

УДК 539.3

Л. Н. ЯСНИЦКИЙ

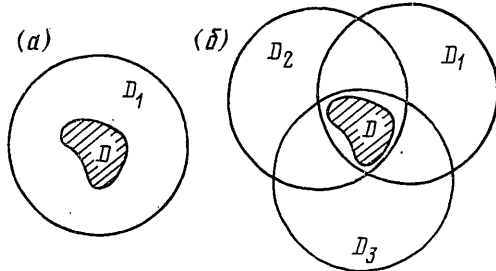
**СУПЕРПОЗИЦИЯ БАЗИСНЫХ РЕШЕНИЙ
В МЕТОДАХ ТИПА ТРЕФФЦА**

При решении краевых задач методом Треффца в качестве базовых разложений предлагается применять суммы общих решений, относящихся к фиктивным каноническим областям, пересечение которых включает заданное тело.

В классической работе [1] предложен метод приближенного решения граничных задач теории упругости, заключающийся в том, что искомое решение представляется в виде суммы N -координатных функций

$$f = \sum_{n=1}^N c_n f_n(x_i) \quad (i=1, 2, 3) \quad (1)$$

каждая из которых удовлетворяет исходным дифференциальным уравнениям, а постоянные коэффициенты c_n отыскиваются из условия приближенного выполнения граничных условий задачи путем минимизации соответствующего функционала. Вопросы развития и применения метода Треффца занимались авторы работ [2–4] и другие исследователи, но подход не получил достаточно широкого распространения из-за трудностей выбора базисных функций $f_n(x_i)$, обеспечивающих полноту, сходимость и устойчивость, необходимых при численной реализации метода.

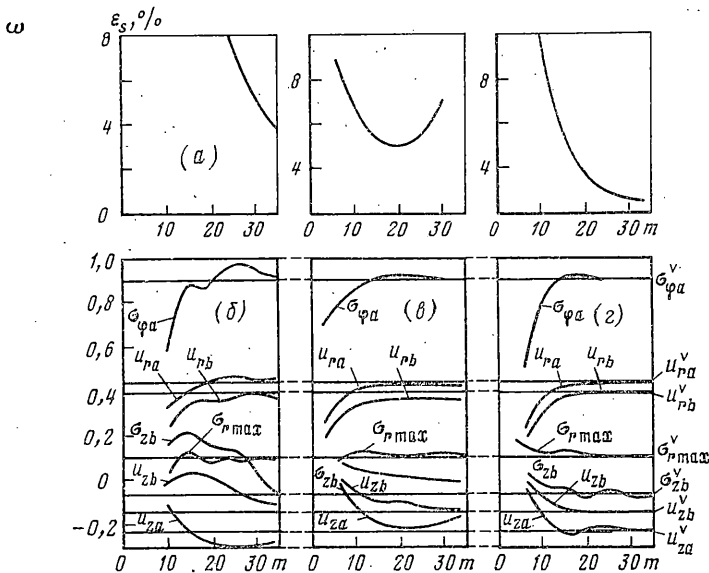
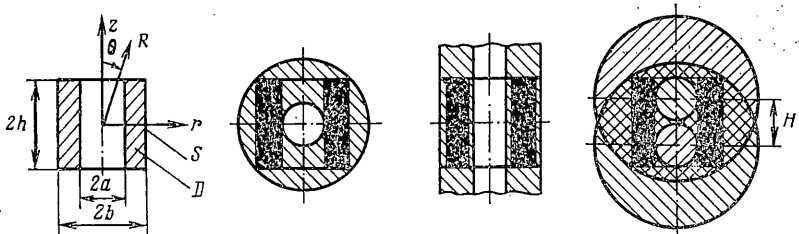


Фиг. 1

В [5] предложено при решении задачи в области D в качестве разложения (1) использовать общее решение уравнений Ламе, относящееся к некоторой фиктивной канонической области D_1 , включающей D (фиг. 1, а). Однако, как показано в [6], такой способ не приводит к решению задачи в тех случаях, когда искомое в области D решение не может быть продолжено в D_1 , как решение исходных дифференциальных уравнений. Нарушение продолжимости решения за границы области D обычно бывает вызвано наличием в $D_1 \setminus D$ сингулярностей, разрывов, изломов, или другого рода особенностями. Выбор фиктивной области D_1 , удовлетворяющей требованию продолжимости [6], в практических задачах часто затруднителен и не всегда возможен [7].

