

УДК 539.3

В. Ф. ИВАНОВА, Б. Н. СОКОЛОВ

**ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЕ ПОЛОГОЙ МЯГКОЙ
ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ОБОЛОЧКИ**

Рассматривается полая абсолютно гибкая симметрично нагруженная оболочка вращения с закрепленным краем. Предполагается, что приложенные силы обусловлены оттяжками, сходящимися к одной точке на оси симметрии. Растягивающие усилия равномерно распределены по кольцам, плоскость которых перпендикулярна оси симметрии. Требуется выбором растягивающих усилий и линий их приложения придать заданной недеформированной оболочке форму, наименее в среднеквадратичном отличающуюся от требуемой, например, от параболоида вращения. На выбор параметров наложено условие отсутствия складок и морщин на деформированной поверхности. Рассмотрен также вопрос о выборе начальной формы оболочки.

Для класса оболочек вращения, недеформированная образующая которых является ломаной, выписаны конечные алгебраические соотношения, определяющие оболочку, которая под действием растягивающих усилий приближается к оптимальной. Для расчетов использовалась геометрически нелинейная теория пологих оболочек [1, 2]. Вопросы выбора оптимальных распределенных сил с целью придания слабоискривленной пластинке требуемой формы рассматривались ранее в [3].

1. Оптимизация поверхности при заданной начальной форме. Рассматривается абсолютно гибкая оболочка вращения, нагруженная симметрично относительно оси вращения. Предполагается, что деформирующие оболочку силы обусловлены оттяжками, сходящимися к одной точке на оси симметрии. Растягивающие усилия равномерно распределены по кольцам. Плоскость колец перпендикулярна оси симметрии, которую обозначим через Oz . В силу симметрии оболочки и действующих сил достаточно рассмотреть ее деформацию в плоскости, проходящей через ось симметрии. Введем в этой плоскости систему координат Oxz . Внешнюю нормаль оболочки будем считать направленной в сторону оси Oz . Пусть r_1 и r_2 — главные радиусы кривизны недеформированной оболочки. Рассмотрим хорду, соединяющую две точки на поверхности оболочки. Радиус кривизны в плоскости сечения, проходящей через хорду, будем считать положительным в данной точке, если вектор, направленный из этой точки вдоль достаточно малой хорды, имеет отрицательную проекцию на внешнюю нормаль. Пусть $z=z(x)$ — образующая недеформированной оболочки, k_1 и k_2 — ее главные кривизны. В силу сделанных предположений о пологости и симметрии оболочки $k_1 = -r_1^{-1} = d^2z/dx^2$, $k_2 = -r_2^{-1} = x^{-1} dz/dx$.

Обозначим через ε_1 , ε_2 деформации вдоль меридиана и параллели оболочки, N_1 , N_2 — соответствующие растягивающие усилия, отнесенные к единице длины, E — модуль Юнга, h — толщина оболочки, ν — коэффициент Пуассона, w , v — нормальная и тангенциальная составляющие перемещения. В силу круговой симметрии смещения вдоль параллели равны нулю. Величины деформаций, выраженные через составляющие перемещений, в геометрически нелинейной теории [1, 2] для симметрично нагруженных оболочек вращения имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (Eh)^{-1} (N_1 - \nu N_2) = w/r_1 + dv/dx + 1/2 (dw/dx)^2 \\ \varepsilon_2 &= (Eh)^{-1} (N_2 - \nu N_1) = w/r_2 + v \operatorname{ctg} \varphi / r_2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где φ — угол между местной нормалью к образующей и вертикальной осью.

