МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1989

УДК 539.375

В. И. КОНДАУРОВ, Л. В. НИКИТИН

МОДЕЛЬ КОНТИНУАЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД

Развивается континуальная модель неупругих сред, для которых существенны процессы зарождения и эволюции микродефектов – микротрещин, пор, межзеренных пустот. Основы феноменологического описания поведения таких материалов заложены теориями поврежденности [1–3], представление об основных направлениях развития которых дано в [4–13].

В отличие от традиционного описания в данной работе используется подход, опирающийся на понятия собственной энергии и диссипации континуального разрушения. Показано, что изменение поврежденности управляется уравнением баланса плотности собственной и внутренней энергий материала, которое аналогично условию Гриффитса в механике изолированной трещины. Рассматривается сферически симметричная задача о развитии зоны рассеянного разрушения вокруг полости в вязкоупругом материале.

1. Законы сохранения и неравенство диссипации. Пусть на начальной конфигурации $\varkappa$ тела помимо вектора текущего положения $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{X}\in\varkappa$, $t\geqslant 0$ и температуры $\theta=\theta(\mathbf{X}, t)$ частицы $\mathbf{X}$ определен тензор второго ранга $\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}(\mathbf{X}, t)$, который характеризует поврежденность материала. Область применимости такой меры поврежденности обсуждалась в [3].

Обозначим $\rho_\varkappa$ – плотность массы в $\varkappa$, ρ – в текущей конфигурации χ, $\mathbf{F}$ – градиент отображения $\varkappa\to\chi$, так что $d\mathbf{x}=\mathbf{F}d\mathbf{X}$. Пусть $\mathbf{b}$ – вектор массовых сил, $\mathbf{T}_\varkappa$ – тензор напряжений Пиолы – Кирхгоффа первого рода.

Законы сохранения массы, импульса, момента импульса и совместности скоростей и деформаций запишем в виде

$$\rho \det \mathbf{F}=\rho_\varkappa,\quad \rho\mathbf{v}^\cdot-\operatorname{Div}\mathbf{T}_\varkappa=\rho_\varkappa\mathbf{b}$$
$$\mathbf{T}_\varkappa\mathbf{F}^T=\mathbf{F}\mathbf{T}_\varkappa^T,\quad \mathbf{F}^\cdot-\operatorname{Div}(\mathbf{v}\otimes\mathbf{I})=0 \tag{1.1}$$

Здесь и далее Div – дивергенция в переменных $\mathbf{X}$, $\mathbf{I}$ – единичный тензор.

Система (1.1) совпадает с соответствующими уравнениями классической неполярной сплошной среды [16, 17]. В отличие от законов сохранения (1.1) аксиома локального баланса энергии записывается в измененном виде

$$\rho_\varkappa\varepsilon^\cdot=\mathbf{T}_\varkappa : \mathbf{F}^\cdot+Q_T+Q_f \tag{1.2}$$
$$Q_T\equiv\operatorname{Div}\mathbf{q}_\varkappa+\rho_\varkappa r_T,\quad Q_f=\rho_\varkappa(r_f-\varepsilon_f^\cdot)$$

где ε – плотность внутренней энергии, $\mathbf{q}_\varkappa$ – вектор теплового потока в переменных $\mathbf{X}$, Q_T – приток энергии за счет теплопроводности и действия распределенных источников тепла, Q_f – приток энергии, обусловленный источниками (и стоками) нетермомеханической природы, связанными с изменением поврежденности материала. Величина r_f – плотность распределенных источников энергии, связанных с изменением поврежденности за счет внешнего, независящего от $\mathbf{F}$ и θ, воздействия на геометрию и количество микродефектов. Скаляр r_f – произвольная заданная функция $(\mathbf{X}, t)$, которая может быть тождественно равна нулю. Величина ε_f – плотность поверхностной энергии, скорость изменения которой отлична от нуля в любом процессе континуального разрушения. Введение ε_f определяет связь рассеянного разрушения с изменением свободной поверхности берегов микротрещин.

Энергетическое соотношение Гриффитса для изолированной трещины [14, 15] следует из (1.2), если r_f и $\varepsilon_f^{\cdot}$ — дельта-функции с носителем, совпадающим с вершиной трещины.

Наряду с плотностью энтропии η, которая сопряжена с температурой θ, предполагается существование тензора второго ранга $\mathbf{\Pi}$ реакции материала, сопряженной с тензором поврежденности $\boldsymbol{\pi}$.

Второй принцип термодинамики формулируется в виде обобщенного неравенства Клаузиуса — Дюгема [18, 19]:

$$\delta_M+\delta_T+\delta_f\geqslant 0 \tag{1.3}$$

где $\delta_M\equiv\theta\eta^{\cdot}-\rho_\varkappa^{-1}(\mathrm{Div}\,\mathbf{q}_\varkappa+\rho_\varkappa r_T)$ — механическая (внутренняя) диссипация, $\delta_T\equiv(\rho_\varkappa\theta)^{-1}\mathbf{q}_\varkappa\nabla_\varkappa\theta$ — термическая диссипация, $\delta_f\equiv\boldsymbol{\pi}:\mathbf{\Pi}^{\cdot}-Q_f=\boldsymbol{\pi}:\mathbf{\Pi}^{\cdot}+\varepsilon_f^{\cdot}-r_f$ — диссипация континуального разрушения, ∇, $\nabla_\varkappa$ — градиенты в переменных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{X}$, соответственно.

Сходная структура определений δ_M и δ_f показывает, что тензор $\mathbf{\Pi}$ является аналогом плотности энтропии, и может быть назван тензором энтропии поврежденности.

