следует, что $\psi_{10}=0$ и соотношения (3.2) приводятся к виду

$$t_1=B_{11}(e_1)e_1, \quad t_2=B_2(e_2)e_2, \quad t_3=0 \tag{3.3}$$

Таким образом, соотношения (1.4) примут вид

$$\rho t_{\alpha\beta}=[A_{11}(I_1)I_1+A_{13}(I_1)I_3](g_{\alpha\beta}+\Lambda_{\alpha\beta})+$$
$$+[A_{31}(I_1)I_1+A_{33}(I_3)I_3](g_{\alpha\beta}-\Lambda_{\alpha\beta}) \tag{3.4}$$
$$A_{13}(I_1)=d[A_{31}(I_1)I_1]/dI_1$$

в случае, соответствующем (3.2), а в случае, соответствующем соотношениям (3.3) получим упрощение соотношений (3.4):

$$\rho t_{\alpha\beta}=A_{11}(I_1)I_1(g_{\alpha\beta}+\Lambda_{\alpha\beta})+A_{33}(I_3)I_3(g_{\alpha\beta}-\Lambda_{\alpha\beta})$$

Эти соотношения соответствуют нитяной модели перекрестно армированного композита с нулевой жесткостью на сдвиг (ткани).

Тип $(1, 1, 3)$. Примем, что $\eta\sim\varkappa$. Такой случай представляет стеклопластик, для которого $E_1\simeq 46\,000$ МПа, $E_2\simeq 18\,000$ МПа, $G_{12}\simeq 4500$ МПа. Для принятой точности получим

$$t_1=\varphi_0(e_1)+\eta\varphi_1(e_1, e_2)+\eta^2\varphi_2(e_1, e_2, e_3)$$
$$t_2=\eta\psi_1(e_1)+\eta^2\psi_2(e_1, e_2)+\eta^3\psi_3(e_1, e_2, e_3) \tag{3.5}$$
$$t_3=\eta^2\chi_2(e_1)+\eta^3\chi_3(e_1, e_2)+\eta^4\chi_4(e_1, e_2, e_3)$$

Из условий (2.6) следуют ограничения $\partial\psi_3/\partial e_1=0$, $\partial\chi_4/\partial e_1=0$, $\partial\chi_3/\partial e_1=0$, $\partial\chi_4/\partial e_2=0$, откуда следует

$$\psi_3=\psi_3(e_2, e_3), \ \chi_3=\chi_3(e_2), \ \chi_4=\chi_4(e_3) \tag{3.6}$$

Так как при $e_{12}=0$ в ортотропном материале e_{11} и e_{22} не могут вызвать отличные от нуля t_{12}, то $\chi_2=0$, $\chi_3=0$. Тогда из условий (2.6) следует

$$\partial\varphi_1(e_1, e_2)/\partial e_2=\partial\psi(e_1)/\partial e_1, \quad \partial\varphi_2(e_1, e_2, e_3)/\partial e_2=\partial\psi_2/\partial e_1$$
$$\partial\varphi_2(e_1, e_2, e_3)/\partial e_3=\partial\chi_2/\partial e_1, \quad \partial\psi_3(e_1, e_2, e_3)/\partial e_3=\partial\chi_3/\partial e_2$$

С учетом (3.6) получим

$$\varphi_1(e_1, e_2)=e_2 d\psi_1(e_1)/de_1+\varphi_{11}(e_1), \quad \varphi_2=\varphi_2(e_1, e_2)$$
$$\psi_3=\psi_3(e_2), \ \partial\varphi_2(e_1, e_2)/\partial e_2=\partial\psi_2(e_1, e_2)/\partial e_1 \tag{3.7}$$

Таким образом

$$t_1=\varphi_0(e_1)+\eta[e_2 d\psi_1(e_1)/de_1+\varphi_{11}(e_1)]+\eta^2\varphi_2(e_1, e_2)$$

$$t_2=\eta\psi_1(e_1)+\eta^2\psi_2(e_1, e_2)+\eta^3\psi_3(e_2),\quad t_3=\eta^4\chi_4(e_3)$$

