

УДК 531.38

В. Ю. ТЕРТЫЧНЫЙ

СТОХАСТИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ УПРАВЛЯЕМОГО ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Исследуется управляемое движение твердого тела около центра масс под действием малых белых шумов. Построена система управления, гарантирующая в вероятностном смысле асимптотическую устойчивость программного движения, в котором ориентируется твердое тело. Найдены оценки скорости сходимости в среднеквадратическом и по вероятности движения твердого тела к программному. Представлены результаты численного моделирования.

1. Введение. Прежде чем перейти к формулировке и решению задачи о стохастической стабилизации вращательного движения твердого тела, рассмотрим движение свободного твердого тела вокруг центра инерции O под действием управляющих моментов M_i ($i=1, 2, 3$) при отсутствии случайных возмущений

$$\begin{aligned}x_1 \dot{+} k_1 x_2 x_3 = u_1, \quad x_2 \dot{+} k_2 x_1 x_3 = u_2 \\ x_3 \dot{+} k_3 x_1 x_2 = u_3\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$u_1 = M_1/A, \quad u_2 = M_2/B, \quad u_3 = M_3/C$$

$$k_1 = (C-B)/A, \quad k_2 = (A-C)/B, \quad k_3 = (B-A)/C$$

где A, B, C — главные центральные моменты инерции, x_i ($i=1, 2, 3$) — проекции вектора угловой скорости \mathbf{x} твердого тела на главные центральные оси инерции связанной с телом системы координат $Oxyz$.

Если в инерциальном пространстве с системой $O\xi\eta\zeta$ задать неизменное направление орта \mathbf{s} с проекциями s_i ($i=1, 2, 3$) на оси системы $Oxyz$, то \mathbf{s} относительно координатной системы $Oxyz$ будет вращаться с угловой скоростью $-\mathbf{x}$, т. е. $\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{x} \times \mathbf{s}$, или

$$\dot{\mathbf{s}} = S\mathbf{x}, \quad S = \begin{vmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \det S = 0\tag{1.2}$$

Задача о выборе стабилизирующего управления u_i для (1.1) ставится следующим образом (см. [1–8]). Необходимо выбрать закон управления так, чтобы с течением времени обеспечивались предельные соотношения

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}, \quad \mathbf{s}(t) \rightarrow \mathbf{r} \quad (t \rightarrow \infty)\tag{1.3}$$

где \mathbf{r} — орт, занимающий неизменное положение в системе $Oxyz$; сходимость в (1.3) понимается в смысле покомпонентной сходимости указанных векторов. Ниже предложен простой вариант решения этой детерминированной задачи, поскольку решение стохастического аналога будет в дальнейшем им определяться.

Обозначим через x_p программное движение системы (1.1), обеспечивающее выполнение условий (1.3). Нетрудно видеть, что при подстановке в (1.1) управлений

$$u_1 = k_1 x_2 x_3 + x_{1p} \dot{-} - \alpha(x_1 - x_{1p})$$

$$u_2 = k_2 x_1 x_3 + x_{2p} \dot{-} - \alpha(x_2 - x_{2p})$$

$$u_3 = k_3 x_1 x_2 + x_{3p} - \alpha(x_3 - x_{3p}) \quad (1.4)$$

где α — положительное число, получим векторное уравнение $\dot{x} - x_p + \alpha(x - x_p) = 0$, откуда $x = x_p + a e^{-\alpha t}$, где $a = x(0) - x_p(0)$. Очевидно, что в этом случае $x(t) \rightarrow x_p(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Найдем далее x_p , при котором условия (1.3) будут иметь место. Обратимся к уравнению (1.2). При выборе управлений (1.4) можем записать

$$\dot{s} = Sx_p + Sa e^{-\alpha t} \quad (1.5)$$

В (1.5) программное движение x_p выберем так, чтобы

$$Sx_p + Sa e^{-\alpha t} = -\beta(s - r) + Px_p \quad (1.6)$$

где β — положительное число, P — постоянная невырожденная матрица (например, единичная) такая, что $\det(P - S) \neq 0$. Уравнение (1.6) служит для определения x_p :

$$x_p = (P - S)^{-1} [Sa e^{-\alpha t} + \beta(s - r)] \quad (1.7)$$

При подстановке (1.6) в (1.5) получим

$$\dot{s} + \beta(s - r) = Px_p \quad (1.8)$$

$$s(t) = r + e^{-\beta t} \left[s(0) - r + \int_0^t e^{\beta v} P x_p(v) dv \right]$$