Используя (1.2), соотношение (1.3) можно преобразовать к форме

$$-\varepsilon^{\cdot}+\rho_\varkappa^{-1}\mathbf{T}_\varkappa:\mathbf{F}^{\cdot}+\theta\eta^{\cdot}+\boldsymbol{\pi}:\mathbf{\Pi}^{\cdot}+(\rho_\varkappa\theta)^{-1}\mathbf{q}_\varkappa\nabla_\varkappa\theta\geqslant 0 \tag{1.4}$$

удобной для изучения ограничений на допустимую форму определяющих соотношений.

2. Определяющие соотношения. Основной принцип теории определяющих уравнений — принцип макроскопической определимости [16] — с учетом влияния поверхностной энергии в процессах континуального разрушения модифицируется следующим образом. Пусть

$$\lambda(\mathbf{X},\tau)\equiv\{\mathbf{F}(\mathbf{X},\tau),\ \eta(\mathbf{X},\tau),\ \mathbf{\Pi}(\mathbf{X},\tau)\},\ \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{X},\tau)\equiv\nabla\theta(\mathbf{X},\tau)$$

Обозначим $\{\lambda(\mathbf{X},\tau),\ \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{X},\tau)\}$ — состояние частицы $\mathbf{X}$ в момент времени τ, $\Sigma(\mathbf{X},t)\equiv\{\varepsilon,\ \mathbf{T}_\varkappa,\ \theta,\ \boldsymbol{\pi},\ \varepsilon_f,\ \mathbf{q}_\varkappa\}$ — реакцию частицы $\mathbf{X}$ в момент времени t на предысторию состояний $\{\lambda(\mathbf{X},\tau),\ \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{X},\tau)\}$, $\tau\leqslant t$. Тогда принцип термодинамически согласованной макроскопической определимости для повреждающихся сред можно записать в форме

$$\Sigma(\mathbf{X},t)=\Sigma\{\lambda(\mathbf{X},\tau),\ \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{X},\tau),\ \mathbf{X},\ t\}_{\tau=-\infty}^{\tau=t} \tag{2.1}$$

где определяющие функционалы (2.1) должны удовлетворять неравенству диссипации (1.4) для любых предысторий $\lambda(\tau)$, $\boldsymbol{\gamma}(\tau)$, если в момент $\tau=t$ существуют производные $\lambda^{\cdot}(\tau)$, $\varepsilon^{\cdot}(\tau)$.

В дальнейшем рассматриваются однородные, нестареющие материалы, поэтому явная зависимость (2.1) от $\mathbf{X}$ и t отсутствует. Зависимостью от предыстории $\boldsymbol{\gamma}(\tau)$, $\tau<t$ пренебрегается. Влияние предыстории $\lambda(\tau)$ на текущее состояние осуществляется введением внутреннего параметра $\mathbf{P}$, изменение которого описывается обыкновенным дифференциальным уравнением — законом вязкого течения. Таким образом

$$\Sigma(t)=\Sigma^+\{\mu(t),\ \boldsymbol{\gamma}(t)\} \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{P}^{\cdot},\ \mu(t))=0,\ \mu\equiv\{\mathbf{F},\ \eta,\ \mathbf{\Pi},\ \mathbf{P}\} \tag{2.3}$$

где Σ^+ — функция текущих значений своих аргументов. Предполагается, что функционал $\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}\{\lambda(\tau)\}_{\tau=-\infty}^{\tau=t}$, представляющий собой решение уравнения (2.3) при заданной предыстории $\lambda(\tau)$ обладает свойством затухающей памяти и, следовательно, не зависит от начальных данных при $\tau\to-\infty$. Этот тип материалов будем называть повреждающимся вязкоупругим материалом релаксационного типа.

Предполагая, что $\Lambda\equiv\{\rho_\varkappa^{-1}\mathbf{T}_\varkappa,\ \theta,\ \boldsymbol{\pi}\}$ — непрерывная, а ε — непрерывно-дифференцируемая функция, из (1.4) получим

$$\Lambda=\partial\varepsilon/\partial\lambda,\ \partial\varepsilon/\partial\boldsymbol{\gamma}=0,\ -\partial\varepsilon/\partial\mathbf{P}:\mathbf{P}^{\cdot}+\delta_T\geqslant 0 \tag{2.4}$$

Поскольку в силу (2.3) $\mathbf{P}^{\cdot}$ — функция $\mu(t)$, и, следовательно, $\delta(\mu) \equiv -(\partial\varepsilon/\partial\mathbf{P}) : \mathbf{P}^{\cdot}$ не зависит от γ, а $\delta_T=0$ при $\gamma=0$, то величина $\delta \geqslant 0$ всегда. Это значит, что

$$\delta_T \geqslant 0, \quad \delta \equiv \delta_M + \delta_f \geqslant 0 \tag{2.5}$$

Пусть для рассматриваемой среды справедливо предположение: $\varepsilon_f^{\cdot}=0$, $r_f=0$ при $\mathbf{\Pi}^{\cdot}=0$. Достаточным условием для этого служит

$$\varepsilon_f^{\cdot}=\mathbf{G}(\mathbf{\Pi}) : \mathbf{\Pi}^{\cdot}, \quad r_f=\mathbf{G}_*(t) : \mathbf{\Pi}^{\cdot} \tag{2.6}$$

где $\mathbf{G}$ — тензор сопротивления росту поврежденности среды, а тензор второго ранга $\mathbf{G}_*(t)$ — тензор плотности источников поврежденности.

Пусть также справедливо предположение, что из любого текущего состояния $\mu(\mathbf{X}, t)$ рассматриваемой частицы $\mathbf{X}$ возможно пассивное продолжение процесса, при котором $\mathbf{\Pi}^{\cdot}=0$. Указанные предположения типичны для механики изолированной трещины в вязкоупругих телах [20].

