

УДК 539.376

И. И. БУГАКОВ

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МАТЕРИАЛОВ С ФАЗОВЫМ ПЕРЕХОДОМ

Устанавливается связь между напряжениями и деформациями в твердых телах, способных находиться в фазовых состояниях с существенно различающимися модулями упругости. Исходя из предложенной механической модели, строятся наиболее простые определяющие уравнения, указываются их обобщения. Приводятся примеры, относящиеся к механике полимеров.

1. Введение. В последние годы резко возрос интерес к механике тел с фазовыми переходами [1]. Обычно уравнения связи напряжений с деформациями постулируются отдельно для каждой фазы. В настоящей работе исходным является единое для всего процесса уравнение связи. Такой подход позволяет установить, для какой из фаз следует применять уравнение в дифференциальной форме, для какой — в конечной форме, а также выяснить характер разрыва напряжений и деформаций при фазовом переходе.

Рассматриваются материалы, находящиеся в течение всего процесса в твердом агрегатном состоянии и способные к фазовым переходам, при которых вещество остается твердым. Фазы существенно различаются по твердости (модулям упругости при растяжении, сжатии, сдвиге) и могут различаться по плотности. Ставилась задача получить возможно более простые определяющие уравнения. В соответствии с этим принимается, что вещество в каждом из состояний идеально упруго и его физико-механические характеристики неизменны, а фазовый переход происходит скачком. Материал может существовать в двух состояниях, именно в относительно более мягком и относительно более твердом (для краткости — в мягком и твердом).

При переходе через температуру стеклования существенно изменяются модули упругости полимерных материалов и композитов (на 1—3 порядка). Существенно изменяться могут также эффективные модули упругости низкомолекулярных композитов, в которых одна из компонент плавится (мерзлый грунт — талый грунт). Что касается металлов, находящихся в твердом агрегатном состоянии, и сплавов, то при фазовых превращениях, в том числе полиморфных, их модули упругости обычно изменяются сравнительно мало, поэтому металлы не рассматриваются.

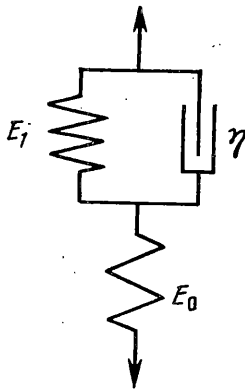
Поскольку краевая задача в целом не формулируется, фазовые переходы I и II рода не различаются. Деформации полагаются малыми.

2. Механическая модель. Вначале рассматривается одноосное напряженное состояние. Будем исходить из трехэлементной модели (фиг. 1), состоящей из двух пружин и цилиндра со стержнем. Цилиндр заполнен идеальной жидкостью, мгновенно затвердевающей при некоторых условиях. При этом модуль упругости E модели в целом изменяется скачком, так что для твердого и мягкого материалов соответственно имеем

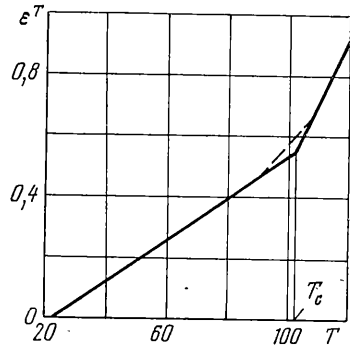
$$E = E_0 \quad (\eta^* \rightarrow \infty)$$

$$E = E_\infty, \quad E_\infty^{-1} = E_0^{-1} + E_1^{-1}, \quad E_\infty < E_0 \quad (\eta^* \rightarrow 0)$$

где $\eta^* = \eta / (E_1 t^\circ)$, t° — характеристика длительности процесса.



Фиг. 1



Фиг. 2

Уравнение, соответствующее модели фиг. 1, имеет вид (точка означает производную по безразмерному времени t/t^0):

$$\dot{e} + e/\eta^* = \sigma/E_0 + \sigma/(E_\infty \eta^*) \quad (2.1)$$

При постоянных коэффициентах соотношение (2.1) — классическое уравнение стандартной линейной вязкоупругой среды. При мгновенном нагружении оно принимает вид дифференциального уравнения

$$E_0 \dot{e} = \sigma \quad (2.2)$$

При очень медленном нагружении оно принимает вид закона Гука

$$E_\infty e = \sigma \quad (2.3)$$

т. е. реализуется равновесный процесс. По (2.1) при $t \rightarrow \infty$ и конечных скоростях нагружения наступает равновесное состояние (2.3); переход в такое состояние имеет релаксационный характер. Именно условие конечных скоростей нагружения принимается в дальнейшем.