чему соответствуют

$$A_1=A_{11}(I_1, I_3)I_1+A_{13}(I_1, I_3)I_3 \tag{3.8}$$

$$A_3=A_{31}(I_1, I_3)I_1+A_{33}(I_1, I_3)I_3,\quad A_2=A_2(I_2)$$

Тип (*1, 1, 2*). Ограничиваясь в разложении (3.5) для t_1 первыми двумя членами ряда, согласно (3.7) получим $\psi_2=\psi_2(e_2)$. Таким образом, в этом случае

$$A_1=A_{11}(I_1)I_1+A_{13}(I_1)I_3 \tag{3.9}$$

$$A_3=A_{31}(I_1)I_1+A_{33}(I_3)I_3,\quad A_2=A_2(I_2)$$

Тип (*1, 1, 1*). Если в разложении для t_1 ограничиться точностью, соответствующей сохранению первого члена ряда, то

$$A_1=A_{11}(I_1)I_1,\quad A_3=A_{33}(I_3)I_3,\quad A_2=A_2(I_2) \tag{3.10}$$

Последний случай соответствует предложенной в [3] форме определяющих соотношений.

Тип (*1, 0, 3*). Если модуль сдвига G_{12} одного порядка с модулем E_2 в направлении поперек армирования, то $\varkappa\sim 1$, что соответствует слабому наполнению арматурой. В этом случае представления (2.7), (2.8) примут вид

$$t_1=\varphi_0(e_1)+\eta\varphi_1(e_1, e_2, e_3),\quad t_2=\eta\psi_1(e_1)+\eta^2\psi_2(e_1, e_2, e_3),$$

$$t_3=\eta^1\chi_2(e_1)+\eta^2\chi_3(e_1, e_2, e_3)$$

Обращаясь к условиям (2.6) и поступая аналогично рассмотрению *типа* (*1, 1, 3*), получим

$$t_1=\varphi_0(e_1)+\eta[e_2 d\psi_1(e_1)/de_1+\varphi_{11}(e_1)]$$

$$t_2=\eta\psi_1(e_1)+\eta^2\psi_2(e_2, e_3),\quad t_3=\eta^2\chi_3(e_2, e_3)$$

чему соответствуют

$$A_1=A_{11}(I_1)I_1+A_{13}(I_1)I_3$$

$$A_3=A_{31}(I_1)I_1+A_{33}(I_2, I_3)I_3,\quad A_2=A_2(I_2, I_3)$$

Тип (*1, 0, 1*). Если в разложении (2.7) для t_1 ограничиться первым членом ряда, то получим

$$A_1=A_{11}(I_1),\quad A_3=A_{33}(I_2, I_3),\quad A_2=A_2(I_2, I_3)$$

Дальнейшие упрощения может подсказать лишь эксперимент. Случай (1, 0, 1) при $A_{13}=A_{31}$ совпадает с рассмотренным в [1].

Тип (*1, 2, 3*). Рассмотрим случай $\varkappa\sim\eta^2$, когда жесткость на сдвиг мала. Аналогично предыдущим случаям получим

$$\begin{aligned} &A_1=A_{11}(I_1)I_1+[A_{13}^{(1)}(I_1)+A_{13}^{(3)}(I_3)]I_3 \\ &A_3=A_{31}(I_1)I_1+A_{33}(I_3)I_3,\quad A_2=A_2(I_2) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Последующие упрощения приводят к соотношениям вида (3.9) и (3.10). Для *типов* (*m, n, l*), сводящихся к соотношениям вида (3.8) — (3.10), (3.11) характерно то, что $A_2=A_2(I_2)$. Во всех случаях должно соблюдаться условие (2.6), которое сокращает число функций A_{ik}, подлежащих определению.