Круг задач, решаемых методами типа Треффца, может быть расширен, если при построении базовых разложений (1) использовать сумму k общих решений, относящихся к фиктивным каноническим областям D_1, D_2, \dots, D_k , пересечение которых содержит заданную область D , как показано на фиг. 1, б. Поясним эту идею на конкретном примере.

В системе сферических координат R, θ, φ , изображенных на фиг. 2, а, задан полый цилиндр D , ограниченный поверхностью S . Длина цилиндра $2h$, внешний диаметр $2b$, внутренний диаметр — $2a$. Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω .



Фиг. 2

Определение напряженно-деформированного состояния (НДС) рассматриваемого тела сводится к решению граничной задачи теории упругости, включающей три группы уравнений.

1. Дифференциальные уравнения равновесия в форме Ламе [8]

$$(\lambda+2\mu)R \sin \theta \frac{\partial \Delta}{\partial R} - 2\mu \frac{\partial}{\partial \theta} (\Omega \sin \theta) = -\rho F_R \quad (2)$$

$$(\lambda+2\mu) \sin \theta \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + 2\mu \frac{\partial}{\partial R} (R\Omega \sin \theta) = -\rho F_\theta$$

$$\Delta = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R^2 U_R \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (R U_\theta \sin \theta) \right]$$

$$\Omega = \frac{1}{2R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R U_\theta) - \frac{\partial U_R}{\partial \theta} \right]$$

где $F_R = \omega^2 R \sin^2 \theta$, $F_\theta = \omega^2 R \sin \theta \cos \theta$ — компоненты вектора центробежных сил, U_R , U_θ — компоненты вектора перемещения, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала, $\lambda = E\nu / [(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}$, $\mu = E/2(1+\nu)$.

2. Граничные условия на поверхности S :

$$P_{vR} = \sigma_R \cos \alpha + \tau_{R\theta} \cos \beta = 0, \quad P_{v\theta} = \tau_{R\theta} \cos \alpha + \sigma_\theta \cos \beta = 0 \quad (3)$$

где \mathbf{v} — внешняя нормаль к S ; α и β — углы между \mathbf{v} и координатными направлениями R и θ ; σ_R , σ_θ , σ_φ , $\tau_{R\theta}$ — компоненты тензора напряжений.

3. Физические уравнения

$$\sigma_R = 2\mu [\varepsilon_R + \nu \Delta / (1-2\nu)], \quad \tau_{R\theta} = \mu \gamma_{R\theta} \quad (4)$$

$$\sigma_z = 2\mu [\varepsilon_z + \nu \Delta / (1-2\nu)], \quad \sigma_\varphi = 2\mu [\varepsilon_\varphi + \nu \Delta / (1-2\nu)]$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_R &= \frac{\partial U_R}{\partial R}, & \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_R}{R} \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{U_\theta}{R} \operatorname{ctg} \theta + \frac{U_R}{R}, & \gamma_{R\theta} &= \frac{\partial U_\theta}{\partial R} - \frac{U_\theta}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_R}{\partial \theta} \end{aligned}$$