Система (1.7), (1.8) имеет решение $s(t) \rightarrow r$, $x_p(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Покажем, что оно единственное. В самом деле, допуская существование в (1.8) $Px_p \rightarrow b \neq 0$, имеем $s \rightarrow b/\beta$ ($t \rightarrow \infty$). В (1.6), (1.7) $S \rightarrow S_1(b)$ и $S_1 P^{-1} b = -\beta(b/\beta - r) + b$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. $S_1 P^{-1} b = \beta r$. Последнее равенство противоречиво, поскольку его левая часть не совпадает с правой. Итак, доказано, что при u_i ($i=1, 2, 3$) (1.4), где x_p удовлетворяет уравнению (1.7), система (1.1), (1.2) будет удовлетворять условиям (1.3).

2. Стохастическое движение твердого тела. В случае, если система (1.1) помещена в сопротивляющуюся среду и подвержена действию малых гауссовских белых шумов, уравнения ее описывающие имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 + k_1 y_2 y_3 &= u_1 + \varepsilon_1 y_1 + \varepsilon_2 y_1 w_1 + \varepsilon_3 y_2 y_3 w_1 + \varepsilon_4 w_1 \\ \dot{y}_2 + k_2 y_1 y_3 &= u_2 + \delta_1 y_2 + \delta_2 y_2 w_2 + \delta_3 y_1 y_3 w_2 + \delta_4 w_2 \\ \dot{y}_3 + k_3 y_1 y_2 &= u_3 + \sigma_1 y_3 + \sigma_2 y_3 w_3 + \sigma_3 y_1 y_2 w_3 + \sigma_4 w_3 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где y_i ($i=1, 2, 3$) — решение, представляющее случайный процесс; ε_j , δ_j , σ_j ($j=1, \dots, 4$) — малые числовые параметры; w_i , w_i'' , w_i''' ($i=1, 2, 3$) — независимые центрированные гауссовские процессы белого шума единичной интенсивности.

Поясним характер малых флуктуационных внешних и параметрических возмущающих случайных воздействий в правой части системы (2.1). Эти возмущения могут возникать [9—13, 15] вследствие турбулентных пульсаций потока жидкости или газа, изменения характеристик сопротивляющейся среды, теплового, виброударного, гравитационного, магнитного и т. д. воздействия. Что касается параметрических (или динамических) возмущений твердого тела, то они могут обнаружиться в результате следующих эффектов [7, 9, 11, 14]: налипания частиц например, явление оледенения самолета, движения твердого тела с подвижными внутренними массами или маховиками с переменными моментами инерции и т. д. Отсюда ясно, что система (2.1) описывает довольно широкий класс стохастических моделей движения твердого тела и ее будем рассматривать как результат малых случайных возмущений системы (1.1). Добавим, что в (2.1) в правой части второе слагаемое представляет сопротивление среды, третье — его возмущение, четвертое и пятое обусловлены параметрическими и чисто внешними возмущениями соответственно.

Перепишем систему (2.1) в векторно-матричной форме

$$\dot{y} = F(y) + u + e_1 y + e_2 r(y) w \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= (y_1, y_2, y_3)^T, \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T \\
\mathbf{F}(\mathbf{y}) &= -(k_1 y_2 y_3, k_2 y_1 y_3, k_3 y_1 y_2)^T, e_1 = \text{diag}(\varepsilon_1, \delta_1, \sigma_1) \\
e_2 &= \text{diag}(a_1, a_2, a_3), a_1 = (\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4), a_2 = (\delta_2, \delta_3, \delta_4) \\
a_3 &= (\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4), r(\mathbf{y}) = \text{diag}(b_1, b_2, b_3), b_1 = \text{diag}(y_1, y_2 y_3, 1) \\
b_2 &= \text{diag}(y_2, y_1, y_3, 1), b_3 = \text{diag}(y_3, y_1 y_2, 1), \\
\mathbf{w} &= (w_1, w_1', w_1'', w_2, w_2', w_2'', w_3, w_3', w_3'')^T
\end{aligned}$$

Укажем размерности: $\mathbf{F}(\mathbf{y}) - (3 \times 1)$, $e_1 - (3 \times 3)$, $e_2 - (3 \times 9)$, $r(\mathbf{y}) - (9 \times 9)$, $\mathbf{w} - (9 \times 1)$.