4. При экспериментальном отыскании функций A_i для ленты целесообразно экспериментировать на цилиндрических образцах, изготовленных намоткой с углами намотки $\varphi_k=\pm\varphi$ по отношению к направляющей цилиндра и симметричной укладкой слоев по толщине, обеспечивающей

при растяжении вдоль оси и при внутреннем давлении безмоментность напряженного состояния. Такая структура при деформировании образца без кручения ($e_{12}=0$) обеспечивает независимость инвариантов I_1, I_2, I_3 от номера слоя и, следовательно, независимость от номера слоя значений функций A_i. Таким образом, из (2.1) следует, что

$$
\begin{aligned}
T_{11} &= \int_{-h}^{h} \rho t_{11}\, dz = 4h(A_1 \cos^2\varphi + A_3 \sin^2\varphi) + 2hA_2(e_{11}-e_{22})\sin^2 2\varphi \\
T_{22} &= \int_{-h}^{h} \rho t_{22}\, dz = 4h(A_1 \sin^2\varphi + A_3 \cos^2\varphi) - 2hA_2(e_{11}-e_{22})\sin^2 2\varphi
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

где ось $O\xi_1$ совмещена с образующей цилиндра, а $O\xi_2$ — с направляющей, $2h$ — толщина до деформации. При $\varphi=45°$ из (4.1) следует

$$2A_2h(e_{22}-e_{11}) = T_{22}-T_{11} \tag{4.2}$$

тогда как при $\varphi \neq 45°$:

$$
\begin{aligned}
&4hA_1 \cos 2\varphi = T_{11}\cos^2\varphi - T_{22}\sin^2\varphi - 2hA_2(e_{11}-e_{22})\sin^2 2\varphi \\
&4hA_3 \sin 2\varphi = -T_{11}\sin^2\varphi + T_{22}\cos^2\varphi + 2hA_2(e_{11}-e_{22})\sin^2 2\varphi
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Соотношение (4.2) дает возможность из эксперимента определить функцию A_2 и затем соотношения (4.3) дают возможность определить функции A_1, A_3. Приведенный в п. 3 асимптотический анализ и классификация видов соотношений дают возможность рациональной аппроксимации экспериментальных данных.

Если цилиндр растянут силой P и подвержен внутреннему давлению q, то составляющие истинных напряжений σ_{11}^* и σ_{22}^* (осевое и окружное напряжения) есть

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11}^* = Q/(4\pi R_* h_*), \quad \sigma_{22}^* = qR_*/2h_* \\
&Q = P + \pi R_*^2 q, \quad R_* = R(1+\Delta_2), \; h_* = h(1+\Delta_3)
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

где R, $2h$ — радиус и толщина цилиндра до деформации, R_*, $2h_*$ — после деформации, Δ_1, Δ_2 — относительные продольное и окружное удлинения. Связь между P, q, R, h, $T_{\alpha\beta}$ устанавливается из уравнения

$$\iint_S \left[\mathbf{p}_*\left(\frac{a_*}{a}\right)^{1/2} - \rho t^{ik}\left(\mathbf{r}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i}\right) n_k\right] \delta\mathbf{u}\, dS \tag{4.5}$$

которое следует из вариационного принципа Лагранжа при выполнении уравнений равновесия. Здесь $\mathbf{p}_*$ — вектор напряжения на граничном срезе, $(a_*/a)^{1/2}$ — величина, равная отношению деформированной площадки к ее первоначальному размеру, $\mathbf{n}=n^k\mathbf{r}_k$ — орт нормали к граничному срезу. Осуществляя сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной его оси, получим $p_*=\sigma_{11}^*$, $n_1=1$, $n_2=0$, $n_3=0$ и из (4.5) следует

$$\sigma_{11}^*(1+\Delta_2)(1+\Delta_3) - \rho t^{11}(1+\Delta_1) = 0 \tag{4.6}$$

Если взять сечение $n_1=0$, $n_2=1$, $n_3=0$, то

$$\sigma_{22}^*(1+\Delta_1)(1+\Delta_3) - \rho t^{22}(1+\Delta_2) = 0 \tag{4.7}$$

Здесь для конечных деформаций

$$(1+\Delta_1)^2 = 1+2\varepsilon_{11}, \quad (1+\Delta_2)^2 = 1+2\varepsilon_{22}, \quad (1+\Delta_3)^2 = 1+2\varepsilon_{33}$$

Подставив в (4.6), (4.7) значения σ_{11}^*, σ_{22}^* из (4.4), получим

$$
\begin{aligned}
&T_{11} = P(2\pi R)^{-1}(1+\Delta_1)^{-1} + {}^1/_2 qR(1+\Delta_2)(1+\Delta_1)^{-1} \\
&T_{22} = qR(1+\Delta_1)
\end{aligned}
$$

Таким образом, T_{11} и T_{22} определяются через замеряемые в эксперименте величины P, q, R, Δ_1, Δ_2.

