МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1989

УДК 539.3

Н. И. ОСТРОСАБЛИН

О НАИТЕСНЕЙШИХ ГРАНИЦАХ КОНСТАНТ УПРУГОСТИ И ПРИВЕДЕНИИ УДЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

В [1, 2] для общего случая анизотропии была поставлена и изучалась задача определения наитеснейших границ модулей упругости и коэффициентов податливости, при которых обеспечивается положительная определенность удельной энергии деформации. Некоторые свойства постоянных упругости рассматривались в [3, 4]. В [5–7], применительно к конкретным материалам, проверялись и исследовались [8] частные ограничения на константы упругости. В [9–11] дано тригонометрическое представление постоянных упругости, обеспечивающее положительную определенность энергии деформации. Другое представление констант упругости через собственные модули и ортогональные собственные состояния предложено в [12–19]. Положительность собственных модулей необходима и достаточна для положительной определенности энергии деформации. В [16, 18] ортогональные собственные состояния представлены в общем виде в зависимости от 15 произвольных параметров, которые вместе с шестью положительными собственными модулями полностью определяют пределы изменения (наитеснейшие границы) каждой константы упругости. В данной статье предлагается способ представления констант упругости в виде, дающем легко проверяемые, рекуррентные, необходимые и достаточные условия положительной определенности энергии деформации и показывающем наитеснейшие границы для каждой постоянной упругости. Вводится симметричный тензор второго ранга, позволяющий записать квадратичную форму энергии деформации в каноническом виде.

1. В матричных обозначениях [1, 13, 18] закон Гука и удельная энергия деформации записываются в виде

$$\sigma_i=A_{ij}\varepsilon_j,\quad \varepsilon_i=a_{ij}\sigma_j \tag{1.1}$$

$$2\Phi=\sigma_i\varepsilon_i=A_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j=a_{ij}\sigma_i\sigma_j \tag{1.2}$$

Здесь и далее повторяющиеся индексы означают суммирование от 1 до 6. Матрицы постоянных упругости A_{ij} и a_{ij} — симметрические, квадратичная форма (1.2) — положительно определенная.

Произвольную положительно определенную симметрическую матрицу A_{ij} можно представить в виде [20] (D_k — главные миноры):

$$A_{ij}=c_{ik}d_{kl}c_{jl}\quad (k=l\leqslant\min(i,\ j)) \tag{1.3}$$

$$c_{ik}=0\ (k>i),\ c_{11}=c_{22}=\ldots=c_{66}=1$$

$$d_{kl}=0\quad (k\neq l)$$

$$d_{11}=d_1=D_1,\ \ d_{22}=d_2=D_2/D_1,\ \ d_{33}=d_3=D_3/D_2 \tag{1.4}$$

$$d_{44}=d_4=D_4/D_3,\ d_{55}=d_5=D_5/D_4,\ d_{66}=d_6=D_6/D_5$$

$$D_k=A\begin{pmatrix}1\ 2\ldots k\\ 1\ 2\ldots k\end{pmatrix}\qquad (k=1,\ldots,6)$$

Для положительной определенности необходимо и достаточно [20]:

$$D_k>0\quad (k=1,\ldots,6) \tag{1.5}$$

Из (1.4), (1.5) имеем

$$D_1=d_1>0,\ D_2=d_2D_1>0,\ D_3=d_3D_2>0 \tag{1.6}$$

$$D_4=d_4D_3>0,\ D_5=d_5D_4>0,\ D_6=d_6D_5>0$$

Отсюда следует, что для положительной определенности матрицы A_{ij} необходимо и достаточно выполнение условий

$$d_1>0,\ d_2>0,\ d_3>0,\ d_4>0,\ d_5>0,\ d_6>0 \tag{1.7}$$

Из (1.6) видно, что если $d_k>0$, то и $D_k>0$, т. е. матрица A_{ij} положительно определенная. Если A_{ij} положительно определенная, то $D_k>0$, тогда из (1.4) видно, что и $d_k>0$.