Задача стохастической стабилизации для системы (2.2) ставится следующим образом. Требуется найти закон управления \mathbf{u} , при котором решение \mathbf{y} будет сходиться к решению \mathbf{x} невозмущенной системы (1.1) при $e_1, e_2 \rightarrow 0$ по вероятности.

$$P\{\lim_{t \rightarrow T} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| > \kappa\} \rightarrow 0 \quad (e_1, e_2 \rightarrow 0) \quad (2.3)$$

где $\kappa > 0$ — заданная точность отслеживания, T — конечный момент времени, для которого $\lim_{t \rightarrow T} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p\| < \kappa$, \mathbf{x}_p — программное движение системы (1.1) (через $\|\mathbf{x}\|$ обозначена евклидова норма вектора \mathbf{x}).

3. Стохастическая стабилизация. Покажем, что решение задачи (2.3) достигается при выборе управления вида (1.4).

Теорема 1. Для стохастического движения твердого тела, описываемого уравнением (2.2), где

$$\sum_{j=1}^9 \sum_{i=1}^3 [(e_2 r(\mathbf{y}))_{ij}]^2 \leq \varepsilon^2 (1 + \|\mathbf{y}\|^4) \quad (3.1)$$

ε — малый числовой параметр, при

$$\mathbf{u} = -\mathbf{F}(\mathbf{y}) - e_1 \mathbf{y} + \mathbf{D}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_p), \mathbf{D}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_p) = \mathbf{x}_p - \alpha(\mathbf{y} - \mathbf{x}_p) \quad (\alpha > 0) \quad (3.2)$$

для математического ожидания величины $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2$ имеет место оценка

$$\int_0^t \langle \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 \rangle ds \leq \varepsilon^2 \varphi(t) \quad (3.3)$$

где $\varphi(t)$ — ограниченная функция, $t \in [0, T]$.

Приведем схему доказательства теоремы, основываясь на конструкциях, изложенных детально в [16]. Подставляя (3.2) в (2.2), получим

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{D}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_p) + e_2 r(\mathbf{y}) \mathbf{w} \quad (3.4)$$

Этому уравнению соответствует невозмущенное уравнение $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_p)$, для которого справедливо: $\lim_{t \rightarrow T} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p\| < \kappa$. Применяя формулу Ито [17] к функции $v(\boldsymbol{\zeta}) = \|\boldsymbol{\zeta}\|^2$, $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{D}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_p) - \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_p) + e_2 r(\mathbf{y}) \mathbf{w}$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}(0)$, получим

$$\begin{aligned}
dv &= \sum_{h=1}^9 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v}{\partial \zeta_i} (e_2 r)_{ih} dw_h + \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial v}{\partial \zeta_i} D_{0i} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} \sum_{h=1}^9 \sum_{i,j=1}^3 (e_2 r)_{ih} (e_2 r)_{jh} \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j} \right) dt (\mathbf{D}_0 = \mathbf{D}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_p) - \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_p)) \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Воспользовавшись свойством обращения в нуль математического ожидания стохастического интеграла

$$\left\langle \int_0^t \sum_{h=1}^9 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v}{\partial \zeta_i} (e_2 r)_{ih} dw_h \right\rangle = 0$$

из (3.5) найдем

$$\langle \|\xi\|^2 \rangle = 2 \int_0^t \langle (\xi, D_0) \rangle ds + \int_0^t \left\langle \sum_{j=1}^9 \sum_{i=1}^3 [(e_2 r)_{ij}]^2 \right\rangle ds$$

Принимая во внимание условия теоремы, получим

$$\langle \|\xi\|^2 \rangle \leq -2\alpha \int_0^t \langle \|\xi\|^2 \rangle ds + \varepsilon^2 \int_0^t (1 + \langle \|\mathbf{y}\|^4 \rangle) ds$$

откуда в силу леммы Гронуолла — Беллмана

$$\int_0^t \langle \|\xi\|^2 \rangle ds \leq \frac{\varepsilon^2 (1 - e^{-2\alpha t})}{2\alpha} \int_0^t (1 + \langle \|\mathbf{y}\|^4 \rangle) ds \quad (3.6)$$

Применяя, как это делалось выше, формулу Ито (3.5) к функции $1 + \|\mathbf{y}\|^4$, легко установить, что интеграл в правой части неравенства (3.6) не превосходит некоторой постоянной C . Из (3.6) следует утверждение (3.3). Оценка (3.1) в условии теоремы 1 непосредственно вытекает из вида матриц e_2 и $r(\mathbf{y})$ в (2.2).