Тогда из определения δ_f с учетом (2.6) следует, что $\delta_f=0$ при $\mathbf{\Pi}^{\cdot}=0$. Поскольку δ_M не зависит от $\mathbf{\Pi}^{\cdot}$, то из второго соотношения (2.5) следует $\delta_f=0$, $\delta_M=\delta(\mu)$ при любых $\mathbf{\Pi}^{\cdot}$. Это означает, что среда, для которой приемлемы предположения (2.6) вместе с гипотезой о возможности пассивного продолжения процесса из любого состояния, является совершенной в смысле энергетики разрушения: увеличение поверхностной энергии в точности равно изменению запасенной энергии в сумме с энергией распределенных источников поврежденности.

Таким образом получаем уравнение изменения плотности энтропии

$$\rho_\kappa\theta\eta^{\cdot} - \operatorname{Div}\mathbf{q}_\kappa = \rho_\kappa(r_T+\delta) \tag{2.7}$$

и дополнительное уравнение баланса энергии в процессе континуального разрушения

$$(\partial\varepsilon/\partial\mathbf{\Pi} + \mathbf{G} - \mathbf{G}_*) : \mathbf{\Pi}^{\cdot} = 0 \tag{2.8}$$

Если воспользоваться другим термодинамическим потенциалом — плотностью свободной энергии $A(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{\Pi}, \mathbf{P}, \gamma)=\varepsilon-\theta\eta$ и считать независимыми переменными $(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{\Pi}, \mathbf{P}, \gamma)$, то соотношения (2.4) приводятся к виду

$$\mathbf{T}_\kappa=\rho_\kappa\partial A/\partial\mathbf{F}, \quad \eta=-\partial A/\partial\theta, \quad \partial A/\partial\gamma=0, \quad \boldsymbol{\pi}=\partial A/\partial\mathbf{\Pi}$$

Уравнение (2.7) преобразуется в уравнение для скорости изменения температуры

$$\rho_\kappa c_F\theta^{\cdot} = \theta\left.\frac{\partial\mathbf{T}_\kappa}{\partial\theta}\right|_{F,\Pi} : \mathbf{F}^{\cdot} + \rho_\kappa\theta\left.\frac{\partial\boldsymbol{\pi}}{\partial\theta}\right|_{F,\Pi} : \mathbf{\Pi}^{\cdot} + \operatorname{Div}\mathbf{q}_\kappa + \rho_\kappa r_T$$

Из соотношения (2.8) следует, что возможны два процесса: пассивный, в котором $\mathbf{\Pi}^{\cdot}=0$, и активный, в котором в силу произвольности $\mathbf{G}_*(t)$ имеет место

$$\partial\varepsilon/\partial\mathbf{\Pi} + \mathbf{G} - \mathbf{G}_*(t) = 0, \quad \mathbf{\Pi}^{\cdot} \neq 0 \tag{2.9}$$

В используемом подходе в качестве естественной нормы поврежденности выступает плотность накопленной поверхностной энергии. Условие отсутствия залечивания микродефектов, которым можно пренебречь во многих процессах, формулируется тогда в виде $\varepsilon_f^{\cdot}=\mathbf{G} : \mathbf{\Pi}^{\cdot} \geqslant 0$, причем в активном процессе

$$\varepsilon_f^{\cdot} = \mathbf{G} : \mathbf{\Pi}^{\cdot} > 0 \tag{2.10}$$

Условие (2.10) вместе с уравнением (2.9) накладывает ограничение на состояние $(\mathbf{F}, \eta, \mathbf{\Pi}, \mathbf{P})$ и скорости изменения $(\mathbf{F}^{\cdot}, \eta^{\cdot}, \mathbf{G}_*^{\cdot})$, при которых реализуется активный процесс. Дифференцируя (2.9) по t, приходим к кинетическому уравнению для $\mathbf{\Pi}^{\cdot}$:

$$\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\mathbf{\Pi}\,\partial\mathbf{\Pi}} + \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{\Pi}}\right) : \mathbf{\Pi}^{\cdot} = \mathbf{G}_*^{\cdot} - \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\mathbf{\Pi}\,\partial\mathbf{F}} : \mathbf{F}^{\cdot} - \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\mathbf{\Pi}\,\partial\eta}\eta^{\cdot} - \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\mathbf{\Pi}\,\partial\mathbf{P}} : \mathbf{P}^{\cdot}(\mu) \tag{2.11}$$

Из (2.11) следует, что в вязкоупругом повреждающемся материале продолжения процесса, такие что $\mathbf{F}^{\cdot}$, $\eta^{\cdot}$, $G_*^{\cdot}=0$, могут сопровождаться изменением поврежденности. Это обусловлено последним слагаемым в (2.11), которое в силу закона вязкого течения (2.3) зависит только от текущего состояния, но не от скорости его изменения.

Рассмотрим теперь вопрос о макроскопической интерпретации внутреннего параметра $\mathbf{P}$ и тензора энтропии поврежденности $\mathbf{\Pi}$. Используя предположение, что из любого состояния $\mu(t_0)\equiv\{\mathbf{F}(t_0),\ \eta(t_0),\ \mathbf{\Pi}(t_0),\ \mathbf{P}(t_0)\}$ возможно пассивное ($\mathbf{\Pi}^{\cdot}=0$) продолжение процесса, мгновенной деформацией ($\|\mathbf{F}^{\cdot}\|\to\infty$) при неизменной энтропии ($\eta^{\cdot}=0$) и ограниченной $\mathbf{P}^{\cdot}$ можно перейти к другой конфигурации материального элемента, состояние которого $\mu^*(t_0)\equiv\{\mathbf{F}^*(t_0),\ \eta(t_0),\ \mathbf{\Pi}(t_0),\ \mathbf{P}(t_0)\}$. Будем считать, что таким переходом можно достичь разгруженного состояния, в котором

$$\mathbf{T}_\varkappa\{\mathbf{F}^*(t_0),\ \eta(t_0),\ \mathbf{\Pi}(t_0),\ \mathbf{P}(t_0)\} \tag{2.12}$$

Конфигурацию $\varkappa^*$ тела, составленного из таких, несовместимых в общем случае, элементов, будем называть мгновенно-разгруженной конфигурацией.