Таким образом, формулы (1.3) при условиях (1.7) и есть представление модулей упругости в виде, обеспечивающем положительную определенность энергии деформации (1.2) и показывающем наитеснейшие границы для каждой постоянной A_{ij}. Задавая шесть положительных чисел d_k и 15 произвольных параметров c_{ik} $(i>k)$ по формулам (1.3) получаем пределы изменения каждого модуля упругости A_{ij}.

Если матрица A_{ij} задана, то не сложно определить величины d_k, c_{ik} и проверить условия (1.7). Из (1.3) последовательно находим

$$d_1=A_{11}>0,\ c_{i1}=A_{i1}/d_1\ (i=1,\ldots,6)$$
$$d_2=A_{22}-d_1c_{21}^2>0$$
$$c_{i2}=(A_{i2}-d_1c_{i1}c_{21})/d_2\ (i=2,\ldots,6)$$
$$d_3=A_{33}-d_1c_{31}^2-d_2c_{32}^2>0$$
$$c_{i3}=(A_{i3}-d_1c_{i1}c_{31}-d_2c_{i2}c_{32})/d_3\ \ (i=3,\ldots,6)$$
$$d_4=A_{44}-d_1c_{41}^2-d_2c_{42}^2-d_3c_{43}^2>0$$
$$c_{i4}=(A_{i4}-d_1c_{i1}c_{41}-d_2c_{i2}c_{42}-d_3c_{i3}c_{43})/d_4\ \ (i=4,\ 5,\ 6)$$
$$d_5=A_{55}-d_1c_{51}^2-d_2c_{52}^2-d_3c_{53}^2-d_4c_{54}^2>0$$
$$c_{i5}=(A_{i5}-d_1c_{i1}c_{51}-d_2c_{i2}c_{52}-d_3c_{i3}c_{53}-d_4c_{i4}c_{54})/d_5\ \ (i=5,\ 6)$$
$$d_6=A_{66}-d_1c_{61}^2-d_2c_{62}^2-d_3c_{63}^2-d_4c_{64}^2-d_5c_{65}^2>0,\ c_{66}=1$$

Эти формулы показывают, что шесть величин d_k имеют размерность модулей упругости, а 15 параметров c_{ik} $(i>k)$ безразмерны. Таким образом, в любой заданной ортогональной системе координат матрица постоянных упругости A_{ij} допускает представление (1.3) через шесть положительных модулей упругости d_k и 15 безразмерных параметров c_{ik} $(i>k)$.

Используя представление (1.3) можно закон Гука (1.1) записать в виде аналогичном по форме с записью через собственные модули λ_k и собственные состояния t_{ik} [18]:

$$t_{i1}\sigma_i=\lambda_1t_{j1}\varepsilon_j,\ t_{i2}\sigma_i=\lambda_2t_{j2}\varepsilon_j,\ t_{i3}\sigma_i=\lambda_3t_{j3}\varepsilon_j$$
$$t_{i4}\sigma_i=\lambda_4t_{j4}\varepsilon_j,\ t_{i5}\sigma_i=\lambda_5t_{j5}\varepsilon_j,\ t_{i6}\sigma_i=\lambda_6t_{j6}\varepsilon_j$$

причем $t_{ki}^{-1}=t_{ik}$. Имеем из (1.1), (1.3): $\sigma_i=c_{ik}d_{kl}c_{jl}\varepsilon_j$, $c_{ki}^{-1}\sigma_i=d_{kl}c_{jl}\varepsilon_j$ $(k=l)$ или подробнее

$$c_{1i}^{-1}\sigma_i=d_1c_{j1}\varepsilon_j,\quad c_{2i}^{-1}\sigma_i=d_2c_{j2}\varepsilon_j,\quad c_{3i}^{-1}\sigma_i=d_3c_{j3}\varepsilon_j \tag{1.8}$$
$$c_{4i}^{-1}\sigma_i=d_4c_{j4}\varepsilon_j,\ c_{5i}^{-1}\sigma_i=d_5c_{j5}\varepsilon_j,\ c_{6i}^{-1}\sigma_i=d_6c_{j6}\varepsilon_j$$

Аналогия в том, что комбинации напряжений слева пропорциональны комбинациям деформаций с положительными коэффициентами пропорциональности λ_k, d_k. Только собственные модули λ_k и собственные тензоры t_{ik} являются инвариантными характеристиками материала, а в (1.8) величины d_k, c_{ik} зависят от системы координат.

