

УДК 539.376

А. В. ПАВЛЕНКО, Л. И. ЧУХНОВА

ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ ВЯЗКОУПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ

Задачи о передаче продольной нагрузки от одномерного подкрепляющего элемента к двумерным или трехмерным телам часто встречаются в инженерной практике. Обзор работ этого направления дан в [1]. В [2-4] изложены основные результаты решения указанных задач для упругих изотропных тел. Для упругих анизотропных тел такие задачи исследовались в [5-9].

В публикуемой работе рассматривается контактная задача о передаче нагрузки упругим подкрепляющим элементом (стрингером) вязкоупругой ортотропной пластине. Предполагается, что стрингер расположен симметрично относительно срединной плоскости пластины (ось стрингера перпендикулярна кромке пластины) и непрерывно скреплен с нею. Для решения задачи используется асимптотический метод, разработанный в [5, 10] и обобщенный на случай вязкоупругих ортотропных сред в [11].

1. Соотношения между деформациями и напряжениями в ортотропном вязкоупругом теле в условиях плоской задачи имеют вид

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{1}{E_1} \left(\sigma_{11} + \int_0^t K_{11}(t-\tau) \sigma_{11} d\tau \right) - \\
 &\quad - \frac{\nu_{12}}{E_2} \left(\sigma_{22} + \int_0^t K_{12}(t-\tau) \sigma_{22} d\tau \right) \\
 e_{22} &= -\frac{\nu_{21}}{E_1} \left(\sigma_{11} + \int_0^t K_{21}(t-\tau) \sigma_{11} d\tau \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{E_2} \left(\sigma_{22} + \int_0^t K_{22}(t-\tau) \sigma_{22} d\tau \right) \\
 e_{12} &= \frac{1}{G_*} \left(\sigma_{12} + \int_0^t K_{33}(t-\tau) \sigma_{12} d\tau \right) \\
 \nu_{12} E_1 &= \nu_{21} E_2, \quad K_{21}(t-\tau) = K_{12}(t-\tau)
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где E_1, E_2, G_* — мгновенные модули упругости, ν_{12}, ν_{21} — коэффициенты Пуассона, $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} = \sigma_{21}$ — нормальные и касательные напряжения, $K_{ij}(t-\tau)$ — ядра ползучести, t — время.

Компоненты тензора деформаций e_{11}, e_{22}, e_{12} выражаются через проекции u, v вектора перемещений формулами (индексы x, y обозначают дифференцирование по соответствующим координатам):

$$e_{11} = u_x, \quad e_{22} = v_y, \quad e_{12} = v_x + u_y \tag{1.2}$$

Предполагается, что главные направления анизотропии совпадают с декартовыми осями координат x, y , соотношения (1.1) справедливы как при

растяжении, так и при сжатии. Для аппроксимации ядер ползучести используем следующие аналитические выражения [12]:

$$K_{ij}(t-\tau) = k_{ij}(t-\tau)^{\alpha_*-1} \exp[-\beta_*(t-\tau)] \quad (0 < \alpha_* \leq 1) \quad (1.3)$$

Применяя преобразование Лапласа по времени к соотношениям (1.1), решая их относительно трансформант напряжений и учитывая (1.2), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{\sim} &= B_1(f_{22}(p)u_x^{\sim} + \nu_{12}f_{12}(p)v_y^{\sim}) \\ \sigma_{22}^{\sim} &= B_2(f_{11}(p)v_y^{\sim} + \nu_{21}f_{12}(p)u_x^{\sim}), \quad \sigma_{12}^{\sim} = G(v_x^{\sim} + u_y^{\sim}) \\ B_i &= E_i[f_{11}(p)f_{22}(p) - \nu_{12}\nu_{21}f_{12}^2(p)]^{-1}, \quad G = G_*/f_{33}(p) \\ f_{ij}(p) &= 1 + k_{ij}\Gamma(\alpha_*)(p + \beta_*)^{-\alpha_*} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\Gamma(\alpha_*)$ — гамма-функция, «галочка» обозначает трансформанту Лапласа соответствующей функции, p — параметр преобразования Лапласа. При рассмотрении пластины (обобщенного плоского напряженного состояния) равенства (1.4) должны быть умножены на толщину пластины h .

Теперь задача о напряженно-деформированном состоянии ортотропного вязкоупругого тела может быть сведена к интегрированию уравнений

$$\begin{aligned} u_{xx}^{\sim} + \varepsilon_1 u_{yy}^{\sim} + \varepsilon_1 m(p) v_{xy}^{\sim} &= 0 \\ \varepsilon_1 v_{xx}^{\sim} + q_1 v_{yy}^{\sim} + \varepsilon_1 m(p) u_{xy}^{\sim} &= 0 \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon F(p), \quad \varepsilon = G_*/E_1 \\ F(p) &= [f_{11}(p)f_{22}(p) - \nu_{12}\nu_{21}f_{12}^2(p)] [f_{22}(p)f_{33}(p)]^{-1} \\ m(p) &= 1 + \nu_{12}f_{12}(p) (\varepsilon F(p)f_{22}(p))^{-1} \\ q_1 &= qf_{11}(p)/f_{22}(p), \quad q = E_2/E_1 \end{aligned} \quad (1.5)$$

при соответствующих граничных условиях.