Условия равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} N_1(k_1 + d^2w/dx^2) + N_2(k_2 + x^{-1}dw/dx) &= -Z(x) \\ d(xN_1)/dx - N_2 &= -xX(x) \end{aligned} \quad (1.2)$$

где Z и X — плотность внешних сил в проекции на нормаль и касательную к меридиану. Рассмотрим сегмент, отсекаемый от оболочки плоскостью, перпендикулярной оси симметрии. Из условия равновесия (1.2) получаем по аналогии с уравнением (255) [4] соотношение

$$2\pi x N_1(x) [dw/dx - x/r_2] = -F(x) \quad (1.3)$$

где $F(x)$ — проекция главного вектора внешних сил, приложенных к сегменту оболочки с радиусом основания x , на ось симметрии.

Упростим систему уравнений (1.1)–(1.3). Для этого N_2 из второго уравнения (1.1) подставим в первое (1.1) и второе (1.2) уравнения

$$\begin{aligned} dw/dx &= -[2\pi x N_1(x)]^{-1} F(x) + x/r_2 \\ d(xN_1)/dx &= Eh(w/r_2 + v/x) + vN_1 - xX(x) \\ dv/dx &= (Eh)^{-1} (1 - \nu^2) N_1 - w/r_1 - \\ &-^{1/2} [- (2\pi x N_1)^{-1} F(x) + x/r_2]^2 - \nu(w/r_2 + v/x) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Пусть R_i — величина силы, приходящаяся на единицу длины i -го кольца радиуса x_i . Линии действия всех сил R_i пересекаются в точке $(0, l)$ на оси симметрии. Обозначим через ψ_i угол между линией действия силы R_i и горизонталью, $\operatorname{tg} \psi_i = lx_i^{-1}$. Вертикальная составляющая главного вектора внешних сил, приложенных к сегменту с радиусом основания x , будет (суммирование производится по всем i , таким что $x_i < x$):

$$F(x) = 2\pi \sum x_i R_i \sin \psi_i \quad (1.5)$$

Величины R_i в силу определения удовлетворяют неравенству

$$R_i \geq 0 \quad (1.6)$$

Действующие силы направлены к оси симметрии. Поэтому величина проекции плотности внешних сил, приложенных к i -ому кольцу, на касательную к меридиану с учетом пологости оболочки ($\sin \varphi_i = x/r_2^{-1}$) определяется формулой

$$\begin{aligned} X_i(x) &= -R_i \cos(\psi_i - \varphi_i) \delta(x - x_i) = \\ &= -R_i (\cos \psi_i + x_i r_2^{-1} \sin \psi_i) \delta(x - x_i) \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $\delta(x - x_i)$ — δ -функция, сосредоточенная в точке x_i .

Краевые условия для системы уравнений (1.4) определяются условиями симметрии и отсутствием прогибов вдоль закрепленного края

$$v|_{x=0} = w|_{x=x_0} = v|_{x=x_0} = 0 \quad (1.8)$$

Решив систему (1.4) с краевыми условиями (1.8), получим w , v , N_1 . В результате тангенциального и нормального смещений v и w точка поверхности с координатами $(r, z(r))$ с учетом пологости оболочки перейдет в точку $(r + v + wr/r_2, z + w)$. Координата оболочки до смещения в точке $r + v + wr/r_2$ была $z(r + v + wr/r_2)$. Следовательно, величина смещения в точке $r + v + wr/r_2$ вдоль оси z будет $z(r) + w(r) - z(r + v + wr/r_2)$. Изменение профиля оболочки вдоль вертикальной оси в точке $x = r + v + wr/r_2$ равно

$$\begin{aligned} \Delta z &= w(x - v(r) - w(r)r/r_2) + z(x - v(r) - \\ &- w(r)r/r_2) - z(x) = w(x) - w_x' [v(r) + w(r)r/r_2] - z_x' [v(r) + w(r)r/r_2] \end{aligned}$$

Воспользуемся равенством $z_x' = -xr_2^{-1}$ и заменим r в квадратных скобках на x . Ошибка в определении прогиба при такой замене будет величиной более высокого порядка малости по сравнению с Δz . В результате получим

$$\Delta z(x) = w(x) - w_x' [v(x) + w(x)xr_2^{-1}] + xr_2^{-1} [v(x) + w(x)xr_2^{-1}]$$