Так как матрица c_{ik} — нижняя треугольная, то и c_{ki}^{-1} будет нижней треугольной [20], т. е. $c_{ki}^{-1}=0$ $(i>k)$. Элементы обратной матрицы c_{ij}^{-1} определяются по рекуррентным формулам (δ_{ij} — единичная матрица):

$$c_{ij}^{-1}=\delta_{ij}-c_{ik}c_{kj}^{-1}\ \ (k\leqslant i-1,\ i=1,\ldots,6) \tag{1.9}$$

Из (1.8), учитывая условия (1.7), находим

$$c_{jl}\varepsilon_j=d_{lk}^{-1}c_{ki}^{-1}\sigma_i,\ \ \varepsilon_j=c_{lj}^{-1}d_{lk}^{-1}c_{ki}^{-1}\sigma_i\ \ (l=k) \tag{1.10}$$

Сравнивая (1.10) и (1.1), получим для коэффициентов податливости a_{ij} представление аналогичное (1.3):

$$a_{ij}=c_{ki}^{-1}d_{kl}^{-1}c_{lj}^{-1} \quad (\max(i, j)\leqslant k=l\leqslant 6) \tag{1.11}$$

Формулы (1.11) и (1.9) позволяют достаточно просто находить a_{ij}, т. е. обратную матрицу для модулей упругости A_{ij}. Представление (1.11) определяет также и наитеснейшие границы для коэффициентов податливости a_{ij}. Можно, очевидно, записать a_{ij} и в виде (1.3).

Подставляя (1.3), (1.11) в (1.2), получим каноническую запись энергии деформации в виде суммы шести квадратов с положительными коэффициентами:

$$2\Phi=c_{ik}d_{kl}c_{jl}\varepsilon_i\varepsilon_j=d_{kl}(c_{ik}\varepsilon_i)(c_{jl}\varepsilon_j).$$

$$2\Phi=c_{ki}^{-1}d_{kl}^{-1}c_{lj}^{-1}\sigma_i\sigma_j=d_{kl}^{-1}(c_{ki}^{-1}\sigma_i)(c_{lj}^{-1}\sigma_j) \quad (k=l)$$

Например, для изотропного материала закон Гука (1.8) и условия (1.7) следующие (E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона):

$$\sigma_1=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_1+\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_2+\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_3\right)$$

$$-\nu(1-\nu)^{-1}\sigma_1+\sigma_2=E(1-\nu^2)^{-1}(\varepsilon_2+\nu\varepsilon_3)$$

$$-\nu\sigma_1-\nu\sigma_2+\sigma_3=E\varepsilon_3$$

$$\sigma_4=E(1+\nu)^{-1}\varepsilon_4,\quad \sigma_5=E(1+\nu)^{-1}\varepsilon_5,\quad \sigma_6=E(1+\nu)^{-1}\varepsilon_6$$

$$E(1-\nu)(1+\nu)^{-1}(1-2\nu)^{-1}>0,\quad E/(1-\nu^2)>0 \tag{1.12}$$

$$E>0,\quad E/(1+\nu)>0$$

Из (1.12) получаем известные неравенства: $E>0$, $-1<\nu<{}^1/_2$. Отметим, что условия (1.7) имеются в [1, 2].