Распространены подходы, в которых используется уравнение (2.1) с переменными коэффициентами. Так в [2, 3] принимается, что все коэффициенты — непрерывные функции времени. В соответствии с гипотезой термореологически простого поведения принимается, что модули E_0 , E_∞ неизменны, а вязкость η — убывающая непрерывная функция температуры [4]. В рамках этой гипотезы уравнения (2.2), (2.3) приблизительно выполняются при конечных временах механического воздействия: (2.2) — при пониженных температурах, а (2.3) — при повышенных.

Примем так же, что модули E_0 , E_∞ неизменны. Вязкость η^* , как отмечалось, разрывна: в момент фазового перехода она мгновенно изменяется от 0 до ∞ или, наоборот, от ∞ до 0. При этом, вследствие мгновенного перехода из одного состояния в другое, утрачивается релаксационный характер перехода. Теперь ни в один из моментов времени среда не является вязкоупругой, несмотря на сходство уравнения (2.1) при указанном характере изменения η^* с уравнением теории вязкоупругости. Можно смягчить условия изменения η^* , приняв η^* такой ступенчатой функцией, имеющей конечные значения, что с выбранной точностью при $\eta^* = \eta_{\max}^*$ будет выполняться уравнение (2.2), а при $\eta^* = \eta_{\min}^*$ — уравнение (2.3).

Уравнение (2.1) применимо в обоих состояниях, включая и момент фазового перехода. В противоположность этому уравнения (2.2), (2.3) выполняются в одном из состояний: (2.2) при $\eta^* \rightarrow \infty$ (твердый материал), (2.3) при $\eta^* \rightarrow 0$ (мягкий материал). В каждом из состояний, как отмечалось, вещество идеально упруго и модуль упругости остается неизменным.

Следует отметить, что тип определяющего уравнения для каждого из состояний, в общем, различен и он не зависит от того, в каком направле-

нии происходит переход: от мягкой фазы к твердой или наоборот. Именно, для твердой фазы определяющее уравнение дифференциальное, для мягкой фазы конечное. Лишь в том частном случае, когда начальное состояние — естественное недеформированное и материал находится в твердой фазе, тогда уравнение (2.2) для этой фазы принимает вид закона Гука $E_0 e = \sigma$, который сохраняет силу лишь до первого фазового перехода.

При интегрировании (2.2) не имеется какого-либо условия для выбора постоянной, поэтому естественно ее назначать из условия непрерывности изменения напряжений и деформаций во времени при фазовом переходе. Приведенные ниже примеры показывают, что такой выбор постоянной при интегрировании оказывается оправданным.

Если вещество испытывает не одно, а два различных фазовых превращения, то (2.1) заменяется дифференциальным уравнением второго порядка и соответственно к (2.2), (2.3) добавляется уравнение $E_2 e'' = \sigma''$ ($E_2 > E_0 > E_\infty$).

Деформация e имеет чисто механическое происхождение. Полная деформация ε представляется в виде

$$\varepsilon = e + \varepsilon^* \quad (2.4)$$

где ε^* — суммарная деформация немеханической природы, которая может включать составляющие, связанные и не связанные с фазовым переходом (деформация превращения, тепловое расширение и т. д.).

Фазовое превращение может происходить как вследствие изменения внешних параметров, например температуры, давления, так и по причинам внутреннего характера — вследствие физико-химических процессов в веществе, зависящих, в свою очередь, от внешних параметров. Соответственно вязкость η может быть функцией или функционалом внешних параметров — причин фазового превращения. В последнем случае задается эволюционное уравнение для внутренних параметров. Переходы могут быть обратимыми во времени и необратимыми. Подробно рассматривать конкретные фазовые превращения здесь нет необходимости, так как они не влияют на тип определяющих уравнений.

