МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1989

УДК 539.3

Б. А. КУДРЯВЦЕВ, В. И. МИЛОСЕРДОВА

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КОМПОЗИТА РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ

Рассматривается неоднородная пьезоэлектрическая среда регулярной структуры с ячейкой периодичности, состоящей из пьезоэлектрика и диэлектрика, обладающего конечной проводимостью. На основе общей схемы осреднения [1, 2] уравнений электроупругости и уравнений Максвелла получены выражения для эффективных характеристик приведенной среды в виде слоистого композита.

1. Пусть неоднородная среда, обладающая пьезоэлектрическими свойствами, имеет периодическую структуру с масштабом неоднородности ε (ε — малый параметр, характеризующий размер ячейки периодичности $Y=Y_p\cup Y_c$, Y_p и Y_c — части ячейки, занятые пьезоэлектриком и диэлектриком соответственно; фиг. 1). Электроупругое состояние и электромагнитное поле в среде описываются уравнениями движения, уравнениями Максвелла и уравнениями состояния композиции пьезоэлектрика и диэлектрика, обладающего проводимостью

$$\partial\sigma_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x},t)/\partial x_j=\rho^\varepsilon\partial^2u_i^\varepsilon(\mathbf{x},t)/\partial t^2,\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}^\varepsilon=\partial\mathbf{D}^\varepsilon/\partial t+\mathbf{J}^\varepsilon \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}^\varepsilon=-\partial\mathbf{B}^\varepsilon/\partial t,\qquad \sigma_{ij}^\varepsilon=c^\varepsilon_{ijkl}(\mathbf{x})\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon)-e^\varepsilon_{kij}(\mathbf{x})E_k^\varepsilon$$

$$D_i^\varepsilon=e^\varepsilon_{ikl}(\mathbf{x})\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon)+\theta_{ik}^\varepsilon(\mathbf{x})E_k^\varepsilon,\qquad B_i^\varepsilon=\mu_{ik}^\varepsilon(\mathbf{x})H_k^\varepsilon,\qquad J_i^\varepsilon=\varkappa_{ik}^\varepsilon(\mathbf{x})E_k^\varepsilon \tag{1.2}$$

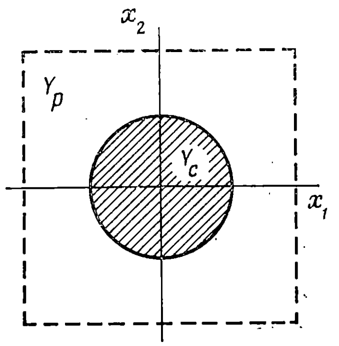
где E_k^ε, H_k^ε — напряженность электрического и магнитного поля, D_i^ε, B_i^ε — векторы электрической и магнитной индукции, J_i^ε — плотность тока проводимости, σ_{ij}^ε — тензор напряжений. Использованы также обозначения: $\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon)={}^1/_2(\partial u_k^\varepsilon/\partial x_l+\partial u_l^\varepsilon/\partial x_k)$, $\mathbf{y}=\mathbf{x}/\varepsilon$, $\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$, $c^\varepsilon_{ijkl}(\mathbf{x})=c_{ijkl}(\mathbf{y})$ — модули упругости, $e^\varepsilon_{kij}(\mathbf{x})=e_{kij}(\mathbf{y})$ — пьезоэлектрические модули, $\theta_{ik}^\varepsilon(\mathbf{x})=\theta_{ik}(\mathbf{y})$ — диэлектрические постоянные, $\varkappa_{ik}^\varepsilon(\mathbf{x})=\varkappa_{ik}(\mathbf{y})$ — коэффициенты электропроводности, $\mu_{ik}^\varepsilon(\mathbf{x})=\mu_{ik}(\mathbf{y})$ — магнитные проницаемости, $\rho^\varepsilon(\mathbf{x})=\rho(\mathbf{y})$ — плотность материала. Частям ячейки Y_p и Y_c соответствуют эти величины, которые будем помечать верхним индексом p и c в скобках, при этом, очевидно, $\varkappa_{ij}^{(p)}\equiv0$, $e_{kij}^{(c)}\equiv0$. В дальнейшем предполагается, что c_{ijkl}, e_{kij}, θ_{ik}, $\varkappa_{ij}$, μ_{ik}, ρ — Y-периодические функции по переменным $\mathbf{y}=\mathbf{x}/\varepsilon$.