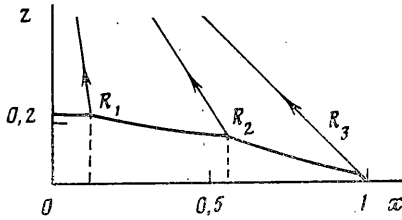
В качестве функционала рассмотрим величину квадратичного отклонения деформированной поверхности от поверхности с заданным меридианом $z_0(x)$

$$I = 2\pi \int_0^{x_0} x [z_0(x) - z(x) - \Delta z(x)]^2 dx \quad (1.9)$$

Требуется выбором управляющих усилий R_i и точек их приложения x_i (1.5), (1.7) минимизировать функционал (1.9). При этом необходимо обеспечить отсутствие складок на деформированной поверхности. Последнее условие удобно записать в виде

$$N_1 \geq 0, N_2 = Eh(wr_2^{-1} + vx^{-1}) + vN_1 \geq 0 \quad (1.10)$$

Таким образом имеем задачу параметрической оптимизации с функционалом (1.9), геометрическими и фазовыми ограничениями (1.6), (1.10) и уравнениями состояния (1.4). Поставленная задача решалась численно методом покоординатного спуска. Для расчета равновесного состояния использовался метод движущейся мишени [5, 6]. В качестве исходного (недеформированного) меридиана оболочки была взята дуга окружности радиуса $R=10$. Радиус окружности x_0 , лежащей в основании оболочки, равен $x_0=1$. Оболочка растягивалась силами, распределенными по трем окружностям, а координата l пересечения линий действия сил с осью симметрии составляла $l=1$. Коэффициент $\nu=0,4$ и $Eh=50$. В качестве приближаемой поверхности был выбран параболоид вращения, образующая которого описывается зависимостью $z_0(x) = 0,2(1-x^2)$. Начальный шаг минимизации в методе покоординатного спуска был взят 0,2. В процессе минимизации он уменьшался до 0,0125. Величина функционала (1.9) уменьшалась до $2\pi \cdot 0,14284 \cdot 10^{-4}$, что соответствует значению среднеквадратичной погрешности $\sigma = (I/\pi x_0^2)^{1/2} = 0,534 \cdot 10^{-2}$. На последних шагах минимизации изменения функционала происходили в третьей значащей цифре. В результате было получено следующее значение величин растягивающих сил: $R_i = 0,925; 0,5; 0,785$ и точек их приложения $x_i = 0,1125; 0,5495; 0,925$. Оптимальный профиль изображен на фигуре.



2. **Оптимальный выбор недеформированного меридиана оболочки вращения.** Включим недеформированную поверхность в число искомым функций. Деформированную же выберем так, чтобы форма ее меридиана была как можно ближе к заданной кривой. Таким образом, оптимизационная часть задачи будет с достаточной точностью решена на этапе конструирования деформированного меридиана.

В качестве заданной формы рассмотрим параболу

$$z_0(x) = -ax^2 \quad (a > 0, -x_0 \leq x \leq x_0) \quad (2.1)$$

Близость меридиана $z(x)$ к (2.1) будем оценивать с помощью квадратичного функционала

$$I = 2\pi \int_0^{x_0} x [z(x) + ax^2]^2 dx \quad (2.2)$$

В принятые в п. 1 обозначения и терминологию внесем следующие дополнения и изменения: k_1, k_2 — главные кривизны деформированной поверхности; (x_i, z_i) ($i=1, \dots, n$) — координаты точек приложения внешних усилий; $(x_{n+1}=x_0, z_{n+1})$ — координаты точки закрепления; V_i, W_i — проекции внешнего усилия в точке (x_i, z_i) на оси Ox, Oz ; $[x_i, x_{i+1}]$ — i -й отрезок, меридиан $z(x)$ на i -м отрезке — i -й ярус.