Пусть далее элемент остается в разгруженном состоянии и в нем происходит процесс обратной ползучести, т. е. изменения $\mathbf{P}(t_0+\xi)$, $\mathbf{F}(t_0+\xi)$, $0\leqslant\xi<\infty$ при $\mathbf{T}_\varkappa=0$, $\eta=\eta(t_0)$, $\mathbf{\Pi}=\mathbf{\Pi}(t_0)$. Обозначим

$$\mathbf{F}^\times(t_0)=\lim_{\xi\to\infty}\mathbf{F}^*(t_0+\xi),\quad \mathbf{P}^\times(t)=\lim_{\xi\to\infty}\mathbf{P}(t_0+\xi)$$

При этом имеет место

$$\begin{gathered}\mathbf{P}^{\cdot}=\mathbf{\Psi}\{\mu^\times(t_0)\}=0,\ \ \mathbf{T}_\varkappa\{\mu^\times(t_0)\}=0\\ \mu^\times\equiv\{\mathbf{F}^\times(t_0),\ \eta(t_0),\ \mathbf{\Pi}(t_0),\ \mathbf{P}^\times(t_0)\}\end{gathered} \tag{2.13}$$

Конфигурацию $\varkappa^\times$, составленную из элементов с градиентом деформации $\mathbf{F}^\times(t_0)$, будем называть восстановленной конфигурацией.

Если тензоры $\mathbf{\Pi}(t_0)$ и $\mathbf{P}^\times(t_0)$ могут быть выражены через $\mathbf{F}^\times(t_0)$ из системы (2.13), а $\mathbf{P}(t_0)$ — через $\mathbf{F}^*(t_0)$ и $\mathbf{\Pi}(\mathbf{F}^\times(t_0))$ из (2.12), то $\mathbf{F}^\times(t_0)$ можно рассматривать как макроскопическую характеристику энтропии повреждаемости $\mathbf{\Pi}$, а градиент $\mathbf{F}^*(\mathbf{F}^\times)^{-1}$ отображения $\varkappa^\times\to\varkappa^*$ можно считать макроскопической характеристикой $\mathbf{P}$.

Отождествляя тензор $\mathbf{\Pi}$ с $\mathbf{F}^\times$, а $\mathbf{P}$ — с $\mathbf{F}^*(\mathbf{F}^\times)^{-1}$, отображение $\varkappa\to\chi$ начальной конфигурации в текущую можно представить в виде последовательности невырожденных отображений $\varkappa\to\varkappa^\times$, $\varkappa^\times\to\varkappa^*$, $\varkappa^*\to\chi$ с градиентами $\mathbf{\Pi}$, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}=\mathbf{F}(\mathbf{F}^*)^{-1}$, соответственно. Для градиента $\mathbf{F}$ отображения $\varkappa\to\chi$ имеет место композиция

$$\mathbf{F}=\mathbf{E}\mathbf{P}\mathbf{\Pi} \tag{2.14}$$

представляющая собой обобщение композиции $\mathbf{F}=\mathbf{E}\mathbf{P}$ для упругопластических [21] и вязкоупругих сред.

В случае, если $\varkappa^\times$ равноправна с $\varkappa$, т. е. процесс обратной ползучести возвращает элемент среды в конфигурацию, равноправную начальной, ситуация усложняется. Один из возможных способов макроскопической интерпретации $\mathbf{\Pi}$ состоит тогда [12, 13, 22] в сравнении модулей упругости исходного и поврежденного материала в каком-нибудь стандартном состоянии, например, при $\mathbf{T}_\varkappa=0$, $\eta=\eta(0)$. Для сред, поврежденность которых характеризуется тензором, изменяющим симметрию материала, закономерности связи тензоров четвертого ранга модулей упругости мало освещены в исследованиях по континуальному разрушению.

Определяющие соотношения (2.2), (2.3) должны удовлетворять постулатам инвариантности: принципу объективности; условию инвариантности относительно преобразований начальной конфигурации, принадлежащих группе симметрии материала; условию инвариантности относительно преобразований конфигураций $\varkappa^*$ и $\varkappa^\times$, содержащих полную ортогональную группу. Последнее требование, как и в теории конечных деформаций упругопластических сред [21, 23], выражает собой предположение о возможности реализации разгруженного и восстановленного состояния элемента среды как актуального состояния, на котором не сказывается вращение как жесткого целого.

Пусть $g_\varkappa$, $g_{\varkappa^\times}$, $g_{\varkappa^*}$ — группы преобразований $\varkappa$, $\varkappa^\times$ и $\varkappa^*$, при которых определяющие соотношения (2.2) и (2.3) остаются инвариантными. Ограничимся случаем начально-изотропного материала, для которого, по определению, существует неискаженная начальная конфигурация $\varkappa_0$, группа симметрии материала в которой содержит полную ортогональную группу o [17]. Тогда $\mathrm{o}\in g_{\varkappa_0}$, $g_{\varkappa^\times}$, $g_{\varkappa^*}\in\upsilon$, где υ — унимодулярная группа. В силу максимальности $\mathrm{o}\in\upsilon$ группы $g_{\varkappa_0}$, $g_{\varkappa^\times}$, $g_{\varkappa^*}$ совпадают либо с o, либо со всей унимодулярной группой υ. Это позволяет определить в общем случае восемь классов повреждающихся вязкоупругих сред релаксационного типа.

