

УДК 539.3

В. Н. ПАЙМУШИН, В. А. ФИРСОВ

**ПРИБЛИЖЕННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ
КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК
С ДЕФОРМИРУЕМЫМИ ОСНОВАНИЯМИ НА КОНТУРЕ**

Использование тонкостенных элементов в виде пластин и оболочек из неметаллических материалов требует разработки способов их соединения с другими элементами конструкций. При постановке задач механики деформирования тонкостенных элементов конструкций этого класса, как показали исследования [1–3], необходим учет деформативности промежуточных соединительных слоев. Один из вариантов математической модели для их расчета был предложен в [4], в рамках которой не вводятся ограничения на линейные размеры областей контакта оснований с оболочкой.

В публикуемой статье предложена приближенная постановка линейных задач механики взаимодействия оболочек с деформируемыми основаниями, расположеными на обеих лицевых поверхностях оболочек вдоль граничного контура в виде узких полос. Построено численное решение задачи об осесимметричных деформациях оболочек вращения, результаты которого сравниваются с аналогичным решением, полученным в [4].

1. Предположим, что тонкая оболочка скреплена с упругими основаниями, расположенными вдоль граничного контура Γ на внешней и внутренней лицевых поверхностях и имеющими ширину $t_{(l)}(s)$, где s — длина дуги вдоль Γ с началом отсчета в некоторой точке $s=s_0$, а l — индекс, принимающий значение 1 для верхних оснований и 2 — для нижних (фиг. 1).

Пусть σ , $\sigma_{(l)}$ — срединные поверхности оболочки и оснований, отнесенные к произвольным гауссовым координатам α^1 , α^2 на σ ; $2h$, $2h_{(l)}$ — толщины оболочки и оснований; \mathbf{r}_i , $\mathbf{r}_{(l)}$, \mathbf{m} , $\mathbf{m}^{(l)}$ — базисные векторы на σ , $\sigma_{(l)}$; z , $z_{(l)}$ — координатные оси, направленные по нормалям \mathbf{m} , $\mathbf{m}^{(l)}$ к срединным поверхностям σ , $\sigma_{(l)}$.

В случае, когда на $t_{(l)}(s)$ не накладываются какие-либо ограничения, механика деформирования рассматриваемых систем может быть описана соотношениями [4], базирующимися на линейной аппроксимации векторов перемещений оболочки \mathbf{V}^z и оснований $\mathbf{V}^{z(l)}$ по координатам z и $z_{(l)}$:

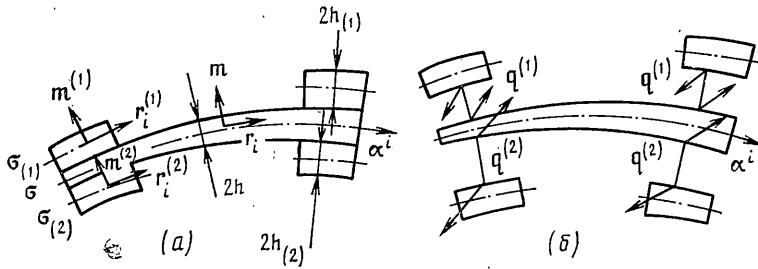
$$\mathbf{V}^z = \mathbf{v} + z\gamma = (u_i + z\gamma_i) \mathbf{r}_i + (w + z\gamma) \mathbf{m} \quad (-h \leq z \leq h, \quad \alpha^i \in \Omega) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{V}^{z(l)} = \mathbf{v}^{(l)} + z_{(l)}\gamma^{(l)} = (u_i^{(l)} + z_{(l)}\gamma_i^{(l)}) \mathbf{r}_{(l)} + (w^{(l)} + z_{(l)}\gamma^{(l)}) \mathbf{m}^{(l)} \quad (-h_{(l)} \leq z_{(l)} \leq h_{(l)}, \quad \alpha^i \in \Omega_{(l)}) \quad (1.2)$$

где Ω , $\Omega_{(l)}$ — области с границами Γ и $\Gamma_{(l)}$, занимаемые срединными поверхностями оболочки и оснований.

В предположении, что перемещения точек опорных поверхностей оснований известны и заданы разложениями $\mathbf{U}^{(l)} = U_i^{(l)} \mathbf{r}_{(l)} + U_3^{(l)} \mathbf{m}^{(l)}$ в силу условий $\mathbf{V}^{z(l)}(z_{(l)} = \delta_{(l)} h_{(l)}) = \mathbf{U}^{(l)}$ векторы упругих перемещений оснований могут быть представлены в виде ($\delta_{(l)} = 1$ для верхних и $\delta_{(l)} = -1$ для нижних оснований):

$$\mathbf{V}^{z(l)} + \mathbf{U}^{(l)} + (z_{(l)} - \delta_{(l)} h_{(l)}) \gamma^{(l)} \quad (1.3)$$