Введем обозначения

$$I_k(c, b) = 2\pi \int_{x_k}^{x_{k+1}} x [cx + b + ax^2]^2 dx, \quad I_0(b) = 2\pi \int_0^{x_1} x [b + ax^2]^2 dx$$

где a — коэффициент параболы (2.1), c и b не зависят от x . Из уравнения равновесия $N_1 k_1 + N_2 k_2 = 0$ [2], условия отсутствия складок $N_1 > 0, N_2 > 0$ и круговой симметрии получается, что $k_1 > 0$ при $x > x_1$, т. е. ярусы выпуклы

вниз, в то время как заданная кривая вышукла вверх. Поэтому нетрудно доказать, что предельно малое значение I достигается на некоторой ломаной с $n+1$ звеньями (звено на отрезке $[0, x_1]$ горизонтальное); назовем эту ломаную оптимальной, ее звено на i -м отрезке — i -м звеном. Примем координаты вершин оптимальной ломаной за концы ярусов деформированного меридиана.

Оптимальная ломаная вычислялась на основании следующих свойств: 1) если x_k ($k=1, \dots, n+1$) — абсциссы концов звеньев оптимальной ломаной, то I_k ($k=1, \dots, n$) достигает своего минимума при таких c, b , что прямая $z=cx+b$ содержит k -е звено оптимальной ломаной, а $b=-ax_1^2/2$, доставляющее минимум I_0 , является ординатой горизонтального звена оптимальной ломаной; 2) если звенья до $k-1$ -го включительно уже построены, то k -е звено следует искать из двух условий экстремальности I_k и условия стыковки звеньев; 3) в силу такого построения x_{n+1} есть однозначная функция $f(x_1)$; эта функция монотонна, следовательно, x_1 однозначно определяется из уравнения $f(x_1)=x_0$.

Перейдем к построению деформированного меридиана. Из записанных для i -го яруса уравнений равновесия пологой оболочки вращения [2]

$$N_1 k_1 + N_2 k_2 = 0, \quad N_1 k_2 + G_i(x) = 0, \quad G_i(x) = x^{-2} \sum_{m=1}^i x_m W_m$$

получаются выражения

$$N_1 = -k_2^{-1} G_i(x), \quad N_2 = k_1 k_2^{-1} G_i(x) \quad (2.3)$$

Введем обозначения: q, s — проекции вектора перемещения соответственно на нормальное и тангенциальное относительно деформированного меридиана направления, а точкой сверху будем обозначать производную по x . Из геометрических уравнений, физических соотношений

$$\varepsilon_1 = s' - q k_1 - q^2/2, \quad \varepsilon_2 = s/x - q k_2 \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_1 = (Eh)^{-1} (N_1 - \nu N_2), \quad \varepsilon_2 = (Eh)^{-1} (N_2 - \nu N_1) \quad (2.5)$$

и (2.3) получим

$$q' = x k_2 + \{x^2 k_2^2 + 2(Eh)^{-1} k_2^{-2} G_i(x) [k_2 + k_1(1 - 2k_1 k_2^{-1}) + x k_1']\}^{1/2} \quad (2.6)$$

Второй корень квадратного уравнения, из которого находится q' по формуле (2.6), не нужно рассматривать, так как он соответствует недеформированной оболочке, лежащей ниже плоскости $z=z_{n+1}$, а такую оболочку можно «вывернуть» без деформаций в область $z \geq z_{n+1}$.

Введем обозначения: $\varepsilon_{1i}^+ = \varepsilon_1(x_i+0)$, $\varepsilon_{1i}^- = \varepsilon_1(x_i-0)$, аналогично $\varepsilon_{2i}^+, \varepsilon_{2i}^-, k_{1i}^+, k_{2i}^+, k_{1i}^-, k_{2i}^-$; N — величина усилий N_1, N_2 на отрезке $[0, x_1]$; $N_1 = N_2$, так как верхний горизонтальный круг однородно растянут.