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при выборе закона управления (3.2) имеет место предельное соотношение

$$P \{ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_p\| > \kappa \} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \quad (3.7)$$

Из уравнения (3.4) имеем

$$\|\xi\| \leq \left\| \int_0^t \|D_0\| ds + \left\| \int_0^t e_2 r(\mathbf{y}) d\mathbf{w} \right\| \right\| \quad (3.8)$$

Оценим последовательно два слагаемых в неравенстве (3.8). Согласно неравенству Чебышева для первого из них

$$p = P \left\{ \int_0^t \|D_0\| ds > \frac{\kappa}{2} \right\} \leq \frac{4}{\kappa^2} \left\langle \left(\int_0^t \|D_0\| ds \right)^2 \right\rangle$$

откуда с учетом неравенства Гельдера и теоремы 1:

$$p \leq \frac{4t\alpha^2}{\kappa^2} \int_0^t \langle \|\xi\|^2 \rangle ds \leq \frac{4t\alpha^2}{\kappa^2} \varepsilon^2 \varphi(t) \quad (3.9)$$

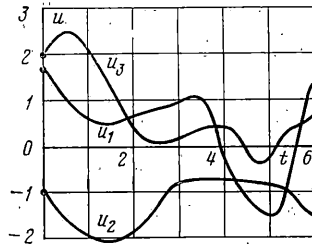
Для оценки второго слагаемого в (3.8) применим обобщенное неравенство Колмогорова [17, 18]. Учитывая также результаты теоремы 1, будем иметь

$$P \left\{ \left\| \int_0^t e_2 r(\mathbf{y}) d\mathbf{w} \right\| > \frac{\kappa}{2} \right\} \leq \frac{4\varepsilon^2}{\kappa^2} \int_0^t (1 + \langle \|\mathbf{y}\|^4 \rangle) ds \leq \frac{4\varepsilon^2 C}{\kappa^2} \quad (3.10)$$

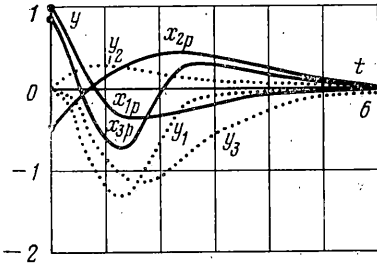
Из неравенств (3.9), (3.10) получим утверждение теоремы.

Наконец, для того, чтобы определить условия относительно полной стохастической ориентации твердого тела, рассмотрим две группы уравнений: невозмущенных (после выбора управления (1.4)):

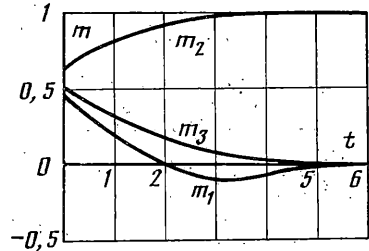
$$\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_p + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{s}} = S\mathbf{x} \quad (3.11)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

и возмущенных для (3.11) (после выбора управления (3.2)):

$$\dot{y} - \dot{x}_p + \alpha(y - x_p) = e_2 r(y) w, \quad y(0) = x(0), \quad \dot{m} = My \quad (3.12)$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{bmatrix}$$

где программное движение x_p выбирается согласно (1.7) по правилу

$$\dot{x}_p = (P - M)^{-1} [M b e^{-\alpha t} + \beta(m - r)] \quad (b = y(0) - x_p(0)) \quad (3.13)$$

Переписывая (3.12) в векторно-матричном виде

$$\dot{z} = G(z) + g(z)w \quad (3.14)$$

$$z = \begin{bmatrix} y \\ m \end{bmatrix}, \quad G(z) = \begin{bmatrix} \dot{x}_p + \alpha(y - x_p) \\ My \end{bmatrix}, \quad g(z) = \begin{bmatrix} e_2 r(y) \\ 0 \end{bmatrix}$$

где z имеет размерность (6×1) , $G(z) - (6 \times 1)$, $g(z) - (6 \times 9)$, можно аналогично теоремам 1 и 2 доказать обобщающее утверждение.