Фиг. 1

При этом, в случае малых перемещений, компоненты деформаций оболочки и оснований вычисляются по формулам [5]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ik}^z &= \varepsilon_{ik} + z \kappa_{ik}, \quad \varepsilon_{i3}^z \approx \varepsilon_{i3}, \quad \varepsilon_{33}^z \approx \varepsilon_{33} = \gamma \\ 2\varepsilon_{ik} &= e_{ik} + e_{hi}, \quad 2\kappa_{ik} = \Omega_{ik} + \Omega_{hi}, \quad 2\varepsilon_{i3} = \omega_i + \gamma_i\end{aligned}\quad (1.4)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ik}^{z(l)} &= \varepsilon_{ik}^{o(l)} + \varepsilon_{ik}^{(l)} + (z_{(l)} - b_{(l)}) \kappa_{ik}^{(l)} \\ \varepsilon_{i3}^{z(l)} &= \varepsilon_{i3}^{o(l)} + \varepsilon_{i3}^{(l)} + (z_{(l)} - b_{(l)}) \kappa_{i3}^{(l)}, \quad \varepsilon_{33}^{z(l)} = \varepsilon_{33}^{(l)} = \gamma^{(l)} \\ 2\varepsilon_{ik}^{o(l)} &= E_{ik}^{(l)} + E_{hi}^{(l)}, \quad 2\varepsilon_{ik}^{(l)} = -y_i^{(l)} \gamma_h^{(l)} - y_h^{(l)} \gamma_i^{(l)} \\ 2\kappa_{ik}^{(l)} &= \Omega_{ik}^{(l)} + \Omega_{hi}^{(l)}, \quad 2\varepsilon_{i3}^{o(l)} = E_i^{(l)}, \quad 2\varepsilon_{i3}^{(l)} = \gamma_i^{(l)} - y_i^{(l)} \gamma^{(l)} \\ e_{ik} &= \nabla_i u_h - b_{ik} w, \quad \omega_i = \nabla_i w + b_i^h u_h\end{aligned}\quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}\Omega_{ik} &= \nabla_i \gamma_h - b_{ik} \gamma, \quad E_{ik}^{(l)} = \nabla_i U_h^{(l)} - b_{ik}^{(l)} U_3^{(l)} \\ E_i^{(l)} &= \nabla_i U_3^{(l)} + b_i^h U_h^{(l)}, \quad \Omega_{ik}^{(l)} = \nabla_i \gamma_h^{(l)} - b_{ik}^{(l)} \gamma^{(l)} \\ y_i^{(l)} &= \nabla_i H^{(l)}, \quad H^{(l)} = \delta_{(l)} (h + h_{(l)}), \quad b_{(l)} = \delta_{(l)} h_{(l)}\end{aligned}\quad (1.6)$$

Равновесное состояние рассматриваемых деформируемых систем описывается [4] уравнениями равновесия для оболочки (здесь и далее сумма по l):

$$\begin{aligned}F^i &= \nabla_k T^{ik} - b_k^i T^{k3} + \Delta (p_{(+)}^i + p_{(-)}^i) + \Sigma \Delta_{(l)} q_{(l)}^i = 0 \\ F^3 &= \nabla_k T^{k3} + b_{ik} T^{ik} + \Delta (p_{(+)}^3 + p_{(-)}^3) + \Sigma \Delta_{(l)} q_{(l)}^3 = 0 \\ F^{i+3} &= \nabla_k M^{ik} - T^{i3} + \Delta h (p_{(+)}^i - p_{(-)}^i) + \Sigma \Delta_{(l)} \delta_{(l)} h q_{(l)}^i = 0 \\ \Delta &= 1, \quad \Delta_{(l)} = 0 \quad (\alpha^i \in \Omega \setminus \Omega_{(l)}); \quad \Delta = 0, \quad \Delta_{(l)} = 1 \quad (\alpha^i \in \Omega_{(l)})\end{aligned}\quad (1.7)$$

для оснований

$$\Phi_{(l)}^i = \nabla_j (M_{(l)}^{ij} - b_{(l)} T_{(l)}^{ij}) - b_{ij}^i M_{(l)}^{j3} + \delta_{(l)} y_j^{(l)} T_{(l)}^{ij} - T_{(l)}^{i3} = -2 b_{(l)} q_{(l)}^i \quad (1.8)$$

$$\Phi_{(l)}^3 = \nabla_i (M_{(l)}^{i3} - b_{(l)} T_{(l)}^{i3}) + b_{ij}^{(l)} M_{(l)}^{ij} + T_{(l)}^{i3} \delta_{(l)} y_i^{(l)} - T_{(l)}^{33} = -2 b_{(l)} q_{(l)}^3$$