В соответствии с методом фиктивных канонических областей [5] в качестве базового разложения (1) будем использовать общее решение уравнений теории упругости, относящееся к полному шару, в который может быть вписан исследуемый цилиндр, как показано на фиг. 2, б. Общее решение задачи о НДС полого шара при произвольном симметричном относительно вертикальной оси нагружении поверхностными нагрузками, имеется в [9]:

$$\begin{aligned} U_R &= \sum_{n=-N}^N [a_n f_1^{(n)} + b_n f_2^{(n)}], & U_\theta &= \sum_{n=-N}^N [a_n f_3^{(n)} + b_n f_4^{(n)}] \\ \sigma_R &= \sum_{n=-N}^N [a_n f_5^{(n)} + b_n f_6^{(n)}], & \sigma_\theta &= \sum_{n=-N}^N [a_n f_7^{(n)} + b_n f_8^{(n)}] \\ \sigma_\varphi &= \sum_{n=-N}^N [a_n f_9^{(n)} + b_n f_{10}^{(n)}], & \tau_{R\theta} &= \sum_{n=-N}^N [a_n f_{11}^{(n)} + b_n f_{12}^{(n)}] \end{aligned} \quad (5)$$

где $2N+1$ — количество слагаемых, удержанных в рядах общего решения; a_n, b_n — произвольные постоянные. Координатные функции $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \dots, f_{12}^{(n)}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} f_1^{(n)} &= R^{n+1} (n+1) (n-2+4\nu) P_n, & f_2^{(n)} &= R^{n+1} (n+2) P_{n+2} \\ f_3^{(n)} &= R^{n+1} (n+5-4\nu) dP_n/d\theta, & f_4^{(n)} &= R^{n+1} dP_{n+2}/d\theta \\ f_5^{(n)} &= 2\mu R^n (n+1) (n^2-n-2-2\nu) P_n, & f_6^{(n)} &= 2\mu R^n (n+2) (n+1) P_{n+2} \\ f_7^{(n)} &= -2\mu R^n [(n^2+4n+2+2\nu) (n+1) P_n + (n+5-4\nu) \operatorname{ctg} \theta dP_n/d\theta] \\ f_8^{(n)} &= -2\mu R^n [(n+2)^2 P_{n+2} + \operatorname{ctg} \theta dP_{n+2}/d\theta] \\ f_9^{(n)} &= 2\mu R^n [(n+1) (n-2-2\nu-4\nu\nu) P_n + (n+5-4\nu) \operatorname{ctg} \theta dP_n/d\theta] \\ f_{10}^{(n)} &= 2\mu R^n [(n+2) P_{n+2} + \operatorname{ctg} \theta dP_{n+2}/d\theta] \\ f_{11}^{(n)} &= 2\mu R^n (n^2+2n-1+2\nu) dP_n/d\theta, & f_{12}^{(n)} &= 2\mu R^n (n+1) dP_{n+2}/d\theta \end{aligned} \quad (6)$$

В этих выражениях P_n — полином Лежандра, аргументом которого является $\cos \theta$, причем $P_{-(n+1)} = P_n$ [9]. Часть функций в разложениях (5) может быть опущена в силу симметрии задачи относительно оси r . Это достигается путем замены в правых частях равенств (6) индекса n на k , где $k=2n$ при $n \geq 0$ и $k=2n+1$ при $n < 0$.

Общее решение (5) удовлетворяет уравнениям (2), когда их правые части равны нулю. Поэтому к (5) необходимо добавить какое-либо частное решение неоднородных уравнений (2); например [10], преобразованное в сферическую систему координат:

$$\begin{aligned} U_R^* &= -1/16 \rho \omega^2 \mu^{-1} (1-\nu)^{-1} (1-2\nu) R^3 \sin^4 \theta \\ U_\theta^* &= -1/16 \rho \omega^2 \mu^{-1} (1-\nu)^{-1} (1-2\nu) R^3 \sin^3 \theta \cos \theta \\ \sigma_R^* &= -1/8 \rho \omega^2 (1-\nu)^{-1} [(3-2\nu) \sin^2 \theta + 4\nu \cos^2 \theta] R^2 \sin^2 \theta \\ \sigma_\theta^* &= -1/8 \rho \omega^2 (1-\nu)^{-1} [(3-2\nu) \cos^2 \theta + 4\nu \sin^2 \theta] R^2 \sin^2 \theta \\ \sigma_\varphi^* &= -1/8 \rho \omega^2 (1-\nu)^{-1} (1+2\nu) R^2 \sin^2 \theta \\ \tau_{R\theta}^* &= -3/8 \rho \omega^2 (1-\nu)^{-1} (1-2\nu) R^2 \sin^3 \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (7)$$

Сумма решений (5) и (7) удовлетворяет системе исходных дифференциальных уравнений (2) и физическим уравнениям (4). Выполнение граничных условий (3) будем требовать приближенно путем минимизации функционала [2]:

$$\Phi = \int_{S_1} (P_{vR}^2 + P_{v0}^2) dS \quad (8)$$

в котором в соответствии с (3), (5) и (7):

$$P_{vR} = \sum_{n=-N}^N [a_n \Psi_1^{(n)} + b_n \Psi_2^{(n)}] + P_{vR}^*, \quad P_{v0} = \sum_{n=-N}^N [a_n \Psi_3^{(n)} + b_n \Psi_4^{(n)}] + P_{v0}^* \quad (9)$$

$$\Psi_1^{(n)} = f_5^{(n)} \cos \alpha + f_{11}^{(n)} \cos \beta, \quad \Psi_2^{(n)} = f_6^{(n)} \cos \alpha + f_{12}^{(n)} \cos \beta$$

$$\Psi_3^{(n)} = f_{11}^{(n)} \cos \alpha + f_7^{(n)} \cos \beta, \quad \Psi_4^{(n)} = f_{12}^{(n)} \cos \alpha + f_8^{(n)} \cos \beta$$

$$P_{vR}^* = \sigma_R^* \cos \alpha + \tau_{R0}^* \cos \beta, \quad P_{v0}^* = \tau_{R0}^* \cos \alpha + \sigma_0^* \cos \beta$$

причем под S_1 понимается часть поверхности S , лежащая выше оси r . Подставляя разложения (9) в (8) и выполняя дифференцирование функционала по неопределенным коэффициентам, приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно a_n и b_n :

$$\sum_{n=-N}^N \left\{ a_n \int_{S_1} (\Psi_1^{(n)} \Psi_1^{(l)} + \Psi_3^{(n)} \Psi_3^{(l)}) dS_1 + b_n \int_{S_1} (\Psi_2^{(n)} \Psi_1^{(l)} + \Psi_4^{(n)} \Psi_3^{(l)}) dS_1 \right\} = - \int_{S_1} (P_{vR}^* \Psi_1^{(l)} + P_{v0}^* \Psi_3^{(l)}) dS_1 \quad (10)$$

$$\sum_{n=-N}^N \left\{ a_n \int_{S_1} (\Psi_1^{(n)} \Psi_2^{(l)} + \Psi_3^{(n)} \Psi_4^{(l)}) dS_1 + b_n \int_{S_1} (\Psi_2^{(n)} \Psi_2^{(l)} + \Psi_4^{(n)} \Psi_4^{(l)}) dS_1 \right\} = - \int_{S_1} (P_{vR}^* \Psi_2^{(l)} + P_{v0}^* \Psi_4^{(l)}) dS_1$$

где $l = -N, -N+1, \dots, N-1, N$. Порядок системы $m = 2(2N+1)$.

