МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1989

УДК 539.374

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, Е. В. КОВАЛЕНКО, В. В. ФУРИН

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ СТАРЕЮЩЕГО СЛОЯ

На примере решения плоской контактной задачи о действии параболического штампа на тонкий стареющий вязкоупругий слой предложен алгоритм решения класса смешанных задач теории ползучести с монотонно растущими границами смены краевых условий. Получены явные формулы для основных характеристик контактного взаимодействия: осадки основания под штампом, области контакта, контактного давления. Обсуждается случай вязкоупругого слоя большой толщины.

Работа развивает идеи [1], где приведено замкнутое решение контактной задачи теории упругости при наличии абразивного износа с переменной областью контакта, которая сводится к уравнению, идентичному по своей структуре рассмотренному в данной статье.

1. Пусть в поверхность тонкого вязкоупругого слоя $(0\leqslant y\leqslant h)$, покоящегося на недеформируемом основании, вдавливается без трения силой P жесткий штамп. Форма основания последнего дается функцией $y=g(x)$ (для определенности ниже ограничимся рассмотрением случая параболического штампа, т. е. $g(x)=x^2(2R)^{-1}$), а линия контакта определяется неравенством $|x|\leqslant a(t)$ (фиг. 1), причем $ha^{-1}\ll 1$.

Реологические свойства вязкоупругого слоя будем описывать уравнениями линейной теории ползучести стареющих материалов [2]:

$$e_{ij}(t,\mathbf{r})=\frac{1+\nu}{E}\left[s_{ij}(t,\mathbf{r})-\int_{\tau_0}^{t}s_{ij}(\tau,\mathbf{r})K(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\,d\tau\right]$$
$$\varepsilon(t,\mathbf{r})=\frac{1-2\nu}{E}\left[\sigma(t,\mathbf{r})-\int_{\tau_0}^{t}\sigma(\tau,\mathbf{r})K(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\,d\tau\right] \qquad (1.1)$$
$$K(t,\tau)=E\partial C(t,\tau)/\partial\tau$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, s_{ij}, e_{ij} — девиаторы тензоров напряжений и деформаций, 3ε — объемная деформация, σ — среднее гидростатическое давление, $K(t,\tau)$ — ядро ползучести при одноосном напряженном состоянии (растяжение-сжатие), $C(t,\tau)$ — мера ползучести, τ_0 — момент приложения напряжений к элементу стареющей вязкоупругой среды, τ_1 — момент изготовления этого элемента. В (1.1) учтено, что коэффициент Пуассона ν и модуль Юнга E упругомгновенной деформации от времени t не зависят.

Воспользовавшись решением плоской задачи о действии распределенной нагрузки на тонкий стареющий слой [3], получим интегральное уравнение поставленной контактной задачи, которое в безразмерных переменных и с учетом обозначений

$$x^*=xR^{-1},\quad t^*=t\tau_0^{-1},\quad \tau_1^*=\tau_1\tau_0^{-1},\quad \varepsilon=hR^{-1}$$
$$a^*(t^*)=a(t)R^{-1},\quad \delta^*(t^*)=\delta[a(t)]R^{-1}$$
$$p(x^*,t^*)=2(1+\nu)E^{-1}q[x,a(t)],\quad N_0=2(1+\nu)P(ER)^{-1}$$

$$\mu=(1-2\nu)[2(1-\nu)]^{-1} \quad C^*(t^*, \tau^*)=EC(t, \tau)$$

$$K^*(t^*-\tau_1^*, \tau^*-\tau_1^*)=\tau_0 K(t-\tau_1, \tau-\tau_1)$$

(звездочку далее опустим) примет вид

$$\mu\varepsilon\left[p(x,t)-\int_1^t p(x,\tau)K(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\,d\tau\right]=\delta(t)-\frac{x^2}{2} \tag{1.2}$$

$$(0\leqslant x\leqslant a(t), \quad 1\leqslant t\leqslant T<\infty)$$

К уравнению (1.2) необходимо еще добавить соотношение

$$p(x,t)=0 \quad (x\geqslant a(t)) \tag{1.3}$$

служащее для определения неизвестной области контакта штампа с основанием, и условие квазиравновесия

$$N_0=2\int_0^a p(x,t)\,dx \tag{1.4}$$

Заметим, что поскольку здесь область контакта $a(t)$ является монотонно возрастающей функцией, то существует обратная к $a(t)$ функция $t=b(a)$. С учетом этого систему уравнений (1.2), (1.3) можно представить в форме

$$\mu\varepsilon\left[p(x,t)-\int_{e(x)}^t p(x,\tau)K(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\,d\tau\right]=\delta(t)-x^2/2 \quad (e(x)\leqslant t\leqslant T)$$

$$e(x)=\begin{cases}1 & (0\leqslant x\leqslant a(1))\\ b(x) & (a(1)<x\leqslant a(t))\end{cases} \tag{1.5}$$