Далее рассматриваются два важнейших класса материалов, обладающих мгновенно-упругой тензорной реакцией

$$g_{\varkappa_0}=g_{\varkappa^\times}=g_{\varkappa^*}=\mathrm{o} \tag{2.15}$$

$$g_{\varkappa^*}=\mathrm{o},\ g_{\varkappa^\times}=g_\varkappa=\upsilon \tag{2.16}$$

Первый из них определяет класс изотропных повреждающихся материалов с минимальной симметрией o в $\varkappa_0$ и $\varkappa^\times$, второй — класс материалов с максимальной симметрией υ в любых $\varkappa$ и $\varkappa^\times$.

Аналогично [24], можно показать, что необходимыми и достаточными условиями термодинамической согласованности и выполнения требований инвариантности определяющих соотношений (2.2), (2.3), (2.9) материалов класса (2.15) будут следующие ограничения

$$\begin{gathered}\varepsilon=\varepsilon^+(\lambda_+),\ \mathbf{T}_\varkappa=\rho_\varkappa\partial\varepsilon^+/\partial\mathbf{F},\ \theta=\partial\varepsilon^+/\partial\eta,\ \boldsymbol{\pi}=\partial\varepsilon^+/\partial\mathbf{U}_\Pi\\ \mathbf{q}=\mathbf{R}\mathbf{q}^+(\lambda_+,\ \nabla_\varkappa\theta),\quad \varepsilon_f=\varepsilon_f^+(\mathbf{U}_\Pi)\\ \mathbf{W}^\cdot=\boldsymbol{\Psi}(\lambda_+),\ \partial\varepsilon^+/\partial\mathbf{U}_\Pi+\mathbf{G}(\mathbf{U}_\Pi)-\mathbf{G}_*(t)=0,\ \mathbf{G}:\mathbf{U}_\Pi^\cdot>0\end{gathered} \tag{2.17}$$

где ε^+, $\mathbf{q}^+$, $\boldsymbol{\Psi}$, ε_f^+ — изотропные функции своих аргументов, $\lambda_+\equiv\{\mathbf{U}_F,\ \mathbf{W},\ \mathbf{U}_\Pi,\ \eta\}$, $\mathbf{W}=\mathbf{R}_\Pi^T\mathbf{U}_P\mathbf{R}_\Pi$, $\mathbf{R}_F$, $\mathbf{R}_P$, $\mathbf{R}_\Pi$ — ортогональные, $\mathbf{U}_F$, $\mathbf{U}_P$, $\mathbf{U}_\Pi$ — симметричные положительно определенные тензоры, входящие в полярные разложения $\mathbf{F}=\mathbf{R}_F\mathbf{U}_F$, $\mathbf{P}=\mathbf{R}_P\mathbf{U}_P$, $\boldsymbol{\Pi}=\mathbf{R}_\Pi\mathbf{U}_\Pi$.

Из (2.17) видно, что рассматриваемый материал обладает свойствами аналогичными свойствам упрочняющейся упругопластической среды — внутренняя энергия, ее производные и закон вязкого течения зависят не только от мгновенно-упругих, но и от вязких деформаций. Поврежденность характеризуется симметричным тензором второго ранга $\mathbf{U}_\Pi$. Тензор вязких деформаций $\mathbf{W}$ не совпадает с симметричным тензором $\mathbf{U}_P$, входящим в полярное разложение $\mathbf{P}=\mathbf{R}_P\mathbf{U}_P$, а зависит также от ортогонального тензора $\mathbf{R}_\Pi$, связанного с вращением частицы за счет повреждаемости $\boldsymbol{\Pi}$. При этом $\mathbf{R}_\Pi$ входят в $\mathbf{W}$ таким образом, что $\mathbf{W}$ — симметричный положительно-определенный тензор. Поскольку тензоры $\mathbf{R}_\Pi$ и $\mathbf{U}_P$ не фигурируют в системе уравнений кроме как в комбинации $\mathbf{W}=\mathbf{R}_\Pi^T\mathbf{U}_P\mathbf{R}_\Pi$, то их вычисление по отдельности невозможно и ненужно. Конструкция $\mathbf{W}$ есть следствие принципов инвариантности, она не связана с выбором какой-либо системы координат.

Для повреждающегося вязкоупругого материала (2.16), общая структура реологических соотношений такова (ε°, $\mathbf{q}^\circ$, ε_f°, $\boldsymbol{\Phi}$ — изотропные функции):

$$\begin{gathered}\varepsilon=\varepsilon^\circ(\lambda_0),\ \mathbf{T}=\rho(\mathbf{I}-2\mathbf{e})\partial\varepsilon^\circ/\partial\mathbf{e},\ \theta=\partial\varepsilon^\circ/\partial\eta\\ \mathbf{q}=\mathbf{q}^\circ(\lambda_0,\ \nabla\theta),\ \varepsilon_f=\varepsilon_f^\circ(\omega)\\ \partial\varepsilon^\circ/\partial\omega+G(\omega)-G_*(t)=0,\ G\omega^\cdot>0,\ G=\partial\varepsilon^\circ/\partial\omega\\ \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{W}^\cdot\mathbf{W}^{-1},\ \mathbf{U}_E^R,\ \Delta_P,\ \omega)=0,\ \mathbf{T}=(\rho/\rho_\varkappa)\mathbf{T}_\varkappa\mathbf{F}^T\\ \lambda_0\equiv\{\mathbf{e},\ \Delta_P,\ \omega,\ \eta\},\ \Delta_P^3\equiv\det\mathbf{P},\ \omega^3\equiv\det\boldsymbol{\Pi}\\ \mathbf{e}\equiv{}^1/_2(\mathbf{I}-\mathbf{E}^{-1T}\mathbf{E}^{-1})={}^1/_2\mathbf{R}(\mathbf{I}-\mathbf{U}_E^R)\mathbf{R}={}^1/_2(\mathbf{I}-\omega^2\mathbf{F}^{-1T}\mathbf{W}^2\mathbf{F}^{-1})\\ \mathbf{U}_E^R\equiv\mathbf{R}_\Pi^T\mathbf{R}_P^T\mathbf{U}_E\mathbf{R}_P\mathbf{R}_\Pi,\ \mathbf{R}\equiv\mathbf{R}_E\mathbf{R}_P\mathbf{R}_\Pi,\ \mathbf{W}\equiv\mathbf{R}_\Pi^T\mathbf{U}_P\mathbf{R}_\Pi\end{gathered} \tag{2.18}$$