Уравнения (1.5) аналогичны уравнениям равновесия в перемещениях для упругого ортотропного тела [5, 10]. Таким образом, при решении плоской задачи о деформации вязкоупругого тела необходимо решать задачу о деформации ортотропного упругого тела. Поэтому и здесь может быть использован подход, разработанный в [5, 10] и основанный на идеях асимптотического интегрирования. При этом все соотношения и выводы будут совпадать с [10], если в качестве «малого» параметра выбрать параметр ε_1 . Он действительно оказывается малым, если мало ε , так как функция $F(p)$ при произвольных значениях параметра p имеет порядок единицы.

Следовательно, если используются разностные ядра ползучести (1.3), то при исследовании плоских задач линейной вязкоупругости для ортотропных сред также удастся расщепить напряженно-деформированное состояние на две составляющие с различными свойствами. Полное решение задачи ищется в виде суперпозиции обеих составляющих, а определение каждой из них сводится к последовательному решению краевых задач теории потенциала. Частный случай, когда ортотропный вязкоупругий материал обладает преимущественно сдвиговой ползучестью ($k_{11} = k_{22} = k_{12} = 0$, $k_{33} = k \neq 0$), рассмотрен в [11].

2. Остановимся теперь на задаче о передаче нагрузки упругим стрингером вязкоупругой ортотропной полубесконечной пластине $x \geq 0$, $|y| < \infty$. Стрингер расположен вдоль оси Ox и в граничной точке $x=0$ нагружен продольной силой P_0 . Требуется определить закон распределения контактных усилий взаимодействия между стрингером и пластиной, а также распределение напряжений в пластине и стрингере.

Задача сводится к интегрированию уравнений (1.5) при следующих граничных условиях: $\sigma_{11}^{\sim} = 0$ ($x=0$), $u^{\sim} = U^{\sim}$, $v^{\sim} = 0$ ($y=0$) на бесконечности напряжения обращаются в нуль, причем перемещения стрингера U после применения преобразования Лапласа по времени удовлетворяют соотношениям

$$EFU_{xx}^{\sim} = 2T^{\sim}(x) \quad (2.1)$$

$$N^{\sim} = EFU_x^{\sim} = P_0/p \quad (x=0) \quad (2.2)$$

Здесь EF — жесткость на растяжение-сжатие стрингера, $T^\sim(x)$, N^\sim — трансформанты контактного усилия и усилия в стрингере.

При определении усилия в стрингере и усилия контактного взаимодействия в соответствии с [5] и изложенными выше соображениями в первом приближении приходим к интегрированию уравнения (2.1) с граничными условиями (2.2) и приближенного уравнения для пластины (предполагаем для простоты, что материал пластины обладает преимущественно сдвиговой ползучестью):

$$f_{33}(p)\omega^2 u_{xx}^\sim + u_{yy}^\sim = 0 \quad (\omega^2 = B_1/G_*) \quad (2.3)$$

которому соответствуют граничные условия

$$u_x^\sim = 0 \quad (x=0), \quad u^\sim = U^\sim \quad (y=0) \quad (2.4)$$

на бесконечности напряжения равны нулю. Так как $v^\sim = 0$ ($v_x^\sim = 0$) при $y=0$, то контактное усилие взаимодействия между стрингером и пластиной определяется по формуле

$$T^\sim(x) = -\sigma_{12}^\sim|_{y=0} = -G_* f_{33}^{-1}(p) u_y^\sim|_{y=0} \quad (2.5)$$

Решение краевой задачи (2.1)–(2.5) получено при помощи косинус-преобразования Фурье по координате x . При этом

$$u^\sim = -\frac{2}{\pi} \frac{P_0}{EF} \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{\exp[-\omega f_{33}^{1/2}(p)ys] \cos xs}{s(s + g f_{33}^{-1/2}(p))} ds$$

$$g = 2G_*\omega/EF$$

Напряжение σ_{11}^\sim и составляющая касательная напряжения $\sigma_{12}^{\sim(1)}$, соответствующая напряженно-деформированному состоянию первого типа, в пластине выражаются соотношениями

$$\sigma_{11}^\sim = B_1 u_x^\sim, \quad \sigma_{12}^{\sim(1)} = G_* f_{33}^{-1} u_y^\sim$$

Первое приближение напряженного состояния второго типа, из которого находятся напряжения σ_{22}^\sim и составляющая касательного напряжения $\sigma_{12}^{\sim(2)}$, определяется аналогично [5]. Полное касательное напряжение в пластине $\sigma_{12}^\sim = \sigma_{12}^{\sim(1)} + \sigma_{12}^{\sim(2)}$.