Таким образом, поставленная задача о вдавливании параболического штампа в тонкий стареющий вязкоупругий слой свелась к исследованию интегрального уравнения (1.5) при условии (1.4).

2. Изложим алгоритм построения решения системы (1.4), (1.5). Полагая $x=a(t)$ и подставляя это выражение в интегральное уравнение (1.5), найдем

$$\delta(t)=[a(t)]^2/2 \tag{2.1}$$

Проинтегрируем обе части (1.5) по x в пределах от 0 до a. Используя условие (1.4) и соотношение (2.1), получим

$$\mu\varepsilon\left[N_0-2\int_0^{a(t)}dx\int_{e(x)}^t p(x,\tau)K(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\,d\tau\right]={}^2/_3[a(t)]^3 \tag{2.2}$$

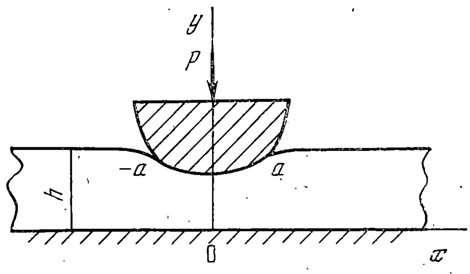
Изменим в повторном интеграле, стоящем в левой части (2.2), порядок интегрирования и примем во внимание (1.4) и последнюю зависимость (1.1). Будем иметь

$$a(t)=\{{}^3/_2\mu\varepsilon N_0[1+C(t-\tau_1, 1-\tau_1)]\}^{1/3} \tag{2.3}$$

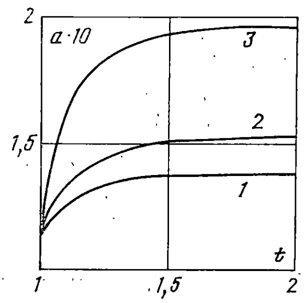
При выводе формулы (2.3) учтено, что $C(t,t)\equiv 0$ [4]. Дальнейшие рассуждения будут существенно использовать вид функции $C(t,\tau)$. Известно [2, 4], что в условиях старения материала, когда этот процесс не зависит от процесса деформирования, меру ползучести $C(t,\tau)$ можно представить в форме произведения двух функций

$$C(t,\tau)=C(t-\tau,\tau)=\varphi(\tau)f(t-\tau) \tag{2.4}$$

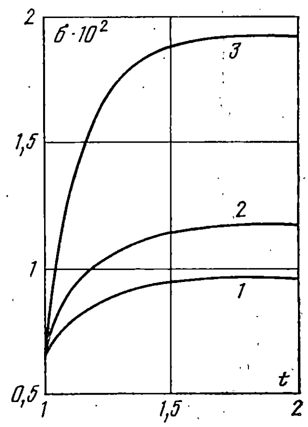
одна из которых $\varphi(\tau)$ учитывает процесс старения материала, а другая $f(t-\tau)$ — влияние длительности его загружения. Свойства функций



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

$\varphi(\tau)$ и $f(t-\tau)$ и их общий вид приведены в [4]. Здесь ограничимся рассмотрением одного важного случая, когда (A, C, α, β=const):

$$\varphi(\tau)=C+Ae^{-\alpha\tau},\quad f(t-\tau)=1-e^{-\beta(t-\tau)} \tag{2.5}$$

Продифференцируем интегральное уравнение (1.5) с ядром (1.1), (2.4), (2.5) два раза по t и избавимся в полученном таким образом соотношении от квадратур. После несложных преобразований придем к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка [5]

$$\begin{gathered}\mu\varepsilon\{p^{\cdot\cdot}(x,t)+\beta[1+C+Ae^{-\alpha(t-\tau_1)}]p^{\cdot}(x,t)\}=\\ =\delta^{\cdot\cdot}(t)+\beta\delta^{\cdot}(t)\quad (0\leqslant x\leqslant a,\ e(x)\leqslant t\leqslant T)\end{gathered} \tag{2.6}$$