Из (2.18) видно, что реология материала (2.16) существенно проще реологии среды (2.15). Как и в случае идеального вязкоупругого материала [24] плотность внутренней энергии, тензор напряжений Коши и плотность энтропии зависят только от симметричного тензора упругих деформаций **e** и скалярных аргументов. Поврежденность среды характеризуется скаляром ω, являющимся в активном процессе функцией **e**, Δ_P, η, G_*.

Таким образом, для начально-изотропных повреждающихся сред рассматриваемого типа возможны только скалярная и тензорная меры поврежденности. Их текущее значение либо постоянно, либо определяется конечной, недифференциальной связью с текущим значением упругих и вязких деформаций и плотности энтропии.

3. **Пример**. Рассматривается сферически симметричная задача о развитии зоны континуального разрушения вокруг полости, образованной в гидростатически напряженном пространстве из повреждающегося вязкоупругого материала. Используется изотермическое приближение. Поврежденность характеризуется скалярной величиной. Начальная конфигурация — однородное изотропное пространство, сжатое давлением $p_\infty=\mathrm{const}$. Деформации малые, для полной деформации ε имеет место

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}^e+\boldsymbol{\varepsilon}^p+{}^1/_3\omega\mathbf{I},\quad \boldsymbol{\varepsilon}^e:\mathbf{I}=0 \tag{3.1}$$

т. е. упругой сжимаемостью пренебрегается. Реакция материала характеризуется упругим потенциалом, законом вязкого течения и плотностью поверхностной энергии. Для упругого потенциала используется выражение [19]:

$$\rho A(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \omega)=\rho_\varkappa A_\varkappa+(\gamma-G)\omega+\mu J^2+{}^1/_2\beta\omega^2-\alpha J\omega-\xi J_P\omega \tag{3.2}$$

где $A_\varkappa$, $\gamma-G$, μ, β, α, ξ — коэффициенты, зависящие от температуры и начального давления p_∞, $J\equiv(\boldsymbol{\varepsilon}^e:\boldsymbol{\varepsilon}^e)^{1/2}$, $J_P\equiv(\boldsymbol{\varepsilon}^p:\boldsymbol{\varepsilon}^p)^{1/2}$.

Закон вязкого течения принимается максвелловского типа

$$\partial\boldsymbol{\varepsilon}^p/\partial t=(\nu/2\mu)\mathbf{T}',\quad \mathbf{T}'\equiv\mathbf{T}-{}^1/_3(\mathbf{I}:\mathbf{T}) \tag{3.3}$$

где ν — коэффициент вязкости.

Плотность поверхностной энергии

$$\rho_\varkappa\varepsilon_f(\omega)=G\omega,\quad G=\mathrm{const}>0,\quad G/\mu\ll 1 \tag{3.4}$$

С учетом упругой несжимаемости материала из выражения (3.2) для упругого потенциала с точностью до членов $O(\varepsilon^2)$ следует

$$\mathbf{T}=-p\mathbf{I}+\rho\partial A/\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e=-p\mathbf{I}+(2\mu-\alpha\omega/J)\boldsymbol{\varepsilon}^e \tag{3.5}$$

Условие разрушения $\partial\varepsilon/\partial\omega+G-G_*(t)=0$, $\omega^\cdot>0$ при $G_*(t)=0$ с учетом (3.2), (3.4) записывается в виде

$$\omega=\beta^{-1}(\alpha J+\xi J_p-\gamma),\quad \omega^\cdot>0 \tag{3.6}$$

Пусть при $t=0$ в материале образуется сферическая полость начального радиуса a, на поверхности которой задано давление $p_0(t)$. Выберем сферическую систему координат (r, φ, ϑ), начало которой совпадает с центром полости. Пусть $u=(u, 0, 0)$ — вектор перемещения частицы, σ_r, σ_φ, σ_ϑ — физические нормальные компоненты тензора напряжений ε_r, ε_r^e, $\varepsilon_r^p, \ldots$ — компоненты тензоров деформации, s_r, s_φ, s_ϑ — компоненты девиатора тензора напряжений. В силу сферической симметрии $\sigma_\varphi=\sigma_\vartheta$, $s_\varphi=s_\vartheta$, $\varepsilon_\varphi=\varepsilon_\vartheta$, $\varepsilon_\varphi^e=\varepsilon_\vartheta^e$, $\varepsilon_\varphi^p=\varepsilon_\vartheta^p$.

С учетом соотношений $s_\varphi=-{}^1/_2s_r$, $\varepsilon_\varphi^e=-{}^1/_2\varepsilon_r^e$, $\varepsilon_\varphi^p=-{}^1/_2\varepsilon_r^p$ и выражений $\varepsilon_r=\partial u/\partial r$, $\varepsilon_\varphi=u/r$, полная система уравнений и краевые условия запишутся в следующем виде:

$$\begin{gathered}\partial p/\partial r=\partial s_r/\partial r+3s_r/r,\quad \sigma_r=-p+s_r\\ \partial u/\partial r+2u/r=0,\quad \partial\varepsilon_r^p/\partial t=\nu s_r/(2\mu)\end{gathered} \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered}\varepsilon_r^e+\varepsilon_r^p+{}^1/_3\omega=\partial u/\partial r,\quad s_r=2\mu\varepsilon_r^e-\alpha\varkappa\omega(2/3)^{1/2}\\ \omega=\beta^{-1}(\alpha\varkappa(2/3)^{1/2}\varepsilon_r^e+\xi\varkappa_p(2/3)^{1/2}\varepsilon_r^p-\gamma)\end{gathered} \tag{3.8}$$