при граничных условиях на кромках Γ и $\Gamma_{(l)}$:

$$\begin{aligned}R_n &= T^{ik} n_k n_i = R_n^s \quad (\delta u_n \neq 0), \quad R_\tau = T^{ik} n_k \tau_i = R_\tau^s \quad (\delta u_\tau \neq 0) \\ R_m &= T^{i3} n_i = R_m^s \quad (\delta w \neq 0), \quad G_n = M^{ik} n_k n_i = G_n^s \quad (\delta \gamma_n \neq 0) \\ G_\tau &= M^{ik} n_k \tau_i = G_\tau^s \quad (\delta \gamma_\tau \neq 0)\end{aligned}\quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}(M_{(l)}^{ij} - b_{(l)} T_{(l)}^{ij}) n_i^{(l)} n_j^{(l)} &= 0 \quad (\delta \gamma_n^{(l)} \neq 0) \\ (M_{(l)}^{i3} - b_{(l)} T_{(l)}^{i3}) n_i^{(l)} &= 0 \quad (\delta w^{(l)} \neq 0) \\ (M_{(l)}^{ij} - b_{(l)} T_{(l)}^{ij}) n_i^{(l)} \tau_j^{(l)} &= 0 \quad (\delta \gamma_\tau^{(l)} \neq 0)\end{aligned}\quad (1.10)$$

Здесь $\mathbf{q}^{(l)} = q_{(l)}^i \mathbf{r}_i + q_{(l)}^3 \mathbf{m}$, $\tilde{\mathbf{q}}_{(l)}^i \mathbf{r}_i^{(l)} + \tilde{\mathbf{q}}_{(l)}^3 \mathbf{m}^{(l)}$ — векторы контактных усилий взаимодействия между оболочкой и основаниями; $\mathbf{R}^s = R_n^s \mathbf{n} + R_\tau^s \mathbf{\tau} + R_m^s \mathbf{m}$, $\mathbf{G}^s = G_n^s \mathbf{n} + G_\tau^s \mathbf{\tau}$ — заданные векторы контурных усилий и моментов, действующих на оболочку; $\mathbf{P}^{(+)} = p_{(+)}^i \mathbf{r}_i + p_{(+)}^3 \mathbf{m}$, $\mathbf{P}^{(-)} = p_{(-)}^i \mathbf{r}_i + p_{(-)}^3 \mathbf{m}$ — заданные векторы поверхностных сил, приложенных к лицевым поверхностям оболочки $z = \pm h$, $\alpha^i \in \Omega \setminus \Omega_{(l)}$; $\{\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{\tau}\}$, $\{\mathbf{n}^{(l)}, \mathbf{m}^{(l)}, \mathbf{\tau}^{(l)}\}$ — триэдры на Γ и $\Gamma_{(l)}$, в которых \mathbf{n} , $\mathbf{\tau}$, $\mathbf{n}^{(l)}$, $\mathbf{\tau}^{(l)}$ являются единичными векторами тангенциальной нормали и касательной к Γ и $\Gamma_{(l)}$, заданные разложениями $\mathbf{n} = n^i \mathbf{r}_i = n_i \mathbf{r}^i$, $\mathbf{\tau} = \tau^i \mathbf{r}_i + \tau_i \mathbf{r}^i$, $\mathbf{n}^{(l)} = n_{(l)}^i \mathbf{r}_{(l)}^{(l)} = n_i^{(l)} \mathbf{r}_{(l)}^i$, $\mathbf{\tau}^{(l)} = \tau_{(l)}^i \mathbf{r}_{(l)}^{(l)} = \tau_i^{(l)} \mathbf{r}_{(l)}^i$; u_n , u_τ , γ_n , γ_τ , $u_n^{(l)}$, $u_\tau^{(l)}$, $\gamma_n^{(l)}$, $\gamma_\tau^{(l)}$ — компоненты векторов перемещений и поворотов в осях триэдров $\{\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{\tau}\}$, $\{\mathbf{n}^{(l)}, \mathbf{m}^{(l)}, \mathbf{\tau}^{(l)}\}$:

$$\mathbf{v} = u_n \mathbf{n} + u_\tau \mathbf{\tau} + w \mathbf{m}, \quad \gamma = \gamma_n \mathbf{n} + \gamma_\tau \mathbf{\tau} + \gamma \mathbf{m}$$

$$\mathbf{v}^{(l)} = u_n^{(l)} \mathbf{n}^{(l)} + u_\tau^{(l)} \mathbf{\tau}^{(l)} + w^{(l)} \mathbf{m}^{(l)}, \quad \gamma^{(l)} = \gamma_n^{(l)} \mathbf{n}^{(l)} + \gamma_\tau^{(l)} \mathbf{\tau}^{(l)} + \gamma^{(l)} \mathbf{m}^{(l)} \quad (1.11)$$

Введенные в рассмотрение компоненты векторов $\mathbf{q}^{(l)}$ при решении задач определяются исходя из кинематических условий сопряжения оболочки с основаниями

$$\begin{aligned} f_i^{(l)} &= (u_i + \delta_{(l)} h \gamma_i) + (w + \delta_{(l)} h \gamma) y_i^{(l)} - U_i^{(l)} + 2b_{(l)} \gamma_i^{(l)} = 0 \\ f_s^{(l)} &= (w + \delta_{(l)} h \gamma) - (u_i + \delta_{(l)} h \gamma_i) y_k^{(l)} a^{ik} - U_s^{(l)} + 2b_{(l)} \gamma^{(l)} = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Как показано в [4], выписанный комплекс соотношений (1.7) — (1.10), (1.12) следует из обобщенного вариационного уравнения