2. Определим s_k как симметричный тензор, который связан с деформациями теми же соотношениями, что и напряжения — с s_k, т. е.

$$s_k=A_{kj}^{1/2}\varepsilon_j,\qquad \sigma_i=A_{ik}^{1/2}s_k \tag{2.1}$$

где $A_{ik}^{1/2}=A_{ki}^{1/2}$ — некоторые коэффициенты. Из (1.1), (2.1) следует, что $A_{ij}=A_{ik}^{1/2}A_{kj}^{1/2}$. Матрица A_{ij} записана в виде квадрата матрицы $A_{ik}^{1/2}$. Таким образом, для определения тензора s_k требуется найти квадратный корень из положительно определенной матрицы A_{ij}.

Как показано в [14—19], матрица модулей упругости представляется в виде

$$A_{ij}=t_{ip}\lambda_{pq}t_{jq} \quad (p=q) \tag{2.2}$$

где $\lambda_i>0$ $(i=1,\ldots,6)$ — собственные модули упругости, а t_{ip} — ортонормированные собственные состояния: $t_{ip}t_{iq}=\delta_{pq}$. Если положить [20]:

$$A_{ij}^{1/2}=t_{ip}\lambda_{pq}^{1/2}t_{jq} \qquad (p=q) \tag{2.3}$$

то $A_{ij}^{1/2}$ будет квадратным корнем из A_{ij}. Из (2.3) видно, что для получения $A_{ij}^{1/2}$ достаточно в представлении (2.2) модулей упругости вместо λ_i написать $\lambda_i^{1/2}$.

Для изотропного материала в тензорных обозначениях имеем [16, 18]:

$$A_{ijkl}={}^1/_3(\lambda_1-\lambda_2)\delta_{ij}\delta_{kl}+\lambda_2\delta_{ijkl} \tag{2.4}$$

$$\lambda_1=3\lambda+2\mu,\quad \lambda_2=2\mu,\quad \delta_{ijkl}={}^1/_2(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$$

где λ, μ — коэффициенты Ламе. Чтобы получить $A_{ijkl}^{1/2}$, очевидно, надо в (2.4) вместо λ_1, λ_2 написать $\lambda_1^{1/2}$, $\lambda_2^{1/2}$:

$$A_{ijkl}^{1/2}={}^1/_3(\lambda_1^{1/2}-\lambda_2^{1/2})\delta_{ij}\delta_{kl}+\lambda_2^{1/2}\delta_{ijkl}=$$

$$={}^1/_3[(3\lambda+2\mu)^{1/2}-(2\mu)^{1/2}]\delta_{ij}\delta_{kl}+(2\mu)^{1/2}\delta_{ijkl}.$$

Далее по формулам (2.1):

$$s_{ij}={}^1/_3(\lambda_1^{1/2}-\lambda_2^{1/2})\delta_{ij}\varepsilon_{kk}+\lambda_2^{1/2}\varepsilon_{ij}$$

$$\sigma_{ij}={}^1/_3(\lambda_1^{1/2}-\lambda_2^{1/2})\delta_{ij}s_{kk}+\lambda_2^{1/2}s_{ij}$$

Здесь индексы принимают значения 1, 2, 3, и суммирование по k от 1 до 3. Тензор s_{ij} для изотропного материала предложен в [21].

Выразим через s_k удельную энергию деформации, учитывая (2.1) и симметрию коэффициентов $A_{ik}^{1/2}$: $2\Phi=\sigma_i\varepsilon_i=A_{ik}^{1/2}s_k\varepsilon_i=A_{ki}^{1/2}\varepsilon_i s_k=s_k s_k$, т. е. получили каноническую запись в виде суммы шести квадратов. Энергию деформации можно представить и так: $2\Phi=I_1^2-2I_2$, где I_1, I_2 — коэффициенты характеристического уравнения тензора s_{ij}.

Имеют место еще следующие соотношения:

$$\partial\Phi/\partial\varepsilon_i=\sigma_i=A_{ik}^{1/2}s_k,\qquad \partial\Phi/\partial s_i=s_i=A_{ik}^{1/2}\varepsilon_k$$

$$\partial\Phi/\partial s_i=s_i=A_{ik}^{-1/2}\sigma_k,\qquad \partial\Phi/\partial\sigma_i=\varepsilon_i=A_{ik}^{-1/2}s_k$$

причем $A_{ik}^{-1/2}$ получаются из (2.3) заменой λ_i на λ_i^{-1}.