$$\varkappa=\operatorname{sign}\varepsilon_r^e,\ \varkappa_p=\operatorname{sign}\varepsilon_r^p$$

$$\sigma_r=-p+s_r\to-p_\infty\quad (r\to\infty,\ t\geqslant 0)$$

$$\sigma_r=-p_0(t)\quad (r=a,\ t\geqslant 0)\tag{3.9}$$

$$\varepsilon_r^p(r,0)=\varepsilon^0(r)\quad (r\geqslant a)\tag{3.10}$$

где $\varepsilon^0(r)$ — некоторое начальное распределение вязких деформаций.

Ограничимся в дальнейшем случаем $\alpha=\xi$. Предположим также, что $\varkappa=\varkappa_p$. Воспользовавшись вторым уравнением (3.7), первым и третьим соотношением (3.8), придем к уравнению

$$\begin{gathered}\partial u/\partial r+(m-1)u/r+n=0\\ m=3\beta/(\beta-(2/3)^{1/2}\alpha\varkappa),\quad n=\gamma/(\beta-(2/3)^{1/2}\alpha\varkappa)\end{gathered}\tag{3.11}$$

общее решение которого есть ($d(t)$ — произвольная функция времени):

$$u(r,t)=d(t)a^m/r^{m-1}-nr/m\tag{3.12}$$

Системы (3.7) и (3.8) с учетом (3.12) дают

$$\begin{gathered}\omega(r,t)=(3-m)d(t)/(r/a)^m-3n/m\\ s_r(r,t)=2\mu\varepsilon_*-4\mu\zeta d(t)/(r/a)^m-2\mu\varepsilon_r^p\\ \varepsilon_*=\alpha\gamma\varkappa(2/3)^{1/2}/(2\mu\beta),\quad \zeta=(1-\alpha^2/(2\mu\beta))/(1-\alpha\varkappa(2/3)^{1/2}/\beta)\end{gathered}\tag{3.13}$$

Обращаясь к закону вязкого течения, с учетом полученного выражения для s_r находим

$$\varepsilon_r^p(r,t)=\varepsilon_*-2\nu\zeta(r/a)^{-m}D(t)e^{-\nu t}+rf'(r)e^{-\nu t}\tag{3.14}$$

где $f(r)$ — произвольная функция, а $d(t)$ и $D(t)$ связаны соотношением $d(t)=D^{\cdot}(t)\exp(-\nu t)$.

Подставляя (3.14) в (3.13) и используя далее уравнение равновесия, получим

$$\sigma_r(r,t)=-\frac{12\mu\zeta}{m(r/a)^m}\frac{\partial}{\partial t}(D(t)e^{-\nu t})+6\mu f(r)e^{-\nu t}-\varphi(t)\tag{3.15}$$

Общее решение (3.12)—(3.15) зависит от трех неизвестных функций $D(t)$, $\varphi(t)$, $f(r)$. Для их определения будем предполагать, что поврежденный материал занимает область $a\leqslant r\leqslant b(t)$, где $b(t)$ — неизвестный, подлежащий определению радиус границы области поврежденного материала. Вне этой области ($r>b(t)$) поврежденность материала равна нулю.

Решение для неповрежденного материала следует из (3.12)—(3.15) при $m=3$, $n=0$, $\zeta=1$, $\varepsilon_*=0$. Обозначим индексом «нуль» величины, относящиеся к неповрежденному материалу. Полагая $D_0(0)=0$, из условия $\varepsilon_{r0}^p=0$ при $t=0$, $r\geqslant b(0)$ получим $f_0(r)\equiv\text{const}$. Без потери общности можно положить $f_0(r)\equiv 0$. Тогда из условия $\sigma_r(r,t)\to-p_\infty$ при $r\to\infty$, $t\geqslant 0$ следует $\varphi_0(t)=p_\infty$.

Таким образом в неповрежденном материале

$$\begin{gathered}u_0(r,t)=d_0(t)a(r/a)^{-2},\quad \varepsilon_{r0}^p=-2\nu D_0(t)(r/a)^{-3}e^{-\nu t}\\ \sigma_{r0}(r,t)=-p_\infty-\mu\left(\frac{r}{a}\right)^{-3}\frac{\partial}{\partial t}(D_0(t)e^{-\nu t})\end{gathered}\tag{3.16}$$

Если перепад давлений $\Delta p(t)=p_\infty-p_0(t)$ достаточно мал, то при $t\to 0$ поврежденность равна нулю во всем пространстве, т. е. $b(0)=a$. В этом случае граничное условие (3.9) при $r=a$, $t\geqslant 0$ и последнее из соотношений (3.16) приводят к выражению

$$D_0(t)=-\frac{1}{4\mu}P(t)e^{\nu t},\qquad P(t)\equiv\int_0^t\Delta p(\tau)\,d\tau$$

Вычисляя с его помощью упругую $\varepsilon_{r0}{}^e(a, t)$ и вязкую $\varepsilon_{r0}{}^p(a, t)$ деформации, находим, что $\varkappa=\varkappa_p=1$. С помощью (3.8) заключаем, что в момент времени t_*, такой что

$$\omega(t_*)={}^3/_2{}^{1/2}(\alpha/2\mu\beta)[\Delta p(t_*)+\nu P(t_*)]-\gamma/\beta=0$$

начнется процесс накопления повреждений. Если в интервале $0<t<t_*$, $\Delta p=\mathrm{const}$, то момент начала континуального разрушения

$$t_*=(6^{1/2}\mu\gamma/\alpha\Delta p-1)/\nu$$

Данный режим реализуется при перепаде давлений $\Delta p\leqslant\Delta p_*=2\mu\gamma(2/3)^{1/2}/\alpha$. При $\Delta p>\Delta p_*$ часть пространства в области $a\leqslant r\leqslant b(0)$ повреждается мгновенно, т. е. динамически.