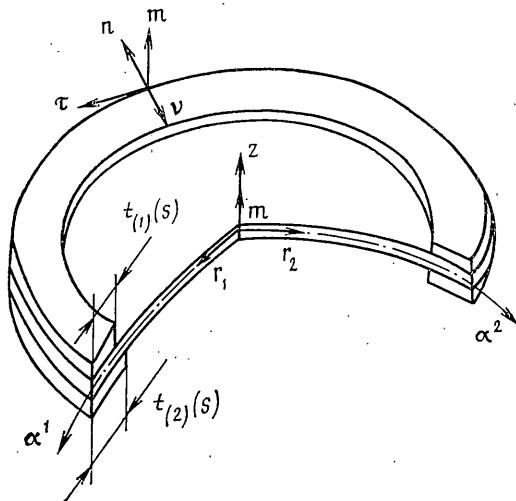
$$\begin{aligned} \delta I = & \int_{\Gamma} (R_n^s \delta u_n + R_\tau^s \delta u_\tau + R_m^s \delta w + G_n^s \delta \gamma_n + G_\tau^s \delta \gamma_\tau) ds + \\ & + \iint_{\Omega \setminus \Omega_{(l)}} [\mathbf{P}^{(+)} \delta(\mathbf{v} + h \gamma) + \mathbf{P}^{(-)} \delta(\mathbf{v} - h \gamma)] d\sigma - \iiint_{V_{(l)}} \delta W dz d\sigma + \\ & + \Sigma \left\{ \iint_{\Omega_{(l)}} [\mathbf{q}^{(l)} \delta(\mathbf{v} + \delta_{(l)} h \gamma) + 2\mathbf{q}^{(l)} b_{(l)} \delta \gamma^{(l)} + (\mathbf{v} + \delta_{(l)} h \gamma - \mathbf{U}^{(l)} + 2b_{(l)} \gamma^{(l)}) \delta \mathbf{q}^{(l)}] d\sigma - \right. \\ & \left. - \iint_{V_{(l)}} \delta W_{(l)} dz_{(l)} d\sigma \right\} = 0 \end{aligned}$$

где δW , $\delta W_{(l)}$ — вариации удельных потенциальных энергий деформации оболочки и оснований.

2. Для оболочек рассматриваемого класса, взаимодействующих с деформируемыми основаниями в виде узких тонких полос вдоль ее контура (фиг. 2), исходя из описанной выше модели может быть построена приближенная методика, основанная на замене реактивных усилий $\mathbf{q}^{(l)}$, действующих со стороны оснований на оболочку, статически эквивалентной системой сил и моментов, приложенных к внешнему ее контуру Г.

Выделим из вариационного уравнения (1.12) члены, представляющие собой работу реактивных усилий $\mathbf{q}^{(l)}$ на возможных перемещениях оболочки и преобразуем их с использованием зависимостей $u_i = u_n n_i + u_\tau \tau_i$, $\gamma_i = \gamma_n n_i + \gamma_\tau \tau_i$ к следующей форме

$$\begin{aligned} \delta I_q = & \sum_{\Omega_{(l)}} \iint_{\mathbf{q}^{(l)}} \mathbf{q}^{(l)} \delta(\mathbf{v} + \delta_{(l)} h \gamma) d\sigma = \sum_{\Gamma_0} \iint_{\Gamma_0} \{q_{(l)}^i [n_i \delta u_n + \tau_i \delta u_\tau + \\ & + \delta_{(l)} h (n_i \delta \gamma_n + \tau_i \delta \gamma_\tau)] + q_{(l)}^3 \delta w\} dv ds \end{aligned} \quad (2.1)$$



Фиг. 2

Входящие сюда функции u_n , u_τ , w , γ_n , γ_τ разложим в ряд Тейлора по координате v , выбранной в отличие от внешней нормали (n) в направлении внутренней нормали к контуру оболочки. В силу того, что ширина оснований $t_{(l)}(s)$ намного меньше характерного линейного размера оболочки, ограничимся следующими представлениями

$$\begin{aligned} u_n(s, v) &\approx u_n(s)|_{v=0} = u_n^s, \quad u_\tau(s, v) \approx u_\tau(s)|_{v=0} = u_\tau^s \\ w(s, v) &\approx w(s)|_{v=0} + v \partial w / \partial v|_{v=0} = w^s + v \partial w / \partial v|_{v=0} \\ \gamma_n(s, v) &\approx \gamma_n(s)|_{v=0} = \gamma_n^s, \quad \gamma_\tau(s, v) \approx \gamma_\tau(s)|_{v=0} = \gamma_\tau^s \end{aligned} \quad (2.2)$$