После решения системы (10), перемещения и напряжения, полученные суммированием (5) и (7), удобно преобразовать в цилиндрические координаты r, z, φ (см. фиг. 2, а):

$$U_r = U_R \sin \theta + U_0 \cos \theta, \quad U_z = U_R \cos \theta - U_0 \sin \theta$$

$$\sigma_r = \sigma_R \sin^2 \theta + \sigma_0 \cos^2 \theta + \tau_{R0} \sin 2\theta$$

$$\sigma_z = \sigma_R \cos^2 \theta + \sigma_0 \sin^2 \theta - \tau_{R0} \sin 2\theta$$

$$\tau_{rz} = 1/2 (\sigma_R - \sigma_0) \sin 2\theta + \tau_{R0} \cos 2\theta$$

Изложенный алгоритм был реализован на ЭВМ СМ-4. Результаты расчетов — безразмерные напряжения $\sigma_{ij}/(\rho \omega^2 b^2)$ и перемещения $U_i E/(\rho \omega^2 b^3)$, сравнивались с точным решением задачи [11] при $\nu = 0,3; h = b; a/b = 0,5$. Сравнению подвергались окружные и осевые напряжения в сечении $z=0$ на внутренней ($r=a$) и наружной ($r=b$) поверхностях цилиндра — $\sigma_{\varphi a}$ и $\sigma_{z b}$; радиальные перемещения в тех же точках — U_{ra} и U_{rb} ; максимальное радиальное напряжение — $\sigma_{r \max}$; осевые перемещения торца ($z=h$) на внутренней и наружной поверхностях цилиндра — U_{za} и U_{zb} . На фиг. 2, б указаны характеристики НДС представлены в зависимости от порядка системы алгебраических уравнений m . Кроме того, в каждом расчетном варианте определялась максимальная погрешность удовлетворения граничных условий на поверхности S : $\varepsilon_S = [\max_S(P_{vi})/\max_D(\sigma_{ij}^*)]$.

·100%, максимальное относительное отклонение приближенного решения задачи от точного по напряжениям $\varepsilon_\sigma = [\max_D(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\sim}) / \max_D(\sigma_{ij}^{\sim})] 100\%$ и по перемещениям $\varepsilon_U = [\max_D(U_i - U_i^{\sim}) / \max_D(U_i^{\sim})] 100\%$, где по данным [11] $\max_D(\sigma_{ij}^{\sim}) = \sigma_{\varphi a}^{\sim} = 0,9083$, $\max_D(U_i^{\sim}) = U_b^{\sim} = 0,4495$. Как видно из зависимостей, приведенных на фиг. 2, б, значения ε_S убывают с ростом порядка системы, а компоненты напряжений и деформаций стремятся к своим точным значениям $\sigma_{\varphi a}^{\sim}$, U_{ra}^{\sim} , U_{rb}^{\sim} , $\sigma_{r \max}$, σ_{zb} , U_{zb}^{\sim} , U_{za}^{\sim} . При $m=30$ погрешность удовлетворения граничных условий (ε_S) снизилась до 5%, погрешность решения задачи по напряжениям (ε_σ) составила 3,3%, по перемещениям (ε_U) — 14%.

Дальнейшее снижение погрешностей ε_S , ε_σ и ε_U может быть достигнуто за счет удерживания большого количества слагаемых в рядах базовых разложений (5), а также путем применения методик регуляризации матрицы системы алгебраических уравнений. Однако, целью настоящей работы является создание экономичных алгоритмов, реализуемых на малых и персональных ЭВМ.

Следующая попытка решения граничной задачи отличается тем, что заданное тело погружалось в бесконечно длинный полый цилиндр, как показано на фиг. 2, в. Общее решение задачи о НДС бесконечного цилиндра при симметричном относительно вертикальной оси нагружении имеется в [9]. Как видно из изображенных на фиг. 2, в зависимостей, погрешность удовлетворения граничных условий снижается до 2,8% при $m=18$ и возрастает с дальнейшим увеличением m . Такое поведение ε_S объясняется ухудшением обусловленности матрицы системы алгебраических уравнений при $m > 18$. Тем не менее, характеристики НДС стремятся к своим точным значениям, за исключением величины σ_{zb} , отклонение которой при $m=30$ увеличилось до 6,5%, а также величины U_{za} , отклонившейся на 11% от точного значения.