с начальными условиями

$$\begin{gathered}\mu\varepsilon p[x,e(x)]=\delta[e(x)]-x^2/2\\ \mu\varepsilon p^{\cdot}[x,e(x)]=\delta^{\cdot}[e(x)]-K[e(x)-\tau_1,e(x)-\tau_1]\times\\ \times\{\delta[e(x)]-x^2/2\}=\delta^{\cdot}[e(x)]-\beta\varphi[e(x)-\tau_1]\{\delta[e(x)]-x^2/2\}\end{gathered} \tag{2.7}$$

Из (2.6), (2.7) найдем

$$\begin{gathered}p(x,t)=D_1(x)\int\limits_{e(x)}^{t}\exp[-F(\tau)]d\tau+\\ +\int\limits_{e(x)}^{t}\exp[-F(\tau)]d\tau\int\limits_{e(x)}^{\tau}g(\eta)\exp[F(\eta)]d\eta+D_2(x)\end{gathered} \tag{2.8}$$

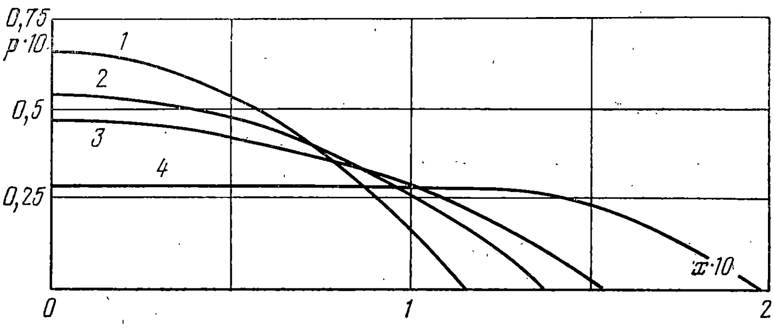
$$D_1(x)=(\mu\varepsilon)^{-1}\exp\{F[e(x)]\}\{\delta^{\cdot}[e(x)]-\beta\varphi[e(x)-\tau_1][\delta[e(x)]-x^2/2]\}$$

$$D_2(x)=(\mu\varepsilon)^{-1}\{\delta[e(x)]-x^2/2\}$$

$$F(t)=\beta(1+C)t-\beta\alpha^{-1}A\exp[-\alpha(t-\tau_1)]$$

$$g(t)=(\mu\varepsilon)^{-1}[\delta^{\cdot\cdot}(t)+\beta\delta^{\cdot}(t)]$$

Для окончательного построения искомого решения необходимо определить закон $t=b(a)$ и подставить его, в согласии с последней формулой



Фиг. 4

(1.5), в соотношения (2.8). Воспользовавшись тождеством (2.3), получим $t=b(a)=-\beta^{-1}\ln\{1+(3\mu\varepsilon N_0-2a^3)[3\mu\varepsilon N_0\varphi(1-\tau_1)]^{-1}\}+1$ и, таким образом, выпишем неизвестные функции $\delta(t)$, $a(t)$ и $p(x,t)$ в виде (1.5), (2.1), (2.3)–(2.5), (2.8), (2.9).

В качестве примера приведем решение поставленной задачи в случае $N_0=10^{-2}$; $\mu\varepsilon=0,1$; $C=0,5522$; $A=4$; $\alpha=3,1$; $\beta=6$. Такие значения параметров встречаются при расчетах сооружений из бетона.

На фиг. 2, 3 изображены графики $a(t)$ и $\delta(t)$ для некоторых значений τ_1 ($\tau_1=0,01$ – кривые I, $\tau_1=0,5$ – кривые 2, $\tau_1=0,95$ – кривые 3). Видно, что с ростом времени t функции $a(t)$ и $\delta(t)$ возрастают, стремясь к предельным значениям, которые тем больше, чем меньше возраст $(1-\tau_1)$ материала слоя, ибо с ростом возраста материала происходит его упрочнение.

Закон распределения контактных давлений $p(x, t)$ при $t=1$ ($\tau_1=0,01$; 0,5; 0,95) – кривая *1*, $t=2$ ($\tau_1=0,01$) – *2*, $t=2$ ($\tau_1=0,5$) – *3*, $t=2$ ($\tau_1=0,95$) – *4* приведен на фиг. 4. Можно заметить, что с ростом времени t при прочих равных факторах максимальное давление под штампом уменьшается. Если теперь зафиксировать t и изменять τ_1, то при $t>1$ с ростом возраста материала слоя происходит увеличение максимального контактного давления.