Особенность проведения эксперимента при наличии необратимых деформаций, на приращениях которых работа внутренних напряжений рассеивается в виде тепла, состоит в следующем. Избирается некоторый путь нагружения по параметрам P и q. По достижении некоторого их значения $P_{(i)}$, $q_{(i)}$ при полной деформации $\varepsilon_{11(i)}$, $\varepsilon_{22(i)}$, замеряемой через $\Delta_{1(i)}$, $\Delta_{2(i)}$ из этого состояния производится разгрузка на $\delta P_{(i)}$, $\delta q_{(i)}$ и замеряются величины $\delta e_{11(i)}$, $\delta e_{22(i)}$, как $1+2\delta e_{11(i)}=(1+\delta\overset{(-)}{\Delta}_{1(i)})^2$, $1+2\delta e_{22(i)}=(1+\delta\overset{(-)}{\Delta}_{2(i)})^2$.

Здесь $\delta\overset{(-)}{\Delta}_{1(i)}$, $\delta\overset{(-)}{\Delta}_{2(i)}$ – относительные удлинения при разгрузке. Значения $\delta\varepsilon_{11(i)}$, $\delta\varepsilon_{22(i)}$ при этом замеряются как приращения при переходе от состояния $P_{(i-1)}$, $q_{(i-1)}$ к состоянию $P_{(i)}$, $q_{(i)}$, для которого $P_{(i-1)}=P_{(i-1)}-\delta P_{(i)}$, $q_{(i)}=q_{(i)}-\delta q_{(i)}$. Т. е. $\delta\varepsilon_{11(i)}$, $\delta\varepsilon_{22(i)}$ находятся из равенств $1+2\delta\varepsilon_{11(i)}=(1+\delta\overset{(+)}{\Delta}_{1(i)})^2$, $1+2\delta\varepsilon_{22(i)}=1+$ $+\delta\overset{(+)}{\Delta}_{2(i)})^2$, где $\delta\overset{(+)}{\Delta}_{1(i)}$, $\delta\overset{(+)}{\Delta}_{2(i)}$ – приращения относительных удлинений на пути нагружения из состояния $(i-1)$ к состоянию (i). В итоге находятся $\delta\check{\varepsilon}_{11(i)}=\delta\varepsilon_{11(i)}-$ $-\delta e_{11(i)}$, $\delta\check{\varepsilon}_{22(i)}=\delta\varepsilon_{22(i)}-\delta e_{22(i)}$, определяющие величину приращений необратимой части деформации. Полные значения $e_{11(i)}$, $e_{22(i)}$ находятся как суммы приращений на пути нагружения до состояния (i):

$$e_{11(i)}=\sum_{j=1}^{i}\delta e_{11(j)},\quad e_{22(i)}=\sum_{j=1}^{i}\delta e_{22(j)}$$

Именно эти величины являются (через инварианты I_k) аргументами функций $A_i(I_k)$. Что касается построения определяющих соотношений для величин $\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\vee}$, то о возможных путях их построения сказано в [1]. Величины $e_{\alpha\beta}$ при наличии $\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\vee}$ в общем случае не есть обратимая упругая деформация, тогда как бесконечно малая часть $\delta e_{\alpha\beta}$ этой деформации обратима.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Терегулов И. Г.* Определяющие соотношения для физически нелинейных анизотропных и композитных оболочек при конечных деформациях // Изв. ВУЗов. Математика. Ч. I, № 5. 1985. С. 33–41; Ч. 2, 1985. № 6, С. 54–62.
2. *Farren W. S., Taylor G. I.* The heat developed during plastic extension of metals // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1925. V. 107. No 743. P. 422–451.
3. *Образцов И. Ф., Васильев В. В.* Нелинейные феноменологические модели деформирования волокнистых композитных материалов // Механика композит. материалов, 1982. № 3. С. 390–393.

Казань

Поступила в редакцию
10.IV.1987