Третий вариант расчета, представленный на фиг. 2, г, реализует идею суперпозиции базовых решений, предлагаемую в настоящей статье. Заданный цилиндр погружается в область, ограниченную пересечением двух полых шаров, центры которых смещены на расстояние $H/2$ выше и ниже геометрического центра цилиндра. В сферических координатах R' , θ' , φ' и R'' , θ'' , φ'' , помещенных в центры верхнего и нижнего фиктивных шаров, НДС каждого шара определяется общим решением (5), которое перепишем в сокращенных обозначениях

$$U_i' = U_i'(R', \theta', a_n', b_n'), \quad \sigma_{ij}' = \sigma_{ij}'(R', \theta', a_n', b_n') \quad \text{— для верхнего шара;}$$

$$U_i'' = U_i''(R'', \theta'', a_n'', b_n''), \quad \sigma_{ij}'' = \sigma_{ij}''(R'', \theta'', a_n'', b_n'') \quad \text{— для нижнего шара.}$$

Преобразование этих решений в сферическую систему координат R , θ , φ , связанную с центром цилиндра, выполняется по формулам [8]:

$$U_R^{(1)} = U_R' \cos \alpha' - U_\theta' \sin \alpha', \quad U_\theta^{(1)} = U_R' \sin \alpha' + U_\theta' \cos \alpha'$$

$$\sigma_R^{(1)} = \sigma_R' \cos^2 \alpha' + \sigma_\theta' \sin^2 \alpha' - \tau_{R\theta}' \sin 2\alpha'$$

$$\sigma_\theta^{(1)} = \sigma_R' \sin^2 \alpha' + \sigma_\theta' \cos^2 \alpha' + \tau_{R\theta}' \sin 2\alpha', \quad \sigma_\varphi^{(1)} = \sigma_\varphi'$$

$$\tau_{R\theta}^{(1)} = 1/2(\sigma_R' - \sigma_\theta') \sin 2\alpha' + \tau_{R\theta}' \cos 2\alpha'$$

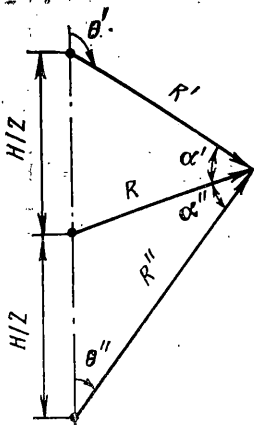
$$U_R^{(2)} = U_R'' \cos \alpha'' + U_\theta'' \sin \alpha'', \quad U_\theta^{(2)} = -U_R'' \sin \alpha'' + U_\theta'' \cos \alpha''$$

$$\sigma_R^{(2)} = \sigma_R'' \cos^2 \alpha'' + \sigma_\theta'' \sin^2 \alpha'' + \tau_{R\theta}'' \sin 2\alpha''$$

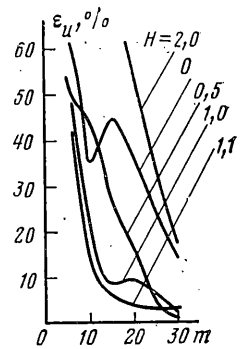
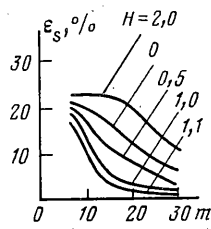
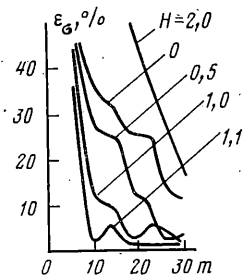
$$\sigma_\theta^{(2)} = \sigma_R'' \sin^2 \alpha'' + \sigma_\theta'' \cos^2 \alpha'' - \tau_{R\theta}'' \sin 2\alpha'', \quad \sigma_\varphi^{(2)} = \sigma_\varphi''$$

$$\tau_{R\theta}^{(2)} = 1/2(\sigma_\theta'' - \sigma_R'') \sin 2\alpha'' + \tau_{R\theta}'' \cos 2\alpha'',$$