Тензор s_{ij} может быть полезен в некоторых вопросах теории упругости, например, при варьировании энергии деформации в прямых вариационных методах [21].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бехтерев П. В.* Аналитическое исследование обобщенного закона Гука. Ч. 1. Применение учения о потенциальной энергии и начала наименьшей работы. Л.: Изд-е автора, 1925. 154 с.
2. *Бехтерев П. В.* Аналитическое исследование обобщенного закона Гука. Применение учения о потенциальной энергии и начала наименьшей работы // Ж. Рус. физ.-хим. о-ва при ЛГУ. Ч. физ. 1925. Т. 57. Вып. 3–4. С. 359–392.
3. *Бехтерев П. В.* Аналитическое исследование обобщенного закона Гука. Применение метода преобразования координат // Ж. Рус. физ.-хим. о-ва при ЛГУ. Ч. физ. 1926. Т. 58. Вып. 3. С. 415–446.
4. *Рабинович А. Л.* Об упругих постоянных и прочности анизотропных материалов // Тр. ЦАГИ. 1946. № 582. 57 с.
5. *Lempriere B. M.* Poisson's ratio in orthotropic materials // AJAA Journal. 1968. V. 6. N 11. P. 2226–2227. (Рус. перев.: Ракетн. техника и космонавтика. 1968. Т. 6. № 11. С. 218–219).
6. *Сидорин Я. С.* Упругие и прочностные характеристики стеклопластика при сжатии // Механика полимеров. 1970. № 5. С. 866–869.
7. *Грах И. И., Сидорин Я. С.* Об ограничениях на упругие коэффициенты анизотропных твердых тел // Механика полимеров. 1974. № 1. С. 84–88.
8. *Абрамчук С. С., Булдаков В. П.* Допустимые значения коэффициентов Пуассона анизотропных материалов // Механика композит. материалов. 1979. № 2. С. 235–239.
9. *Черных К. Ф.* Симметричные функции симметричных тензоров в анизотропной теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 3. С. 5–14.
10. *Новожилов В. В., Черных К. Ф.* Об упругих постоянных линейной теории упругости // Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982. С. 215–221.
11. *Черных К. Ф.* Анизотропия материала (линейная теория) // Механика деформируемых тел и конструкций. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1985. С. 410–419.
12. *Chastenet de Géry J.* Une représentation intrinsèque simple du tenseur d'énergie de déformation (cas anisotrope) par des opérateurs linéaires de l'espace à trois dimensions // C. r. Acad. sci. 1959. T. 248. N 12. P. 1765–1768.
13. *d'Aurias P. A.* Étude du tenseur d'anisotropie, basée sur la représentation d'un tenseur symétrique dans un espace E_3 par un vecteur dans un espace E_6 // C. r. Acad. sci. 1971. T. 272. N 9. P. A612–A613.
14. *Минкевич Л. М.* Представление тензоров упругости и податливости через собственные тензоры // Вопросы динамики механических систем виброударного действия. Новосибирск: НЭТИ, 1973. С. 107–110.
15. *Рыхлевский Я.* О законе Гука // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 420–435.
16. *Остросаблин Н. И.* О структуре тензора модулей упругости. Собственные упругие состояния // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1984. Вып. 66. С. 113–125.

17. *Chen Shaoting*. New concepts of elasticity theory and an application // Лисюэ сюэбао, Acta mech. sin. 1984. V. 16. N 3. P. 259–274.
18. *Остросаблин Н. И.* О классификации анизотропных материалов // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1985. Вып. 71. С. 82–96.
19. *Остросаблин Н. И.* О структуре тензора модулей упругости и классификации анизотропных материалов // ПМТФ, 1986. № 4. С. 127–135.
20. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
21. *Кузнецов В. В.* Канонический тензор в теории упругости // ПМТФ. 1987. № 5. С. 144–146.

Новосибирск

Поступила в редакцию 13.X.1986