Теорема 3. При выполнении условий теоремы 1, выборе закона управления (3.2), где x_p определяется уравнением (3.13), для системы (3.14) имеют место предельные соотношения

$$\int_0^t \langle \|z - z_*\|^2 \rangle ds \rightarrow 0, \quad P\{\lim_{t \rightarrow T} \|z - z_{*p}\| > \kappa\} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \\ \kappa > 0, \quad z_* = (x, s)^T, \quad z_{*p} = (x_p, r)^T \quad (3.15)$$

Построенная система управления (3.2) для стабилизации стохастического вращательного движения твердого тела (2.1), (3.12) моделировалась численно. При замене стохастических дифференциальных уравнений разностными белый шум аппроксимировался последовательностью независимых случайных чисел, вырабатываемых стандартным датчиком независимых нормальных псевдослучайных чисел. По точкам $t_k, k=1, \dots, 100$ были построены графики значений u_i, y_i, x_{ip}, m_i ($i=1, 2, 3$), представленные на фиг. 1-3 (на фиг. 3 $r_1=r_3=0, r_2=1$). Были взяты следующие параметры твердого тела: $A=2B=3C, A=300 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2, k_1=-1/3, k_2=1, k_3=-1$. Целевые неравенства: $\|x - x_p\| < \kappa, \|s - r\| < \kappa, \|y - x_p\| < \kappa, \|m - r\| < \kappa, \kappa=0,1$. В (2.1) $\varepsilon_i = \delta_i = \sigma_i = 0,01$ ($i=1, \dots, 4$). В инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$ орт s направлен по оси ζ , в подвижной системе $Oxyz$ орт r направлен по оси y . Взаимное расположение систем координат характеризуется углами Эйлера φ, ψ, θ с начальными данными: $\varphi^*(0) = \psi^*(0) = \theta^*(0) = 0, \varphi(0) = \pi/6, \psi(0) = \pi/4, \theta(0) = \pi/3$. Кроме того,

$x(0) = x'(0) = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$. Координаты орта s в системе $Oxyz$ определяются как $(\sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \theta, \cos \theta)^T$, $s(0) = (0,433; 0,75; 0,5)^T$, $s'(0) = m(0)$, $s''(0) = m'(0) = 0$. В соотношениях (3.2), (3.13) $\alpha = \beta = 2$, $P = I$, где I — единичная матрица; $x_p(0) = 0$, $x_p'(0) = (0,866; -0,5; 1)^T$.

Отметим, что при $\varepsilon_i = \delta_i = \sigma_i = 0$ (невозмущенное движение) характер поведения u_i, x_i, x_{ip}, s_i в целом соответствовал изменениям u_i, y_i, x_{ip}, m_i на фиг. 1–3. Для этого случая стабилизация системы достигалась за 4,5 с. При $\varepsilon_i = \delta_i = \sigma_i = 0,1$ время T составляло 27 с, при $\varepsilon_i = \delta_i = \sigma_i = 1$ целевые неравенства вообще не выполнялись.

Проведенные эксперименты выявили соответствие практических результатов теоретическим и показали достаточно высокую эффективность полученной системы управления вращательным движением твердого тела.

В заключение автор благодарит П. Е. Товстика за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. *Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 598 с.
3. *Алексеев К. В., Бебенин Г. Г.* Управление космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1974. 343 с.
4. *Зубов В. И., Ермолин В. С., Сергеев С. Л., Смирнов Е. Я.* Управление вращательным движением твердого тела. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 200 с.
5. *Румянцев В. В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1970. № 2. с. 83–96.
6. *Ворогников В. И.* Об управлении угловым движением твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. с. 38–43.
7. *Артохин Ю. П., Каргу Л. И., Симеев В. Л.* Системы управления космических аппаратов, стабилизированных вращением. М.: Наука, 1979. 295 с.
8. *Каргу Л. И.* Системы угловой стабилизации космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1980. 172 с.
9. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
10. *Красовский А. А.* Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. М.: Наука, 1974. 232 с.
11. *Красовский А. А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 558 с.
12. *Красовский А. А.* Статистическая теория переходных процессов в системах управления. М.: Наука, 1968. 240 с.
13. *Акуленко Л. Д., Колмановский В. Б.* Об одной модельной задаче управления движением твердого тела в атмосфере при случайных возмущениях // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 2. с. 15–23.
14. *Чернусько Ф. Л.* О движении твердого тела с подвижными внутренними массами // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. с. 33–44.
15. *Дегтярев В. Г., Тертышный В. Ю., Шишковский С. Ю.* Решение задачи о стохастическом движении твердого тела // Аннот. докл. 6-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Ташкент: Нац. ком-т СССР по теорет. и прикл. механике, 1986. с. 241.
16. *Тертышный В. Ю.* Стохастическая стабилизируемость управляемых диффузионных процессов // Изв. вузов. Математика. 1986. № 5. с. 84–87.
17. *Гилман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. Т. 3. М.: Наука, 1975. 496 с.
18. *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
21.IV.1987