Релаксация сдвиговых напряжений и изменение порога разрушения вследствие накопления вязкой деформации вызывает дальнейшее квазистатическое движение фронта разрушения $r=b(t)$ по частицам материала. Будем предполагать, что $\Delta p\leqslant\Delta p_*$, так что $b(0)=a$, а изменение давления в полости таково, что $\dot b(t)\geqslant 0$. Для определения неизвестных функций $D(t)$, $f(r)$, $b(t)$, $\varphi(t)$, $D_0(t)$, $t\geqslant t_*$, входящих в общее решение (3.12)–(3.16), воспользуемся граничным условием (3.9) при $r=a$, $t\geqslant t_*$ и непрерывностью перемещений, радиальных напряжений, вязких деформаций и условием $\omega=0$ на поверхности $r=b(t)$. Указанные условия дают

$$\begin{gathered}
\varphi(t)=p_0(t)-12\mu\zeta m^{-1}(D^{\cdot}(t)-\nu D(t))e^{-\nu t}\\
D_0{}^{\cdot}=n(3-m)^{-1}x^{-3}e^{\nu t},\quad D^{\cdot}=3nm^{-1}(3-m)^{-1}x^{-m}e^{\nu t}\\
\nu x^3D_0-3\nu\zeta m^{-1}(x^m-1)D-{}^3/_2\psi=\\
=\{\Delta p/(4\mu)+n(3-m)^{-1}(1-9\zeta m^{-2}(1-x^{-m}))\}e^{\nu t}\\
-2\nu x^3D_0+2\nu\zeta x^mD=\varepsilon_*e^{\nu t}-x\psi^{\cdot}/x^{\cdot}\\
\psi(t)\equiv f(b(t)),\quad x(t)\equiv a/b(t)
\end{gathered}\tag{3.17}$$

Система (3.17) трех дифференциальных и одного трансцендентного уравнения дифференцированием последнего сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными данными при $t=t_*$:

$$D(t_*)=0,\quad \psi(t_*)=0,\quad x(t_*)=1,\quad D_0(t_*)=(4\mu)^{-1}P(t_*)e^{\nu t_*}\tag{3.18}$$

Здесь учтено, что функции $f(r)$ и $D(t)$ определены с точностью до постоянного слагаемого. Поэтому без ограничения общности можно положить $f(a)=0$, $D(t_*)=0$.

В общем случае система (3.17) требует численного решения. Максимальный радиус зоны поврежденности в рамках используемого приближения можно оценить явным образом. Вычисляя скорость затекания $v=\partial u(a, t)/\partial t$ полости, находим

$$|v(a, t)/b^{\cdot}(t)|=(\gamma/\alpha)(3/2)^{1/2}x^{1-m}(t)>1$$

при $\alpha<\gamma(3/2)^{1/2}$, $m>1$. Отсюда следует, что область поврежденного материала ограничена начальным радиусом полости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 311 с.
2. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
3. *Ильюшин А. А.* Об одной теории длительной прочности // Инж. ж. МТТ. 1967. № 3. С. 21–35.
4. *Соснин О. В.* Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности. Сообщ. I // Пробл. прочности. 1973. № 5. С. 45–49.
5. *Новожилов В. В.* О перспективах феноменологического подхода к проблеме разрушения // Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975. С. 349–359.
6. *Никифоровский В. С., Шемякин Е. И.* Динамическое разрушение твердых тел. Новосибирск: 1979. 271 с.

7. *Шестериков С. А., Локощенко А. М.* Ползучесть и длительная прочность металлов // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1980. Т. 13. С. 3–104.
8. *Николаевский В. Н.* О динамике фронтов разрушения в хрупких телах // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 5. С. 106–115.
9. *Болотин В. В.* Объединенные модели в механике разрушения // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 127–137.
10. *Кукуджанов В. Н.* К численному моделированию нестационарных процессов деформирования и разрушения упругопластических тел при больших деформациях // Математические методы механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1986. С. 75–84.
11. *Иванов А. Г.* Динамическое разрушение объектов в области глубоких пластических деформаций // ПМТФ. 1986. № 2. С. 146–151.
12. *Глушко А. И., Нещеретов И. И.* О кинетическом подходе к разрушению горных пород // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 140–146.
13. *Supartono F., Sidoroff F.* Anisotropic damage modelling for brittle elastic material // Arch. Mech. 1985. V. 37. N 4–5. P. 521–524.
14. *Костров Б. В., Никитин Л. В., Флитман Л. М.* Механика хрупкого разрушения // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 3. С. 112–125.
15. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
16. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978. 287 с.
17. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
18. *Кондауров В. И.* Энергетический подход к задачам континуального разрушения твердого тела // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 6. С. 17–22.
19. *Kondaurov V. I.* Energy Aspects of Continuous Fracturing of Rocks // PAGEOPH. 1986. V. 124. N 4/5. P. 749–757.
20. *Nikitin L. V.* Application of the Griffith's approach to analysis of rupture in viscoelastic bodies // Intern. J. Fracture. 1984. V. 24. N 2. P. 149–157.
21. *Lee E. H.* Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1969. V. 36. N 1. P. 1–6.
22. *Чудновский А. И.* О разрушении макротел // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1973. Вып. 9. С. 3–41.
23. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
24. *Кондауров В. И.* Уравнения релаксационного типа для вязкоупругих сред с конечными деформациями // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 791–800.

Москва

Поступила в редакцию
9.VI.1987