При замене усилий $q_{(l)}^i, q_{(l)}^3$, действующих на оболочку, статически им эквивалентной системой контурных сил в рамках модели типа Тимошенко входящая в (2.2) производная $\partial w / \partial v|_{v=0}$ должна быть выражена через γ_n . С этой целью воспользуемся выражением $2\varepsilon_{is} = \nabla_i w + b_i^k u_k + \gamma_i$ из (1.4), откуда, пренебрегая деформацией поперечного сдвига оболочки по сравнению с углом поворота нормали γ_i и слагаемыми $b_i^k u_k$, можно приблизенно записать (оболочка в пределах области ее контакта с основаниями считается пологой):

$$\nabla_i w \approx -\gamma_i, \quad \partial w / \partial v = -n^i \nabla_i w \approx n^i \gamma_i = \gamma_n \quad (2.3)$$

С учетом этих представлений разложение для прогиба w из (2.2) принимает вид

$$w(s, v) \approx w^s + v \gamma_n \quad (2.4)$$

Подстановка (2.2), (2.4) в (2.1) позволяет выражение для δI_q записать в виде

$$\delta I_q = \int_{\Gamma} (R_n \gamma^s \delta u_n + R_\tau \gamma^s \delta u_\tau + R_m \gamma^s \delta w + G_n \gamma^s \delta \gamma_n + G_\tau \gamma^s \delta \gamma_\tau) ds \quad (2.5)$$

$$R_n \gamma^s = \sum \int_0^{t_{(l)}} q_{(l)}^i n_i dv, \quad R_\tau \gamma^s = \sum \int_0^{t_{(l)}} q_{(l)}^i \tau_i dv \quad (2.6)$$

$$R_m \gamma^s = \sum \int_0^{t_{(l)}} q_{(l)}^3 dv, \quad G_\tau \gamma^s = \sum \delta_{(l)} \int_0^{t_{(l)}} h q_{(l)}^i \tau_i dv$$

$$G_n \gamma^s = \sum \delta_{(l)} \int_0^{t_{(l)}} h (q_{(l)}^i n_i + q_{(l)}^3 v) dv$$

Как следует из анализа структуры выражения (2.5), проведенные преобразования соответствуют приведению усилий $\mathbf{q}^{(l)}$, действующих на оболочку со стороны оснований, к статически эквивалентной системе усилий, приложенных к ее контуру. При этом предварительное удовлетворение кинематическим условиям сопряжения оболочки с основаниями (1.12) позволяет выразить компоненты перемещений для оснований через компоненты перемещений оболочки

$$\gamma_i^{(l)} = (U_i^{(l)} - u_i + \delta_{(l)} h \gamma_i) / (2b_{(l)}), \quad \gamma^3 = (U_3^{(l)} - w - \delta_{(l)} h \gamma) / (2b_{(l)}) \quad (2.7)$$

уравнения равновесия (1.7) и отвечающие им граничные условия (1.9) представить в виде

$$F^i = \nabla_k T^{ik} - b_k^i T^{k3} + \Delta(p_{(+)} + p_{(-)}) = 0$$

$$F^3 = \nabla_k T^{k3} + b_{ik} T^{ik} + \Delta(p_{(+)} + p_{(-)}) = 0 \quad (2.8)$$

$$F^{i+3} = \nabla_k M^{ik} - T^{i3} + \Delta h(p_{(+)}^i - p_{(-)}^i) = 0$$

$$R_n = T^{ik} n_k n_i = R_n^{*s} \quad (\delta u_n \neq 0), \quad R_\tau = T^{ik} n_k \tau_i = R_\tau^{*s} \quad (\delta u_\tau \neq 0)$$

$$R_m = T^{i3} n_i = R_m^{*s} \quad (\delta w \neq 0), \quad G_n = M^{ik} n_k n_i = G_n^{*s} \quad (\delta \gamma_n \neq 0)$$

$$G_\tau = M^{ik} n_k \tau_i = G_\tau^{*s} \quad (\delta \gamma_\tau \neq 0) \quad (2.9)$$

$$R_n^{*s} = R_n^s + R_n^{\sim s}, \quad R_\tau^{*s} = R_\tau^s + R_\tau^{\sim s}, \quad R_m^{*s} = R_m^s + R_m^{\sim s}$$

$$G_n^{*s} = G_n^s + G_n^{\sim s}, \quad G_\tau^{*s} = G_\tau^s + G_\tau^{\sim s}$$

а входящие в (2.9) выражения (2.6), развернутые с учетом разложений $q_{(l)}^i = q_{(l)}^{\sim i} - a^{ij} y_j^{(l)} q_{(l)}^{\sim 3}$, $q_{(l)}^3 = q_{(l)}^{\sim i} y_i^{(l)} + q_{(l)}^{\sim 3}$ и соотношений (1.8), записать в форме

$$R_n^{\sim s} = \frac{1}{2} \sum_0^{t_{(l)}} (a^{ij} y_j^{(l)} \Phi_{(l)}^3 - \Phi_{(l)}^i) n_i b_{(l)} dv$$

$$R_\tau^{\sim s} = \frac{1}{2} \sum_0^{t_{(l)}} (a^{ij} y_j^{(l)} \Phi_{(l)} - \Phi_{(l)}) \tau_i b_{(l)} dv \quad (2.10)$$