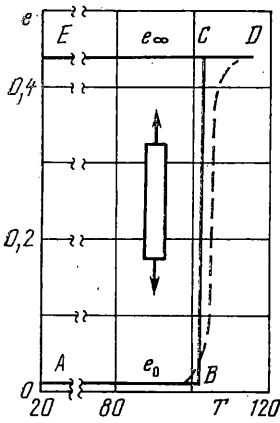
Все приводимые ниже примеры относятся к неизотермическим задачам для аморфных полимерных тел; $\varepsilon^* = \varepsilon^T$, где ε^T — тепловое расширение. Принимается, что η — функция температуры, фазовый переход происходит при известной температуре затвердевания, стеклования T_c :

$$\eta^* = \infty \quad (T < T_c), \quad \eta^* = 0 \quad (T > T_c). \quad (2.5)$$

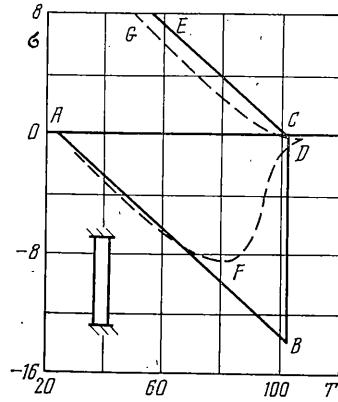
Соответственно зависимость (2.2) имеет место при $T < T_c$, т. е. в стеклообразном состоянии, а (2.3) — при $T > T_c$, т. е. в высокоэластическом состоянии. Поскольку в аморфных телах реализуются фазовые переходы второго рода, уравнения (2.1) — (2.3) являются приближенными. В рамках линейной теории в качестве точных используются уравнения теории наследственности [4], в которых влияние температуры на свойства учитывается с помощью гипотезы термореологически простого поведения. Температура T_c находится обычным образом по точке излома дилатометрической кривой, аппроксимированной двумя прямыми.

3. Задачи о стержне. Пусть поле температур стержней однородно, нестационарно; начальное состояние — естественное недеформированное; материал — эпоксидный полимер на основе олигомера ЭД-20. Аппроксимированная дилатометрическая кривая изображена на фиг. 2 сплошной линией, штриховая линия — средняя часть экспериментальной кривой (температура — °С, деформация — %). График получен при нагревании и последующем охлаждении со скоростью 1 град/мин, с такой же скоростью изменялась температура в деформируемых стержнях. По данным фиг. 2 $T_c = 102^\circ \text{C}$, а коэффициенты линейного теплового расширения равны $\alpha = \alpha_0 = 68 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$ при $T < T_c$, $\alpha = \alpha_\infty = 210 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$ при $T > T_c$. Модули упругости $E_0 = 3,15 \text{ ГПа}$, $E_\infty = 0,0169 \text{ ГПа}$. Результаты расчетов приведены на фиг. 3, 4; сплошные линии — по предлагаемой теории, штриховые — по теории наследственности (напряжение — в МПа).

В одном случае к стержню при $T_0 = T(0) < T_c$ приложено растягивающее напряжение $\sigma = \text{const}$ и температура его повышается. При $T < T_c$ по



Фиг. 3



Фиг. 4

(2.2) будет $e = \text{const} = e_0 = \sigma/E_0$, при $T > T_c$ по (2.3) будет $e = \text{const} = e_\infty = \sigma/E_\infty$, так что изображающая точка движется по линии $ABCD$ (фиг. 3). При последующем охлаждении $e = \text{const} = e_\infty$ при $T > T_c$ по (2.3) и при $T < T_c$ по (2.2); следовательно, изображающая точка, как и по теории наследственности, движется по прямой DE (явление «замораживания»). При дальнейших теплосменах изображающая точка по обеим теориям движется по одной и той же прямой DE . Заметим, что при первом нагревании функция $e(T)$ при $T = T_c$ испытывает сильный разрыв.

Тогда, когда процесс начинается при $T_0 > T_c$, а не при $T_0 < T_c$, изображающая точка вначале оказывается в точке D и затем, при теплосменах, по обеим теориям движется по одной и той же прямой DE .