Перечислим теперь условия, которые должны выполняться в точках x_i ($i=1, \dots, n+1$): 1) $\varepsilon_{2i}^- = \varepsilon_{2i}^+$ ($i=1, \dots, n$); 2) $\varepsilon_2(x_0) = 0$; 3) пересечение линий действия внешних усилий в точке $(0, l)$; 4) уравнения равновесия в точках x_i ($i=1, \dots, n$); 5) $l - z_i + k_{2i}^+ x_i^2 > 0$ ($i=1, \dots, n$) — естественное ограничение на l , выражающее тот факт, что вектора трех усилий в точке (x_i, z_i) не могут лежать в одной полуплоскости. Набор условий 1–4 с помощью (2.3), (2.5) приводится к следующему виду:

$$(\nu + k_{1i}^+/k_{2i}^+) (l - z_i) / (l - z_i + k_{2i}^+ x_i^2) = \nu - 1 \quad (2.7)$$

$$k_{1i}^+ = k_{1i}^- k_{2i}^+ / k_{2i}^- + (\nu/l) k_{2i}^+ x_i^2 (1 - k_{2i}^- / k_{2i}^+) \quad (i=2, \dots, n) \quad (2.8)$$

$$k_1(x_0) + \nu k_2(x_0) = 0 \quad (2.9)$$

$$-V_i W_i^{-1} = x_i (l - z_i)^{-1} \quad (2.10)$$

$$W_i = -N k_{2i}^+ x_i (l - z_i) (l - z_i + k_{2i}^+ x_i^2)^{-1} \quad (2.11)$$

$$W_i = (k_{2i}^+ - k_{2i}^-) (k_{2i}^-)^{-1} (l - z_i) (l - z_i + k_{2i}^+ x_i^2)^{-1} x_i G_{i-1}(x_i) \quad (i=2, \dots, n) \quad (2.12)$$

Построив на основании (2.7)–(2.9) ярусы любой, достаточно близкой к прямолинейному отрезку формы, выбрав затем некоторое значение $N > 0$

и вычислив по формулам (2.3), (2.5), (2.11), (2.12) величины W_i ($i=1, \dots, n$) и ε_2 , можно найти форму недеформированной оболочки, проинтегрировав совместно уравнение (2.6) и второе уравнение (2.4) с начальным значением

$$q(x_0) = 0 \quad (2.13)$$

и условиями стыковки ярусов недеформированного меридиана

$$s_i^+ = s_i^- + q_i^- x_i (k_{2i}^+ - k_{2i}^-)$$

$$q_i^+ = -s_i^- x_i (k_{2i}^+ - k_{2i}^-) + q_i^- \quad (i=2, \dots, n)$$

При этом следует потребовать неотрицательности подкоренного выражения в (2.6), т. е. совместности деформаций. Это требование всегда может быть удовлетворено выбором достаточно малого значения N , так как согласно (2.11), (2.12) внешние усилия W_i линейно зависят от N .

Изложенный подход был применен к расчету конструкции с теми же механическими параметрами Eh , ν , x_0 , $l - z_{n+1}$, n и формой заданной параболы, что и в п. 1. Ярусы деформированного меридиана выбирались из условия: на i -м ярусе ($i=1, \dots, n-1$) $xk_2 = c_i - b_i \exp(-\alpha_i(x-x_i)) + a\theta(x-x_i) - a\theta\Delta x_i/2$, на n -ом ярусе $xk_2 = c_n - b_n \exp(-\alpha_n(x-x_n)) + a\theta(x-x_n) - a\theta\Delta x_n/2 + b_0 \exp(\alpha_0(x-x_0))$, где $c_i, b_i > 0, \alpha_i > 0$ ($i=1, \dots, n$) $\alpha_0 > 0, b_0 > 0$ — константы, a — коэффициент из (2.1), $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, θ — заданное число, удовлетворяющее соотношению $1 \geq \theta \geq \Delta_n^2$. Последнее неравенство обусловлено необходимостью гарантировать положительность натяжения N_2 реальной конструкции, при условии, что расчетная N_2 положительна, но вычислена согласно уравнениям равновесия (2.3) с ошибкой порядка $|k_2| \Delta_n^2 \sim a \Delta_n^2$.