$$R_m^{\sim s} = -\frac{1}{2} \sum_0^{t_{(l)}} (\Phi_{(l)}^i y_i^{(l)} + \Phi_{(l)}) b_{(l)}^{-1} dv$$

$$G_\tau^{\sim s} = \frac{1}{2} \sum_{\delta(l)}^{t_{(l)}} h (a^{ij} y_j^{(l)} \Phi_{(l)}^3 - \Phi_{(l)}^i) \tau_i b_{(l)} dv$$

$$G_n^{\sim s} = \frac{1}{2} \sum_{\delta(l)}^{t_{(l)}} h [(a^{ij} y_j^{(l)} \Phi_{(l)}^3 - \Phi_{(l)}^i) n_i - (\Phi_{(l)} y_i^{(l)} + \Phi_{(l)}^3) v] b_{(l)}^{-1} dv$$

Последние после подстановки $\Phi_{(l)}^i$, $\Phi_{(l)}^3$ из (1.8) интегрирования с учетом статических краевых условий для оснований (1.10) и последовательного использования физических соотношений для оснований и зависимостей (2.7) могут быть выражены через компоненты перемещений оболочки.

Следует заметить, что построенная для описания деформирования рассматриваемых конструкций система разрешающих уравнений совместно с неприведенными здесь физическими соотношениями является замкну-

той и имеет структуру системы уравнений теории оболочек типа Тимошенко.

3. В рамках предложенного приближенного подхода рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии оболочки вращения исследуемого класса при их осесимметричном нагружении. В этом случае уравнения равновесия (2.8) и граничные условия (2.9) в физических компонентах усилий, моментов и перемещений принимают вид

$$(A_2 T_{11})_{,1} - A_{2,1} T_{22} + A_1 A_2 k_1 T_{13} = -\Delta A_1 A_2 (p_{(+)}^1 + p_{(-)}^1)$$

$$(A_2 T_{13})_{,1} - A_1 A_2 (k_1 T_{11} + k_2 T_{22}) = -\Delta A_1 A_2 (p_{(+)}^3 + p_{(-)}^3)$$

$$(A_2 M_{11})_{,1} - A_{2,1} M_{22} - A_1 A_2 T_{13} = -\Delta A_1 A_2 h (p_{(+)}^1 - p_{(-)}^1)$$

$$T_{11} = R_{11} * (\delta u_1 \neq 0), T_{13} = R_{13} * (\delta w \neq 0), M_{11} = G_{11} * (\delta \gamma_1 \neq 0)$$

где k_i, A_i — главные кривизны и параметры Ляме на срединной поверхности оболочки σ ; $R_{11} = R_{11} + R_{11}$, $R_{13} = R_{13} + R_{13}$, $G_{11} = G_{11} + G_{11}$ — компоненты контурной нагрузки, действующей на оболочку и состоящей из компонентов заданных контурных усилий и моментов R_{11}, R_{13}, G_{11} и контурной нагрузки R_{11}, R_{13} и G_{11} , статически эквивалентной действующим со стороны оснований на оболочку контактных реактивных усилий $q_{(l)}^1, q_{(l)}^3$. Для определения величин R_{11}, R_{13}, G_{11} в рассматриваемом случае имеют место выражения

$$R_{11} = -\frac{\mu}{2} \sum \int_{\alpha_{a(l)}^1}^{\alpha_{b(l)}^1} \left(\frac{A_{2,1}}{A_2 b_{(l)}} M_{22}^{(l)} - \frac{A_{2,1}}{A_2} T_{22}^{(l)} + \frac{A_1}{b_{(l)}} T_{13}^{(l)} \right) d\alpha^1$$

$$R_{13} = \frac{\mu}{2} \sum \int_{\alpha_{a(l)}^1}^{\alpha_{b(l)}^1} \frac{A_1}{b_{(l)}} [k_1^{(l)} (M_{11}^{(l)} - b_{(l)} T_{11}^{(l)}) + k_2^{(l)} (M_{22}^{(l)} - b_{(l)} T_{22}^{(l)}) + T_{33}^{(l)}] d\alpha^1$$

$$G_{11} = \frac{\mu}{2} \sum \int_{\alpha_{a(l)}^1}^{\alpha_{b(l)}^1} \left\{ \frac{h}{A_2 h_{(l)}} [A_{2,1} (M_{22}^{(l)} - b_{(l)} T_{22}^{(l)}) - A_1 A_2 T_{13}^{(l)}] - \right. \\ \left. - A_1^2 b_{(l)}^{-1} (\alpha^1 - \alpha_{a(l)}^1) [k_1^{(l)} (M_{11}^{(l)} - b_{(l)} T_{11}^{(l)}) + k_2^{(l)} (M_{22}^{(l)} - b_{(l)} T_{22}^{(l)}) + T_{33}^{(l)}] \right\} d\alpha^1$$