В другом случае концы стержня заземлены, коэффициент теплового расширения заземляющего устройства $\alpha_M = \text{const} = 12 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$. Причиной напряжения в стержне является «несовместность»

$$\vartheta = \varepsilon_M T - \varepsilon^T \quad (\varepsilon_M T = \alpha_M (T - T_0)) \quad (3.1)$$

Заземляющее устройство можно считать абсолютно жестким по отношению к механическому воздействию со стороны стержня, поэтому в стержне $\varepsilon = \varepsilon_M T$ и $e = \vartheta$, так что, согласно (2.2), (2.3), (3.1), будет

$$\sigma = E_0 \vartheta \quad (T < T_c) \quad (3.2)$$

$$\sigma = E_\infty \vartheta \quad (T > T_c) \quad (3.3)$$

Пусть $T_0 < T_c$ ($T_0 = 23^\circ \text{C}$). Тогда при нагревании будет $\sigma(T) = E_0 \vartheta(T)$ при $T < T_c$ по (3.2), $\sigma(T) = E_\infty \vartheta(T)$ при $T > T_c$ по (3.3), и изображающая точка движется по линии $ABCD$ (фиг. 4). При охлаждении будет $\sigma(T) = E_\infty \vartheta(T)$ при $T > T_c$ по (3.3) и $\sigma(T) = E_\infty \vartheta(T_c) + E_0 [\vartheta(T) - \vartheta(T_c)]$ при $T < T_c$ по (3.2), так что изображающая точка движется по линии DCE . При этом CE параллельна AB . При дальнейших теплосменах изображающая точка движется по одной и той же линии DCE . При $T = T_c$ функция $\sigma(T)$ терпит сильный разрыв на стадии первого нагревания и слабый на стадии охлаждения и при последующих теплосменах. Если процесс начинается при $T_0 > T_c$, то график $\sigma(T)$ получается смещением линии DCE вверх до совпадения точки D с линией $\sigma = 0$.

По теории наследственности процесс описывается линией $AFDG$ [5]. Видно, что, как и в предыдущем примере, результаты расчетов по обеим теориям качественно согласуются друг с другом. На стадии нагревания уровень и температура пика напряжения по приближенной теории существенно завышаются. Однако, после охлаждения до начальной температуры различие в остаточных напряжениях по обеим теориям не превышает 10%.

Как видно, из примеров, поведение рассматриваемой среды, в общем, не является упругим. Так, при $T_0 < T_c$ связь между σ и e неоднозначна,

при замкнутом цикле по температуре и одной из механических величин конечное значение другой отличается от начального.

4. Обобщение на сложное напряженное состояние. Задача об анизотропном кольце. Для изотропного вещества в твердом и мягком состояниях вместо (2.2)–(2.4) будет $(\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \varepsilon^* \delta_{ij})$

$$E_0 e_{ij} = (1 + \nu_0) \sigma_{ij} - \nu_0 \sigma_{mm} \delta_{ij} \quad (4.1)$$

$$E_\infty e_{ij} = (1 + \nu_\infty) \sigma_{ij} - \nu_\infty \sigma_{mm} \delta_{ij}$$

где ν_0, ν_∞ – коэффициенты Пуассона, ε^* – скаляр, δ_{ij} – символ Кронекера. Для анизотропной среды вместо (2.2)–(2.4) в общем случае будет $e_{ij} = s_{ijkl}^0 \sigma_{kl}$ (твердый материал), $e_{ij} = s_{ijkl}^\infty \sigma_{kl}$ (мягкий материал), $\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \varepsilon_{ij}^*$; симметрия свойств при фазовом переходе может изменяться.

Все точки тела могут претерпевать фазовый переход одновременно, как в задачах о стержне (п. 3), и тогда тело в каждый момент остается однородным.

Пусть кольцо с цилиндрической ортотропией свойств переводится из мягкого состояния в твердое охлаждением при однородном поле температур (плоское осесимметричное напряженное состояние), внутренний радиус кольца a , наружный b . Механические нагрузки отсутствуют. Напряжения возникают вследствие криволинейной анизотропии теплового расширения; радиальное напряжение $\sigma_r = 0$ при $r = a, r = b$.

Обозначим α_r, α_φ коэффициенты теплового расширения в радиальном и окружном направлениях; E_r, E_φ – модули упругости в тех же направлениях, $\rho = r/a, \rho_1 = b/a$.