Трансформанты усилия в стрингере N^\sim и контактного усилия T^\sim будут (si, ci — интегральные синус и косинус):

$$N^\sim = EF u_x^\sim|_{y=0} = 2P_0 (\sin x_* \text{ci } x_* - \cos x_* \text{si } x_*) / \pi p \quad (2.6)$$

$$T^\sim = -\sigma_{12}^\sim|_{y=0} = P_0 g f_{33}^{-1/2}(p) (\cos x_* \text{ci } x_* + \sin x_* \text{si } x_*) / \pi p$$

$$x_* = g f_{33}^{-1/2}(p) x$$

Обратное преобразование Лапласа определяет усилия N и T в зависимости от координаты и времени. При этом контурный интеграл удается свести к обычному несобственному интегралу изложенным в [12] методом. Асимптотические выражения указанных усилий для малых и больших времен легко получаются в явном виде. Так, если в ядре (1.3) положить $\alpha_* = 1$, $k_{33} = k$, то для малых времен будем иметь

$$N = (2P_0/\pi) [\varphi_0^{-1/2} k x_1 \psi_0 (\beta_* + k)^{-1} (1 - \exp[-(\beta_* + k)t]) +$$

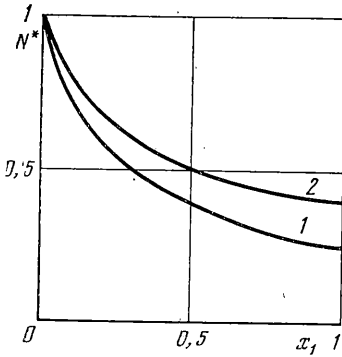
$$+^{1/3} k^2 x_1 (1 - x_1 \varphi_0 - \psi_0) (\beta_* + k)^{-2} (1 - \exp[-(\beta_* + k)t] -$$

$$- (\beta_* + k)t \exp[-(\beta_* + k)t]) + \dots]$$

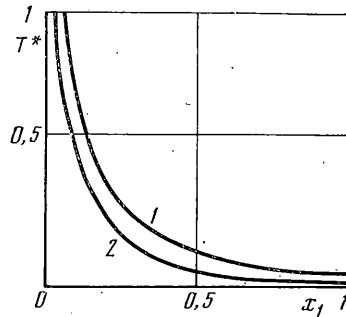
$$T = (P_0 g/\pi) [\psi_0^{-1/2} k (1 - x_1 \varphi_0 + \psi_0) (\beta_* + k)^{-1} (1 - \exp[-(\beta_* + k)t]) -$$

$$-^{1/3} k^2 (x_1 \varphi_0 + (1 + x_1^2) \psi_0) (\beta_* + k)^{-2} (1 - \exp[-(\beta_* + k)t] -$$

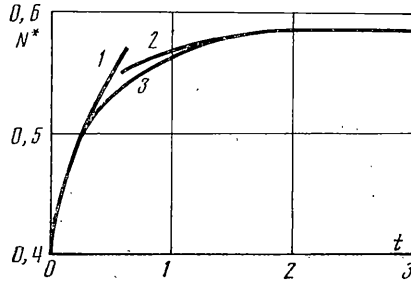
$$- (\beta_* + k)t \exp[-(\beta_* + k)t]) + \dots] \quad (2.7)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

для больших времен имеем

$$\begin{aligned}
 N &= (2P_0/\pi) [\varphi_\infty + 1/2 k x_2 \varphi_\infty \beta_*^{-1} \exp[-(\beta_* + k)t] + \\
 &+ 1/8 k^2 x_2 (1 - x_2 \varphi_\infty - \psi_\infty) \beta_*^{-2} (1 - (\beta_* + k)t) \exp[-(\beta_* + k)t] + \dots] \\
 T &= (P_0 g/\pi) \beta_*^{1/2} (\beta_* + k)^{-1/2} [\psi_\infty + 1/2 k (1 - x_2 \varphi_\infty + \psi_\infty) \beta_*^{-1} \exp[-(\beta_* + k)t] - \\
 &- 1/8 k^2 (x_2 \varphi_\infty + (1 + x_2^2) \psi_\infty) \beta_*^{-2} (1 - \\
 &- (\beta_* + k)t) \exp[-(\beta_* + k)t] + \dots]
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\varphi_0 = \sin x_1 \operatorname{ci} x_1 - \cos x_1 \operatorname{si} x_1$$

$$\psi_0 = \cos x_1 \operatorname{ci} x_1 + \sin x_1 \operatorname{si} x_1, \quad x_1 = gx$$

Для получения φ_∞ , ψ_∞ достаточно в выражениях φ_0 , ψ_0 заменить x_1 на $x_2 = [\beta_*/(\beta_* + k)]^{1/2} x_1$.