Для обеспечения близости функционала I к его значению I_0 на оптимальной ломаной необходимо, чтобы $k_1 \ll a$. В силу условий (2.7), (2.9) $k_1 \sim |k_2| \sim a$ в точках x_1, x_0 . Поэтому ярусы выбирались так, чтобы имело место следующее свойство А:

$$k_1 \ll |k_2| \text{ всюду, кроме малых окрестностей точек } x_i, \text{ где } k_1 \approx |k_2|.$$

Близость i -го яруса к отрезку обеспечивалась с помощью соответствующего выбора параметра α_i . При фиксированных α_i ($i=0, \dots, n$) коэффициенты c_i, b_i ($i=0, \dots, n$) находятся однозначно из условий (2.7) — (2.9) и условия совпадения вершин оптимальной ломаной с точками стыковки ярусов. Коэффициенты вычислялись последовательно, начиная с первого яруса. Величина I получилась близкой к I_0 и равнялась $5\pi \cdot 10^{-6}$. Значение N было выбрано близким к предельному, при котором нарушалось условие совместности деформаций, и равнялось 0,085. Сравнение оптимального значения функционала с полученным в п. 1 показывает, что правильный выбор недеформированного меридиана приводит к существенному уменьшению (на порядок) среднеквадратичного отклонения деформированной поверхности от параболоида вращения.

3. Оптимизация формы поверхности на заданном классе недеформированных оболочек. Примем теперь во внимание, что надо не только добиться близости оболочки к заданному параболоиду, но и обеспечить простоту недеформированной формы, чтобы ее нетрудно было «скроить» для реальной конструкции. В этом пункте решается следующая задача: найти такой представляющий собой ломаную недеформированный меридиан и такие внешние усилия, чтобы деформированный меридиан был в определенной степени близок к оптимальной ломаной (точки приложения внешних усилий по-прежнему считаются совпадающими с вершинами оптимальной ломаной).

Из формулы (2.6) и предположения А о структуре деформированного меридиана следует, что если значение N выбрано близким к предельному, то в зонах быстрого затухания k_1 недеформированный меридиан оказывается существенно искривленным. Следовательно, напряжение построенной в этом пункте оболочки будет сравнительно небольшим.

Итак, из уравнений (1.1), (1.2), записанных для случая конической недеформированной оболочки с кривизнами $k_1=0, k_2=px^{-1}, p=\text{const}<0$, можно получить следующую систему:

$$(p+w')f=c \quad (3.1)$$

$$(Eh)^{-1}(f - xf' - x^2f'') = xw'(p+w'/2) \quad (3.2)$$

$$N_2 = f' \quad (3.3)$$

$$v - wp = x(Eh)^{-1}(xf' - \nu f) \quad (3.4)$$

где $f = xN_1$, c — постоянная интегрирования. Если предположить, что

$$|xf^*| \ll f, \quad |x^2f^{**}| \ll f \quad (3.5)$$

и на основании этих соотношений отбросить в (3.1), (3.2) сравнительно малые члены, то получим

$$\begin{aligned} w^* &= w_c^* = f_c(Ehpx)^{-1}, \quad f = f_c(1 - w_c^*p^{-1}) \\ f_c &= cp^{-1}, \quad |w_c^*| \ll p \end{aligned} \quad (3.6)$$

В силу уравнений равновесия порядковые соотношения между f , f^* , f^{**} эквивалентны аналогичным условиям на k_2x , k_1 , k_1^* , следовательно, (3.5) можно переписать в форме

$$k_1 \ll |k_2|, \quad |xk_1^*| \ll |k_2| \quad (3.7)$$

Как уже отмечалось, в силу краевых условий (2.7), (2.9) соотношения (3.7) не выполняются по крайней мере для первого и n -го ярусов. Поэтому в соответствии с предположением А о форме деформированного меридиана будем искать решение (3.1), (3.2) в виде

$$w^* = w_c^* + \delta w^*, \quad f = f_c(1 - w_c^*p^{-1}) + \delta f \quad (3.8)$$

где δf , δw^* быстро затухают в малой окрестности конца яруса x_i ($i=0, 1, \dots, n$).