На первой стадии процесса, при $T > T_c$, по теории упругости будет [6]:

$$\sigma_r = -E_\varphi^\infty (\alpha_r^\infty - \alpha_\varphi^\infty) (T - T_0) f(k_\infty \rho_1, \rho) \quad (4.2)$$

а на второй стадии, при $T < T_c$, в соответствии с принятым подходом

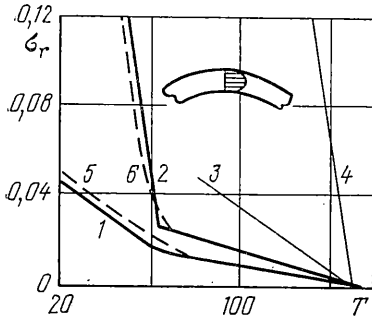
$$\sigma_r = -E_\varphi^0 (\alpha_r^0 - \alpha_\varphi^0) T f(k_0, \rho_1, \rho) \quad (4.3)$$

где $k_\infty = (E_\varphi^\infty / E_r^\infty)^{1/2}$, $k_0 = (E_\varphi^0 / E_r^0)^{1/2}$, f – рациональная функция, ρ_1, ρ и показательная функция аргумента k . Наибольшее радиальное напряжение действует около середины толщины кольца. При охлаждении напряжения σ_r растягивающие, они могут привести к разрушению путем образования окружной трещины. Растягивающие окружные напряжения действуют во внутренней части кольца, они могут приводить к радиальным трещинам.

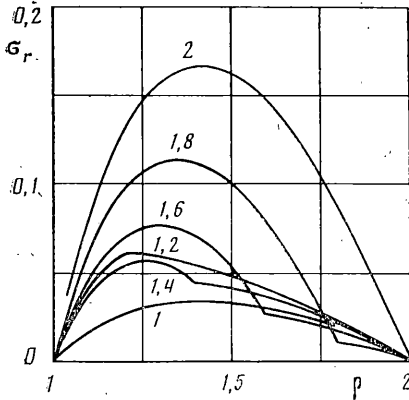
Расчеты были выполнены для наибольшего напряжения σ_r в кольце из стеклопластика, изготовленном намоткой, $\rho_1 = 1,13$ и $1,50$, $\alpha_r^0 - \alpha_\varphi^0 = \alpha_r^\infty - \alpha_\varphi^\infty = 1 \cdot 10^{-5}$ град $^{-1}$, $E_r^0 = 12,5$ ГПа, $E_\varphi^0 = 35,0$ ГПа, $E_r^\infty = 0,025$ ГПа, $E_\varphi^\infty = 28,5$ ГПа, $T_c = 62^\circ \text{C}$, $T(0) = 150^\circ \text{C}$. На фиг. 5 линии 1, 3, 5 относятся к кольцу с $\rho_1 = 1,13$, линии 2, 4, 6 – с $\rho_1 = 1,50$. Жирные линии 1, 2 – расчет по формулам (4.2), (4.3), тонкие 3, 4 – по теории упругости для твердого материала, штриховые 5, 6 – по теории наследственности [6]. При $T > T_c$ линии 1, 2 совпадают с решением задачи по теории упругости для мягкого материала, а при $T < T_c$ они параллельны линиям 3, 4 соответственно. Следовательно, для того, чтобы построить решение задачи по рассматриваемой теории, достаточно располагать решениями задачи по теории упругости для твердого и мягкого кольца. Отметим, что форма графиков 1, 2 такая же, как для охлаждаемого заземленного стержня (см. линию DCE на фиг. 4). Линии 1, 2 располагаются близко к 5, 6, остаточные напряжения при 20°C по обеим теориям различаются не более, чем на 5%.

5. Задача о неоднородно нагреваемом кольце. В процессе фазового перехода тело может состоять из различных фаз одного и того же вещества. При использовании уравнений типа (2.1) или соответствующих уравнений интегрального типа тело рассматривается как кусочно однородное, а при использовании собственных уравнений типа (2.2), (2.3) для каждой фазы тело рассматривается как составное и на поверхности раздела фаз формулируются условия непрерывности векторов напряжений и перемещений.