3. Усилия (2.7), (2.8) могут быть представлены в виде

$$\Phi(x, t) = a_0 + a_1 t + \dots \quad (t \rightarrow 0) \tag{3.1}$$

$$\Phi(x, t) = b_0 + b_1 \exp[-(\beta_* + k)t] + \dots \quad (t \rightarrow \infty) \tag{3.2}$$

где для усилия N в струнгере имеем

$$a_0 = 2P_0 \varphi_0 / \pi, \quad a_1 = -P_0 k x_1 \psi_0 / \pi, \quad b_0 = 2P_0 \varphi_\infty / \pi$$

$$b_1 = P_0 k x_2 [(4\beta_* - k) \psi_\infty + k(1 - x_2 \varphi_\infty)] / (4\pi \beta_*^2), \dots$$

а для контактного усилия взаимодействия T будет

$$a_0 = P_0 g \psi_0 / \pi, \quad a_1 = -P_0 g k (1 - x_1 \varphi_0 + \psi_0) / 2\pi$$

$$b_0 = P_0 g \psi_\infty (1 + k/\beta_*)^{-1/2} / \pi$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= P_0 g k [4\beta_* - x_2 (4\beta_* + k) \varphi_\infty + \\
 &+ (4\beta_* - k (1 + x_2^2)) \psi_\infty] (8\pi \beta_*^2)^{-1} (1 + k/\beta_*)^{-1/2}
 \end{aligned}$$

Соотношения (3.1), (3.2) позволяют судить о распределении усилий при произвольных значениях времени, если использовать так называемую

двухточечную аппроксиманту Паде [13]:

$$\Phi(x, t) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 t + \beta_1 \exp[(\beta_* + k)t] + \dots}{1 + \gamma_1 t + \delta_1 \exp[(\beta_* + k)t] + \dots} \quad (3.3)$$

коэффициенты которой $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j$ подбираются из условий, что при разложении в ряды при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ получаются асимптотические выражения (3.1), (3.2). Эти условия дают

$$\alpha_0 = b_0 + b_1 \delta_1, \quad \alpha_1 = b_0 \gamma_1, \quad \beta_1 = b_0 \delta_1$$

$$\gamma_1 = \frac{(\beta_* + k)(b_0 - a_0)^2 + a_1 b_1}{(a_0 - b_1 - b_0)(a_0 - b_0)}, \quad \delta_1 = \frac{b_0 - a_0}{a_0 - b_1 - b_0}, \dots$$

Аппроксиманта Паде (3.3) позволяет «сплечь» между собой предельные разложения (3.1), (3.2) и найти области малых и больших времен.

На фиг. 1, 2 представлены результаты расчета усилий в стрингере $N^* = N/P_0$ (фиг. 1) и контактного усилия $T^* = -T/P_0 g$ (фиг. 2). Кривые 1 соответствуют времени $t=0$ (упругое решение), кривые 2 — времени $t = \infty$. На фиг. 3 показано изменение усилия N^* во времени при $x_1=1$. Кривые 1–3 построены соответственно по формулам (3.1)–(3.3). При расчетах принималось, что $k=3, \beta_*=1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Развитие теории контактных задач в СССР/Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
2. Григolloк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 415 с.
3. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
4. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
5. Маневич Л. И., Павленко А. В. Передача продольной динамической нагрузки, действующей на ребра жесткости, к упругой ортотропной пластине // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 2. С. 117–124.
6. Павленко А. В. Применение асимптотического метода к пространственной задаче теории упругости для композитных материалов // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 3. С. 50–61.
7. Павленко А. В. Передача нагрузки от стержня к упругому анизотропному полупространству // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 103–111.
8. Фильштинский Л. А. Об особенностях поля напряжений в упругой анизотропной полуплоскости с выходящим на границу ребром // Прикл. механика. 1981. Т. 17. № 10. С. 107–111.
9. Кривой А. Ф., Попов Г. Я., Радиолло М. В. Некоторые задачи о произвольно ориентированном стрингере в составной анизотропной плоскости // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 622–632.
10. Маневич Л. И., Павленко А. В., Коблик С. Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. Киев – Донецк: Вища шк., 1982. 152 с.
11. Бичук А. И., Павленко А. В., Чужнова Л. И. Плоская задача линейной вязкоупругости для пластинок с криволинейной анизотропией // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 127–131.
12. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
13. Вейкер Г., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
28.XII.1987