Обозначим характерную ширину пограничной зоны через Δx . Поскольку должно выполняться неравенство

$$\Delta x \ll x_i \quad (3.9)$$

в пограничной зоне справедливы соотношения

$$|\delta f| \ll |x\delta f^*| \ll |x^2\delta f^{**}| \quad (3.10)$$

Согласно уравнениям равновесия условие $k_1 \ll |k_2|$ (свойство А) эквивалентно следующему: $x|\delta f^*| \ll f_c + \delta f$. Отсюда (с учетом (3.10)):

$$|\delta f| \ll f_c \quad (3.11)$$

Подставим (3.8) в (3.1), (3.2), исключим из (3.2) δw^* , упростим систему в соответствии с (3.6), (3.9)–(3.11), в результате получим:

$$f_c \delta w^* + p \delta f = 0, \quad dp^{-1} x^2 \delta f^{**} - \delta f = 0 \quad (3.12)$$

$$\delta f = -f_c (d/p)^{1/2} (\gamma - d/p) \text{sign}(x - x_i) \exp(-\omega |x - x_i|) \quad (3.13)$$

$$d = w_c^*(x_i) = f_c (Ehpx_i)^{-1}, \quad \gamma = -k_1(x_i)k_2^{-1}(x_i), \quad \omega = (p/d)^{1/2} x_i^{-1}$$

Полученные при интегрировании (3.12) приращения δw будут иметь относительную погрешность порядка $(d/p)^{1/2}$, так как функция δf представлена формулой (3.13) с относительной погрешностью порядка $(d/p)^{1/2} + |x - x_i| x_i^{-1}$; функция w_c^* по отношению к точному решению w^* системы (3.1), (3.2) вне пограничной зоны имеет погрешность порядка d/p .

Введем обозначения: $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta_i = (z_{i+1} - z_i) / \Delta x_i$ ($i=1, \dots, n$); (x_i^0, z_i^0) — вершины недеформированной ломаной; p_i, f_{ci} — величины p, f_c на i -м ярусе; $d_i = w_c^*(x_i + 0)$ ($i=1, \dots, n$); $\gamma_i = -k_{1i}^+ / k_{2i}^+$, $\gamma_0 = -k_1(x_0)k_2^{-1}(x_0)$; $w_i^+ = w(x_i + 0)$, $w_i^- = w(x_i - 0)$.

На основании соотношений (2.7)–(2.9), (2.13), (3.4), (3.12), (3.13), условий стыковки ярусов и формул изменения кривизны $k_2x = p + w^*$, $k_1 = w^*$ построим деформированный меридиан и соответствующую ему недеформированную ломаную.

Пусть

$$d_i p_i^{-1} = \rho_i \Delta_i^2 \quad (i=1, \dots, n) \quad (3.14)$$

где ρ_i — заданный параметр, определяющий степень близости расчетного деформированного меридиана к оптимальной ломаной на i -м ярусе.

Будем считать, что $x_0 l^{-1} \ll 1$, и пренебрегать в уравнениях членами порядка Δ_n^2 (относительная погрешность, принятая в (3.1)–(3.4)) и $\rho_i \Delta_n^2$ по сравнению с 1. Примем кроме того, что на каждом ярусе есть интервал вне пограничных зон. Отсюда с учетом (3.13), (3.14) следует, что если на i -м ярусе есть пограничная зона, то имеет место соотношение $x_i \rho_i \Delta_n^2 \ll \Delta x_i$, которое также будем использовать при упрощении выкладок.