которые с помощью физических соотношений для изотропного материала оснований (цифры в скобках означают циклическую перестановку индексов):

$$T_{11}^{(l)} = B^{(l)} [(1 - v^{(l)}) \varepsilon_{11}^{(l)} + v^{(l)} (\varepsilon_{22}^{(l)} + \varepsilon_{33}^{(l)})] \quad (1, 2, 3)$$

$$M_{11}^{(l)} = D^{(l)} [(1 - v^{(l)}) \kappa_{11}^{(l)} + v^{(l)} \kappa_{22}^{(l)}] \quad (1, 2)$$

$$T_{13}^{(l)} = B_c^{(l)} \varepsilon_{13}^{(l)}, \quad M_{13}^{(l)} = D_c^{(l)} \kappa_{13}^{(l)}$$

$$B^{(l)} = 2E^{(l)} h_{(l)} (1 + v^{(l)})^{-1} (1 - 2v^{(l)})^{-1}, \quad D^{(l)} = \frac{1}{3} B^{(l)} h_{(l)}^2, \quad B_c^{(l)} = 2G^{(l)} h_{(l)},$$

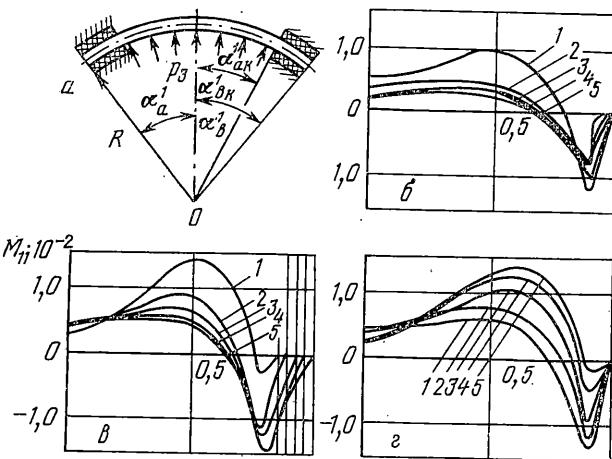
$$D_c^{(l)} = \frac{1}{3} B_c^{(l)} h_{(l)}^2$$

зависимостей между компонентами деформаций и перемещений

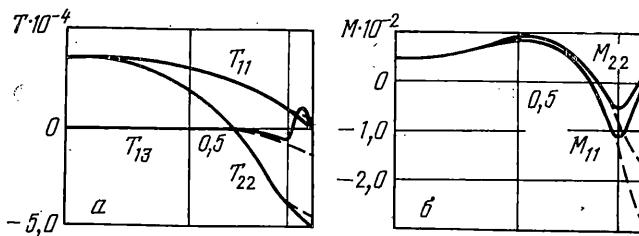
$$\varepsilon_{11}^{(l)} = A_1^{-1} u_{1,1}^{(l)} + k_1^{(l)} w^{(l)}, \quad \varepsilon_{22}^{(l)} = (A_1 A_2)^{-1} A_{2,1} u_1^{(l)} + k_2^{(l)} w^{(l)}, \quad \varepsilon_{33}^{(l)} = \gamma^{(l)}$$

$$2\varepsilon_{13}^{(l)} = A_1^{-1} w_{,1}^{(l)} - k_1^{(l)} u_1^{(l)} + \gamma_1^{(l)}, \quad \kappa_{11}^{(l)} = A_1^{-1} \gamma_{1,1}^{(l)} + k_1^{(l)} \gamma^{(l)}$$

$$\kappa_{22}^{(l)} = (A_1 A_2)^{-1} A_{2,1} \gamma_1^{(l)} + k_2^{(l)} \gamma^{(l)}, \quad 2\kappa_{13}^{(l)} = A_1^{-1} \gamma_{1,1}^{(l)}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

и условий сопряжения оснований с оболочкой $\gamma_1^{(l)} = -1/2 b_{(l)}^{-1} (u_1 + \delta_{(l)} h \gamma_1)$, $\gamma^{(l)} = -1/2 b_{(l)}^{-1} w$ могут быть выражены через компоненты перемещений оболочки u_1 , w , γ_1 . В приведенных выражениях $\mu=1$ при $\alpha^1=\alpha_a^1$ и $\mu=-1$ при $\alpha^1=\alpha_b^1$; $B^{(l)}$, $D^{(l)}$, $B_c^{(l)}$, $D_c^{(l)}$ — жесткости оснований на растяжение, изгиб и сдвиг; $E^{(l)}$, $G^{(l)}=E^{(l)}/(2(1+v^{(l)})$), $v^{(l)}$ — модули упругости и сдвига материала оснований и коэффициент Пуассона.

Численная реализация рассматриваемой задачи осуществлена на основе метода конечных сумм [6] в варианте [7] в рамках соотношений как неупрощенной (п.1), так и упрощенной (п.2) моделей.