3. Рассмотрим еще один важный частный случай уравнения (1.2), когда

$$-\mu\varepsilon K(t-\tau_1,\ \tau-\tau_1)=ke^{-\lambda(t-\tau)}\quad (k,\lambda=\text{const}) \tag{3.1}$$

С учетом (3.1) перепишем его в форме

$$\mu\varepsilon p(x,t)+k\int_0^t p(x,\tau)e^{-\lambda(t-\tau)}\,d\tau=\delta(t)-\frac{x^2}{2} \tag{3.2}$$

$$(0\leqslant x\leqslant a(t),\ 0\leqslant t\leqslant T<\infty)$$

При $\lambda=0$ к уравнению (3.2) сводится контактная задача теории упругости об абразивном износе тонкого мягкого покрытия [1], а при $\lambda\neq 0$, $k=\mu\varepsilon$ – контактная задача о вдавливании параболического штампа в тонкий вязкоупругий слой, описываемый моделью Кельвина – Фойхта.

Используя, как и в п. 1, условие (1.3), придем к эквивалентному (3.2) интегральному уравнению вида ($a_0=a(0)$):

$$\mu\varepsilon p(x,t)+k\int_{e(x)}^{t} p(x,\tau)e^{-\lambda(t-\tau)}\,d\tau=\delta(t)-\frac{x^2}{2} \tag{3.3}$$

$$e(x)=\begin{cases}0 & (0\leqslant x\leqslant a_0)\\ b(x) & (a_0<x\leqslant a)\end{cases}$$

которое должно решаться при условии (1.4).

Из (3.3) при $x=a(t)$ найдем осадку основания под штампом в форме (2.1), а при помощи (1.4) – величину неизвестной области контакта по формуле

$$a(t)=\{{}^3/{}_2N_0[\mu\varepsilon+k/\lambda(1-e^{-\lambda t})]\}^{1/3} \tag{3.4}$$

Перейдем далее от (3.3) к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, для чего продифференцируем обе части по t:

$$\mu\varepsilon p^{\cdot}(x,t)+(k+\lambda\mu\varepsilon)p(x,t)=\delta^{\cdot}(t)+\lambda[\delta(t)-x^2/2] \tag{3.5}$$

$$p[x,e(x)]=(\mu\varepsilon)^{-1}\{\delta[e(x)]-x^2/2\} \tag{3.6}$$

Решение задачи (3.5), (3.6) можно записать в виде

$$p(x,t)=\frac{1}{\mu\varepsilon}\exp\left[-\left(\frac{k}{\mu\varepsilon}+\lambda\right)t\right]\left\{\int\limits_{e(x)}^{t}\exp\left[\left(\frac{k}{\mu\varepsilon}+\lambda\right)\tau\right][\delta^{\cdot}(\tau)+\right.$$
$$\left.+\lambda\delta(\tau)-\lambda x^2/2]d\tau+\exp\{[k(\mu\varepsilon)^{-1}+\lambda]e(x)\}[\delta[e(x)]-x^2/2]\right\} \tag{3.7}$$
$$b(a)=-\lambda^{-1}\ln[\lambda/k(3\mu\varepsilon N_0-2a^3)(3N_0)^{-1}+1)$$

и, таким образом, построить решение уравнения (3.2), (1.3), (1.4) в форме (2.1), (3.4), (3.7). При $\lambda=0$ из указанных формул, после вычисления получающихся квадратур, найдем ($\gamma(\alpha,\beta)$ — неполная гамма-функция):

$$a(t)=[{}^3/{}_2N_0(\mu\varepsilon+kt)]^{1/3},\quad a_0=({}^3/{}_2\mu\varepsilon N_0)^{1/3} \tag{3.8}$$

$$p(x,t)=(\mu\varepsilon)^{-1}\exp[-kt(\mu\varepsilon)^{-1}]\{(N_0/12)^{1/3}\times$$
$$\times\exp[-2a_0^2(3N_0)^{-1}][\gamma({}^2/{}_3,-(\mu\varepsilon+kt))-\gamma({}^2/{}_3,-\mu\varepsilon)]+$$
$$+{}^1/{}_2(a_0^2-x^2)\}\quad(0\leqslant x\leqslant a_0)$$

$$p(x,t)=(\mu\varepsilon)^{-1}(N_0/12)^{1/3}\exp[-kt(\mu\varepsilon)^{-1}-$$
$$-2a_0^2(3N_0)^{-1}][\gamma({}^2/{}_3,-(\mu\varepsilon+kt))-\gamma({}^2/{}_3,-\mu\varepsilon)]\quad(a_0<x\leqslant a)$$