В результате получим следующее единственное решение:

$$\begin{aligned} p_n &= \Delta_n (1 + \nu \rho_n \Delta_n^2 x_n / \Delta x_n), \quad p_i = \Delta_i \quad (i=1, \dots, n-1) \\ \gamma_0 &= \nu, \quad \gamma_i = \nu x_i l^{-1} (\Delta_{i-1} - p_i) + \rho_{i-1} \Delta_n^2 x_{i-1} x_i^{-1} \quad (i=2, \dots, n) \\ \gamma_1 &= 1 + (1 - \nu) x_1 l^{-1} \Delta_1 \\ f_{ci} &= E h \rho_i x_i \Delta_n^2 p_i^2 \quad (i=1, \dots, n) \\ w_n^+ &= \rho_n \Delta_n^2 p_n x_n [\nu - \nu x_n l^{-1} (\Delta_{n-1} - p_n) - \ln(x_0 x_n^{-1}) - \\ &\quad - \rho_{n-1} \Delta_n^2 x_{n-1} x_n^{-1}] \\ w_i^+ &= w_{i+1}^+ + \rho_i \Delta_n^2 \Delta_i x_i [\rho_i \Delta_n^2 - \nu x_i l^{-1} (\Delta_{i-1} - \Delta_i) - \ln(x_{i+1} x_i^{-1}) - \\ &\quad - \rho_{i-1} \Delta_n^2 x_{i-1} x_i^{-1}] \quad (i=2, \dots, n-1) \\ w_1^+ &= w_2^+ + \rho_1 \Delta_n^2 \Delta_1 x_1 [-\ln(x_2 x_1^{-1}) - 1 - (1 - \nu) x_1 l^{-1} \Delta_1], \\ z_i - z_i^0 &= w_i^+ \quad (i=1, \dots, n) \\ x_i - x_i^0 &= \rho_i \Delta_n^2 p_i^2 x_i [\nu x_i l^{-1} (\Delta_{i-1} - p_i) + \rho_{i-1} \Delta_n^2 x_{i-1} x_i^{-1} - \nu] \quad (i=2, \dots, n) \\ x_1 - x_1^0 &= \rho_1 \Delta_n^2 \Delta_1^2 x_1 [(1 - \nu) (1 + \Delta_1 x_1 l^{-1}) + \nu \Delta_n \rho_1^{1/2}] \end{aligned}$$

Величина N согласно определению деформации удовлетворяет уравнению $(x_1 - x_1^0) / x_1^0 = (Eh)^{-1} N (1 - \nu)$, откуда следует

$$N = Eh (1 - \nu)^{-1} \rho_1 \Delta_n^2 \Delta_1^2 [(1 - \nu) (1 + \Delta_1 x_1 l^{-1}) + \nu \Delta_n \rho_1^{1/2}]$$

Внешние усилия вычисляются по формулам (2.10)–(2.12) с использованием уже полученных формы деформированного меридиана и значения N .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мушгари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Татарский книгоиздат, 1957. 432 с.
2. *Филли А. П.* Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат, 1975. 256 с.
3. *Vanichuk N. V., Larichev A. D.* Optimal design problem for curvilinear shallow elements of structures. // Optimal Contr., Appl. and Methods. 1984. V. 5, No 3. P. 197–205.
4. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.
5. *Суганов А. А.* Метод решения нелинейных двухточечных краевых задач // Ж. вычисл. математики и мат. физики, 1983. Т. 23. № 1. С. 228–231.
6. *Суганов А. А.* О численном решении краевых задач оптимизации методом движущейся мишени // Алгоритмы и математическое обеспечение для физических задач. Л.: Изд-е физ.-техн. ин-та АН СССР, 1983. С. 143–157.

Москва

Поступила в редакцию
7.1.1988