С целью оценки влияния параметров упругих оснований на состояние оболочных элементов конструкций проведены параметрические исследования для фрагмента сферической оболочки, скрепленной вдоль контура с опорными основаниями на обеих лицевых поверхностях (фиг. 3, а). Данная деформируемая система является расчетной схемой иллюминатора пассажирского самолета. При проведении расчетов приняты следующие значения геометрических и физических параметров: радиус оболочки $R=53,5$ см; толщина оболочки $2h=1$ см; угол занимаемый оболочкой $\alpha_b^1=0,424$; модуль упругости материала оболочки $E=3090$ МПа, коэффициент Пуассона $v=0,38$. Для оснований соответствующие параметры варьировались в пределах ($v^{(l)}=0,485$): $2h_{(l)}=0,1 \div 2,0$ см; $\alpha_b^1 - \alpha_{a(l)}^1 = 0,0212 \div 0,106$; $E^{(l)}=3,09 \div 3,09 \cdot 10^5$ МПа ($l=1,2$). Расчеты проведены для случая нагружения оболочки избыточным давлением $p_{(-)}^3=0,1$ МПа.

На фиг. 3 представлены кривые, показывающие характер распределения вдоль меридиана внутреннего изгибающего момента $M_{11}(H)$ в зависимости от относительного модуля упругости оснований $E=E^{(l)}/E$ (фиг. 3, б), относительной ширины $\alpha_{(l)}^1=(\alpha_b^1-\alpha_{a(l)}^1)/\alpha_b^1$ (фиг. 3, в), и относительной толщины $h^*=h_{(l)}/h$ (фиг. 3, г).

При этом номера представленных кривых соответствуют следующим значениям указанных относительных параметров: для E^* ($1-10^{-3}$; $2-10^{-2}$; $3-10^{-1}$; $4-10^0$; $5-10^1$) при $h^*=0,25$, $\alpha_{(l)}^{1*}=0,1$; для $\alpha_{(l)}^{1*}$ ($1-0,05$; $2-0,10$; $3-0,15$; $4-0,20$; $5-0,25$)

при $E^*=10^{-3}$, $h^*=0,25$; для h^* (1 – 0,10; 2 – 0,25; 3 – 0,50; 4 – 1,0; 5 – 1,5) при $E^*=10^{-3}$, $\alpha_{(l)}^{1*}=0,1$.

Приведенные результаты свидетельствуют о существенном влиянии параметров опорного закрепления на состояние оболочки, соответствующий выбор которых позволяет управлять напряженно-деформированным состоянием конструкций рассматриваемого класса.

Для оболочки с указанными выше параметрами и параметрами упругих оснований $2h^{(l)}=0,25$ см; $\alpha_b^{(l)}-\alpha_a^{(l)}=0,0424$, $E^{(l)}=3$ МПа ($l=1,2$) на фиг. 4 приведено сопоставление результатов расчета, полученных на основе соотношений неупрощенной модели, отвечающей контактной постановке задачи (сплошные линии), с результатами по изложенной выше приближенной методике (штриховые линии). Проведенные исследования показали (фиг. 4), что в широком диапазоне изменения относительных параметров упругого закрепления, отвечающем реальным конструкциям, приближенная методика позволяет с приемлемой для практики точностью определять напряженное и деформированное состояния оболочки во всей области, свободной от ее контакта с упругими основаниями.

В зоне контакта оболочки с основаниями имеет место существенное различие сопоставляемых результатов. В этой области в рамках контактной постановки задач в соответствии с граничными условиями свободного края оболочки параметры напряженного состояния всегда имеют тенденцию к понижению (фиг. 4), а выявляющееся в рамках приближенной постановки повышение уровня напряжений в реальных конструкциях не имеет места и ими не определяется прочность оболочек рассматриваемого класса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов С. П., Паймушин В. Н., Фирсов В. А. Осесимметричная деформация оболочек вращения, взаимодействующих на лицевых поверхностях с упругими основаниями // Вопросы прочности и долговечности элементов авиационных конструкций. Куйбышев: Куйбышев. авиац. ин-т, 1983. С. 37–43.
2. Фирсов В. А., Кузнецов С. П. К решению задач статики и термоупругости тонких оболочек с деформируемым опорным контуром // Прочность конструкций летательных аппаратов. Казань: Казан. авиац. ин-т, 1986. С. 8–12.
3. Паймушин В. Н., Фирсов В. А., Мамедов Х. Б. Осесимметричные деформации элементов остеклений летательных аппаратов с учетом податливости опорных закреплений // Изв. вузов. Авиац. техника. 1987. № 4. С. 43–48.
4. Паймушин В. Н., Фирсов В. А. Уравнения нелинейной теории контактного взаимодействия тонких оболочек с деформируемыми основаниями переменной толщины // Изв. АН СССР, МТТ. 1985. № 3. С. 119–128.
5. Галимов К. З., Артюхин Ю. П., Карасев С. Н. и др. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. 211 с.
6. Вахитов М. Б. Интегрирующие матрицы – аппарат численного решения дифференциальных уравнений строительной механики // Изв. вузов. Авиац. техника. 1966. № 3. С. 50–61.
7. Фирсов В. А. Аппарат метода конечных сумм на основе сплайн-аппроксимации // Актуальные проблемы механики оболочек. Казань: Казан. авиац. ин-т, 1985. С. 124–132.

Казань

Поступила в редакцию
5.1.1988