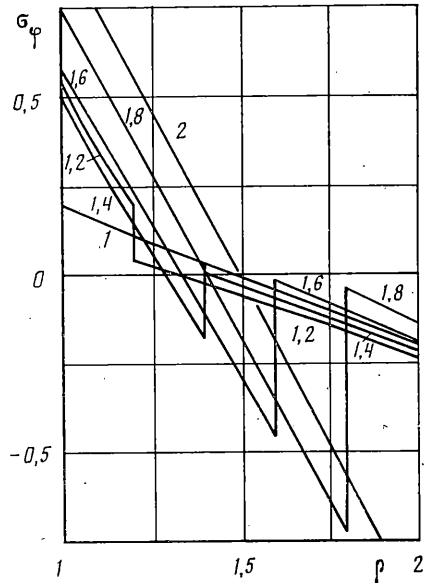
Рассмотрим задачу о неоднородно нагреваемом изотропном кольце



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

(плоское осесимметричное напряженное состояние, обозначения a , b , ρ , ρ_1 прежние). Предполагается, что коэффициент температуропроводности не изменяется при фазовом переходе и потому одинаков во всех точках в течение всего процесса. При линейном изменении во времени температуры поверхности однородного тела, начиная с некоторого значения критерия Фурье, режим нагревания (охлаждения) становится квазистационарным. Именно, температура в любой точке тела изменяется с одной и той же постоянной скоростью, а распределение температур остается неизменным и для одномерных по координатам задач описывается квадратной параболой [7]. В соответствии с этим зависимость для поля температур $T = T(r, t)$ принимается в виде $T = T_a + \Delta T(\rho^2 - 1)/(\rho_1^2 - 1)$, где $T_a = T(1, t)$, $\Delta T = T_b - T_a = \text{const}$, $T_b = T(\rho_1, t)$. Полагаем, что $\Delta T > 0$, т. е. $T_b > T_a$.

На стадии 1 процесса нагревания $T_b \leq T_c$, кольцо однородное, твердое. На стадии 2 от наружного контура к внутреннему движется фронт размягчения в виде концентрической окружности $\rho = \rho_*(t)$, где $T(\rho_*, t) = T_c$. При этом внутренняя, уменьшающаяся во времени часть кольца ($\rho \in [1, \rho_*)$) остается твердой, а наружная, увеличивающаяся во времени часть ($\rho \in [\rho_*, \rho_1]$) становится мягкой. На стадии 3 температура $T_a \geq T_c$, однородность кольца восстанавливается, при этом все кольцо является мягким. Поскольку $T(\rho, 0) < T_c$, на стадии 2 определяющие уравнения для внутренней и наружной частей кольца конечные, а время играет роль параметра. При этом само значение ρ_* может играть роль времени, так как изменяется монотонно (уменьшается).

При решении задачи использовались определяющие уравнения (4.1) (первое из них — проинтегрированное по времени), кольцо рассматривалось как составное тело при условии непрерывности T , σ_r , перемещения и окружной деформации ϵ_φ на $\rho = \rho_*$. Задача, как и предыдущая, решается в квадратурах. Будем обозначать величины, относящиеся к внутреннему, твердому кольцу индексом 0, к наружному, мягкому — индексом ∞ . Ниже приводятся формулы для радиального и окружного напряжений,

а также для контактного давления $p = -\sigma_r$ на $\rho = \rho_*$. На стадии 2 для внутреннего кольца

$$\sigma_r^0 = \sigma_0(1 + \rho_*^2 - \rho_*^2/\rho^2 - \rho^2) - p_0(1 - 1/\rho^2)$$

$$\sigma_\varphi^0 = \sigma_0(1 + \rho_*^2 + \rho_*^2/\rho^2 - 3\rho^2) - p_0(1 + 1/\rho^2)$$

а для наружного кольца

$$\sigma_r^\infty = \sigma_\infty(\rho_1^2 + \rho_*^2 - \rho_1^2\rho_*^2/\rho^2 - \rho^2) - p_\infty(\rho_1^2/\rho^2 - 1)$$

$$\sigma_\varphi^\infty = \sigma_\infty(\rho_1^2 + \rho_*^2 + \rho_1^2\rho_*^2/\rho^2 - 3\rho^2) + p_\infty(\rho_1^2/\rho^2 + 1)$$

$$\sigma_0 = E_0\alpha_0 T_*, \quad \sigma_\infty = E_\infty\alpha_\infty T_*$$

$$T_* = 1/4 \Delta T (\rho_1^2 - 1)^{-1}, \quad p_0 = p\rho_*^2 (\rho_*^2 - 1)^{-1}, \quad p_\infty = p\rho_*^2 (\rho_1^2 - \rho_*^2)^{-1}$$

$$p = -2T[\alpha_0(\rho_*^2 - 1) + \alpha_\infty(\rho_1^2 - \rho_*^2)] \{ [(\rho_*^2 + 1)/(\rho_*^2 - 1) - \nu_0]/E_0 - \\ + [(\rho_1^2 + \rho_*^2)/(\rho_1^2 - \rho_*^2) + \nu_\infty]/E_\infty \}^{-1}$$

где α_0, α_∞ — коэффициенты теплового расширения; ν_0, ν_∞ — коэффициенты Пуассона.