Заметим, что нетрудно также рассмотреть случай, когда сила, действующая на штамп N_0, является монотонно возрастающей функцией времени. Это замечание относится и к задаче, рассмотренной в пп. 1, 2.

4. Приведем алгоритм исследования контактной задачи о вдавливании параболического штампа в вязкоупругий стареющий слой большой толщины H. Известно [6], что интегральное уравнение такой задачи с учетом безразмерных переменных и обозначений, принятых в п. 1, можно записать в операторной форме

$$(\mathbf{I}-\mathbf{V})\mathbf{F}p=\delta-x^2/2\quad(0\leqslant x\leqslant a(t),\quad 1\leqslant t\leqslant T<\infty) \tag{4.1}$$

$$\mathbf{V}f=\int\limits_1^t f(\tau)K(t-\tau_1,\tau-\tau_1)d\tau$$

$$\mathbf{F}f=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{a(t)}f(\xi)(-\ln|\xi^2-x^2|+2d)d\xi$$

где $\mathbf{I}$ — единичный оператор, а $d=\ln\Lambda+d_0(\Lambda=HR^{-1})$, причем $d_0=-0{,}352$ и $d_0=-0{,}527$ при $\nu=0{,}3$, соответственно, когда слой лежит без трения на недеформируемом основании и когда жестко сцеплен с ним [7].

Поменяв порядок интегрирования в (4.1) [8], имеем

$$\mathbf{F}(\mathbf{I}-\mathbf{V})p=\delta-x^2/2\quad(0\leqslant x\leqslant a(t),\ 1\leqslant t\leqslant T) \tag{4.2}$$

Если теперь принять внутренний интеграл в (4.2) за новое неизвестное и обратить оператор Фредгольма в классе ограниченных на краях функций, найдем

$$(\mathbf{I}-\mathbf{V})p=[a^2(t)-x^2]^{1/2}\quad(0\leqslant x\leqslant a(t),\ 1\leqslant t\leqslant T) \tag{4.3}$$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{V})N_0={}^1/{}_2\pi a^2(t),\quad(\mathbf{I}-\mathbf{V})N_0=$$
$$=\pi\delta(t)\{\ln[2\Lambda a^{-1}(t)]+d_0+{}^1/{}_2\} \tag{4.4}$$

Пусть задана монотонно растущая сила $N_0(t)$, прижимающая штамп к основанию. Тогда из (4.4) определим $a(t)$ и $\delta(t)$. Затем из уравнения (4.3) по схеме, использованной для тонкой полосы (по схеме для уравнения (1.2)), найдем $p(x, t)$ в диапазонах $0 \leqslant x \leqslant a(1)$ и $a(1) < x \leqslant a(t)$.

Если известна монотонно увеличивающаяся осадка штампа $\delta(t)$, то из соотношения $a^2(t) = 2\delta(t)\{\ln[2\Lambda a^{-1}(t)] + d_0 + {}^1/_2\}^{-1}$ определим $a(t)$. Далее по одной из формул (4.4) получим $N_0(t)$, а из (4.3) найдем $p(x, t)$.

В заключение заметим, что и для тонкого слоя (пп. 1—3) может быть рассмотрен случай, когда задана не сила, действующая на штамп, а его монотонно растущая осадка $\delta(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Аналитическое решение контактной задачи об изнашивании сопряжения вал-втулка // Трение и износ. 1987. Т. 8. № 6. С. 985—995.
2. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 324 с.
3. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
4. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
5. *Коваленко Е. В., Манжиров А. В.* Контактная задача для двухслойного стареющего вязкоупругого основания // 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 674—682.
6. Развитие теории контактных задач в СССР/Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
7. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
8. *Белоконь А. В., Ворович И. И.* Контактные задачи линейной теории вязкоупругости без учета сил трения и сцепления // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 6. С. 63—73.

Москва

Поступила в редакцию
11.XII.1987