где, как изображено на фиг. 3, $\alpha' = \arccos \{ [(R')^2 + R^2 - (H/2)^2] / 2R'R \}$, $\alpha'' = \arccos \{ [(R'')^2 + R^2 - (H/2)^2] / 2R''R \}$; $U_R^{(1)}$, $U_\theta^{(1)}$, $\sigma_R^{(1)}$, $\sigma_\theta^{(1)}$, $\sigma_\varphi^{(1)}$, $\tau_{R\theta}^{(1)}$,



Фиг. 3



Фиг. 4

$U_R^{(2)}$, $U_\theta^{(2)}$, $\sigma_R^{(2)}$, $\sigma_\theta^{(2)}$, $\sigma_\varphi^{(2)}$, $\tau_{R\theta}^{(2)}$ — компоненты напряженно-деформированного состояния верхнего и нижнего фиктивных шаров в центральной системе координат R, θ, φ .

Теперь можно найти искомую сумму общих решений:

$$U_R = U_R^{(1)} + U_R^{(2)}, \quad U_\theta = U_\theta^{(1)} + U_\theta^{(2)}, \quad \sigma_R = \sigma_R^{(1)} + \sigma_R^{(2)}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta^{(1)} + \sigma_\theta^{(2)}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\varphi^{(1)} + \sigma_\varphi^{(2)}, \quad \tau_{R\theta} = \tau_{R\theta}^{(1)} + \tau_{R\theta}^{(2)}$$

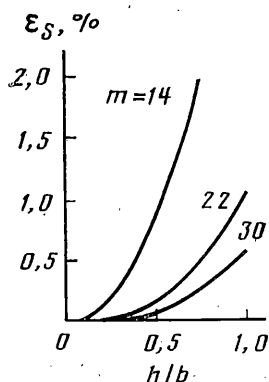
В полученное таким образом решение входит $4(2N+1)$ постоянных коэффициентов: a_n', b_n', a_n'', b_n'' . В силу симметрии задачи можно положить $a_n' = a_n''$ и $b_n' = b_n''$, тогда количество постоянных уменьшается до $2(2N+1) = m$. Дальнейший алгоритм решения граничной задачи совпадает с изложенным выше.

Результаты вычислений, выполненных при $H=1,1$, представлены на фиг. 2, г. Этот вариант отличается наибольшей скоростью уменьшения погрешности удовлетворения граничных условий и стремления характеристик НДС к точным значениям. Так, при $m=30$ величина ϵ_s составила 0,6, $\epsilon_\sigma - 1,2$, $\epsilon_u - 3,5\%$.

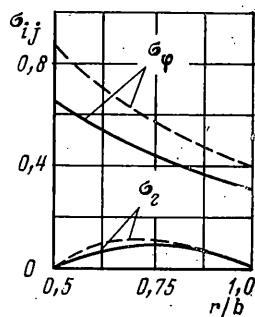
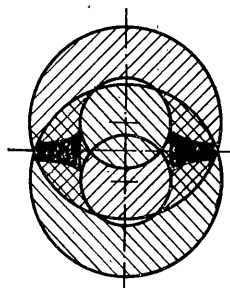
Следует отметить, что сходимость приближенных решений к точному зависит от расположения фиктивных областей. На фиг. 4 построены зависимости погрешности удовлетворения граничных условий (ϵ_s) и погрешностей решения задачи ($\epsilon_\sigma, \epsilon_u$) от порядка системы (m) при разных расстояниях между центрами фиктивных шаров (H). Как видно из рисунка, приведенные зависимости имеют одинаковую тенденцию к убыванию погрешностей с ростом m , однако не исключаются экстремумы, носящие локальный характер. Наибольшая скорость сходимости имеет место при $H_0=1,1$.