Формулы для стадии 1 получаются из приведенных для внутреннего кольца при $p=0, \rho_*=\rho_1$, а для стадии 3 — из формул для наружного кольца при $p=0, \rho_*=1$.

Расчеты были выполнены для следующих значений величин: $\rho_1=2, E_0=980,4$ МПа, $\nu_0=0,35, \alpha_0=68 \cdot 10^{-6}$ 1/град С, $E_\infty=63,49$ МПа, $\nu_\infty=0,5, \alpha_\infty=210 \cdot 10^{-6}$ 1/град С, $\Delta T=30^\circ$ С. Эти значения, кроме E_∞ , характерны для кольца из эпоксидного полимера ($a=1$ см, $b=2$ см), которое нагревали в квазистационарном режиме. Значение E_∞ завышено для того, чтобы получить сравнимые значения напряжений на всех стадиях. В расчетах варьировали значения ρ_* ($\rho_*=1,2; 1,4; 1,6; 1,8$).

Результаты расчета σ_r представлены на фиг. 6, σ_φ на фиг. 7 (жирные линии, числа у кривых — значения ρ_*). Тонкие линии относятся к тем стадиям, на которых кольцо было однородным (стадия 1 — $\rho_*=\rho_1=2$, стадия 3 — $\rho_*=1$). Ординаты σ_r при $\rho=\rho_*$ есть значения $-p$. Видно, что по мере уменьшения ρ_* значения $|p|$ возрастают (до значений $\rho_* \approx 1,1$; $p=0$ при $\rho_*=1$ и $\rho_*=\rho_1$). Этим объясняется, что в твердой части кольца графики для $\rho_*=1,2$ располагаются между графиками для $\rho_*=1,4$ и $1,6$. При значениях $\rho=\rho_*$ графики σ_r имеют излом, а σ_φ разрыв. Как следует из определяющих соотношений для ϵ_φ и условий непрерывности $\epsilon_\varphi, \sigma_r$ на $\rho=\rho_*$, разрыв σ_φ описывается зависимостью $\sigma_\varphi^\infty/E_\infty - \sigma_\varphi^0/E_0 = -p(\nu_\infty/E_\infty - \nu_0/E_0)$. Разрывы производных $\partial\sigma_r/\partial\rho$ и напряжений σ_φ связаны зависимостью, которая следует из дифференциального уравнения равновесия: $[\partial\sigma_r/\partial\rho] = [\sigma_\varphi]/\rho_*$. Из фиг. 6, 7 видно, что эти разрывы уменьшаются по мере приближения фронта размягчения к внутреннему контуру кольца.

Рассмотренная модель допускает различные обобщения. Так, коэффициенты упругости каждой из фаз можно считать переменными величинами. Можно учесть и неупругие деформации. Например, в случае степенного закона теории постоянной скорости ползучести вместо (2.2) будет $E_0 e^* = \sigma^* + B\sigma^m$, где B, m — константы материала.

Автор благодарит Л. В. Никитина и В. Л. Фомина за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Наумов В. Э. Механика растущих вязкоупруго-пластических тел. М.: Наука, 1987, 471 с.
2. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968, 416 с.
3. Бологин В. В. К теории вязкоупругости для структурно неустойчивых материалов // Тр. Моск. энергет. ин-та. 1972. Вып. 101. С. 7–14.
4. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязко-упругости. М.: Наука, 1970, 280 с.
5. Демидова И. И. Об однородном нагреве и охлаждении полимерных тел, жестко закрепленных по части поверхности // Поляризационно-оптический метод и его приложения к исследованию тепловых напряжений и деформаций. Тр. Всесоюз. семинара. Киев: Наук. думка, 1976. С. 71–76.
6. Бугаков И. И., Екельчик В. С. Начальные температурные напряжения в кольце из анизотропного вязкоупругого стеклопластика // Вопросы судостроения. Сер. Технология судостроения. Л. ЦНИИ «Румб». 1976. Вып. 12. С. 26–37.
7. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967, 599 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
2.II.1988