Величина оптимального расстояния между центрами шаров зависит от конфигурации заданного тела. При уменьшении соотношения h/b до нуля величина H_0 снижается по линейному закону от 1,1 до 0,77. Погрешность ϵ_s также снижается с уменьшением h/b , как показано на фиг. 5.

Для иллюстрации возможностей алгоритма на фиг. 6 представлены результаты расчета напряженного состояния маховика, имеющего экспоненциальный профиль $z/b = 1,25 \exp(-3,22 r/b)$, типичный для маховиков, применяемых в энергоаккумулирующих устройствах [12]. При $m=18$ и $H_0=0,9$ погрешность удовлетворения граничных условий составила 0,22%. В сечении маховика $z=0$ на фиг. 6 построено распределение безразмерных окружных и радиальных напряжений — σ_φ и σ_r . Для сравнения пунктирными линиями отмечены напряжения, возникающие в маховике с плоскими торцами, имеющем такую же массу. Как видно из рисунка, в наиболее опасной точке ($r=a$) маховик с экспоненциальным профилем имеет



Фиг. 5



Фиг. 6

в 1,32 раза меньше окружные напряжения, чем маховик с плоскими торцами.

Таким образом в методе Треффца в качестве базовых разложений целесообразно использовать суммы общих решений, относящихся к фиктивным каноническим областям, пересечение которых включает заданное тело. При удачном выборе и расположении фиктивных областей существенно улучшается сходимость приближенных решений к точному, что повышает эффективность алгоритмов, приемлемых для реализации на малых и персональных ЭВМ.

Автор выражает благодарность В. М. Дееву и В. Р. Терровере за помощь и обсуждения материалов статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Trefftz E. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren // Verhandl des 2. Intern. Kongress für technische Mechanik. Zürich, 1926. P. 12–17.
2. Лейбензон Л. С. Вариационные методы решения задач теории упругости. М.—Л.: Гостехтеориздат. 1943. 287 с.
3. Бирман М. Ш. О вариационном методе Треффца для уравнения $\Delta^2 u = f$. // Доклады АН СССР. 1955. Т. 101. № 2. С. 201–203.
4. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Гостехтеориздат. 1957. 476 с.
5. Ясницкий Л. Н. Аналитический метод решения краевых задач теории упругости для тел сложной конфигурации // Прочностные и динамические характеристики машин и конструкций: Межвузовский сборник научных трудов. Изд. Пермского политехнического ин-та. Пермь. 1988. С. 16–23.
6. Ясницкий Л. Н. Критерий выбора базовых функций при решении задач методом погружения // Геометрическое моделирование и начертательная геометрия. Тезисы докладов Уральской научно-технической конференции 21–24 сентября. Пермь. 1987. С. 105–107.
7. Ясницкий Л. Н. Расчет напряженно-деформированного состояния тел сложной геометрической формы путем использования известных решений теории упругости для канонических областей // Прикладная механика. 1989. № 3.
8. Ляв А. Математическая теория упругости. М.—Л.: Гостехтеориздат. 1955. 491 с.
9. Дурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехтеориздат. 1955. 491 с.
10. Дурье А. И. Теория упругости. М.: Наука. 1970. 940 с.
11. Shubara Masao, Oda Juhachi. Three dimensional stress analysis of rotating hollow cylinders: Bull. Japan Soc. Mech. Engrs. 1969. V. 12. N 53. P. 976–983.
12. Инерционные механические энерго-аккумулирующие системы/В. С. Будник, Н. Ф. Свириденко, В. И. Кузнецов, Н. П. Артеменко, Н. В. Белан, В. Г. Дорофеев. Киев: Наукова думка. 1986. 300 с.

Пермь

Поступила в редакцию.
26.VI.1988