В соответствии с известным методом [1, 2] двухмасштабных разложений представим вектор механического смещения u_k^ε и векторы напряженности E_k^ε, H_k^ε электромагнитного поля в виде

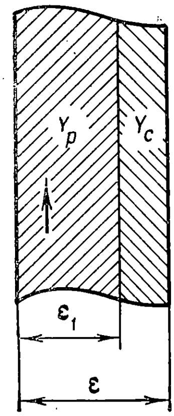
$$\begin{gathered}u_k^\varepsilon=u_k^{(0)}(\mathbf{x},t)+\varepsilon u_k^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)+\ldots\\ E_k^\varepsilon=E_k^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)+\varepsilon E_k^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)+\ldots\\ H_k^\varepsilon=H_k^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)+\varepsilon H_k^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)+\ldots\end{gathered} \tag{1.3}$$

Тогда с учетом (1.3) и на основании (1.2) находим

$$\sigma_{ij}^\varepsilon=\sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)+\varepsilon\sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)+\ldots$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$
\begin{aligned}
&D_i^{\varepsilon}=D_i^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)+\varepsilon D_i^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)+\ldots\\
&B_i^{\varepsilon}=B_i^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)+\varepsilon B_i^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)+\ldots\\
&J_i^{\varepsilon}=J_i^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)+\varepsilon J_i^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)+\ldots
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{ij}^{(n)}=c_{ijkl}(\mathbf{y})\,\partial u_k^{(n)}/\partial x_l-e_{kij}(\mathbf{y})E_k^{(n)}+c_{ijkl}(\mathbf{y})\,\partial u_k^{(n+1)}/\partial y_l\\
&D_i^{(n)}=e_{ikl}(\mathbf{y})\,\partial u_k^{(n)}/\partial x_l+\theta_{ik}(\mathbf{y})E_k^{(n)}+e_{ijkl}(\mathbf{y})\,\partial u_k^{(n)}/\partial y_l\\
&B_i^{(n)}=\mu_{ik}(\mathbf{y})H_k^{(n)},\quad J_i^{(n)}=\varkappa_{ij}(\mathbf{y})E_j^{(n)}\quad (n=0,1,\ldots)
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Подставляя теперь (1.4) в (1.1) и приравнивая нулю члены, содержащие ε^{-1}, ε^{0}, получим следующие уравнения (символами $\mathrm{rot}_{\mathbf{x}}$ и $\mathrm{rot}_{\mathbf{y}}$ обозначены операции rot по переменным $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ соответственно):

$$
\partial\sigma_{ij}^{(0)}/\partial y_j=0,\qquad \mathrm{rot}_{\mathbf{y}}\,\mathbf{H}^{(0)}=0,\qquad \mathrm{rot}_{\mathbf{y}}\,\mathbf{E}^{(0)}=0
\tag{1.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial\sigma_{ij}^{(0)}/\partial x_j+\partial\sigma_{ij}^{(1)}/\partial y_j=\rho(\mathbf{y})\,\partial^2 u_i^{(0)}/\partial t^2\\
&\mathrm{rot}_{\mathbf{x}}\,\mathbf{H}^{(0)}+\mathrm{rot}_{\mathbf{y}}\,\mathbf{H}^{(1)}=\partial\mathbf{D}^{(0)}/\partial t+\mathbf{J}^{(0)}\\
&\mathrm{rot}_{\mathbf{x}}\mathbf{E}^{(0)}+\mathrm{rot}_{\mathbf{y}}\,\mathbf{E}^{(1)}=-\partial\mathbf{B}^{(0)}/\partial t
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Применяя операцию осреднения по объему ячейки, которую будем обозначать треугольными скобками, к уравнениям (1.7) и учитывая периодичность $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\mathbf{H}^{(1)}$, $\mathbf{E}^{(1)}$ по переменным $\mathbf{y}$, получим макроскопические уравнения движения и электродинамики

$$
\begin{aligned}
&\partial\langle\sigma_{ij}^{(0)}\rangle/\partial x_j=\langle\rho\rangle\,\partial^2 u_i^{(0)}/\partial t^2\\
&\mathrm{rot}_{\mathbf{x}}\langle\mathbf{H}^{(0)}\rangle=\partial\langle D^{(0)}\rangle/\partial t+\langle\mathbf{J}^{(0)}\rangle\\
&\mathrm{rot}_{\mathbf{x}}\langle\mathbf{E}^{(0)}\rangle=-\partial\langle\mathbf{B}^{(0)}\rangle/\partial t
\end{aligned}
$$

Из (1.6) следует

$$
\begin{aligned}
&E_k^{(0)}=\langle E_k^{(0)}(\mathbf{x},t)\rangle-\partial\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y},t)/\partial y_k\\
&H_k^{(0)}=\langle H_k^{(0)}(\mathbf{x},t)\rangle-\partial\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y},t)/\partial y_k
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

где φ, ψ, Y — периодичные функции по переменным $\mathbf{y}$. Для определения функций φ и ψ воспользуемся соотношениями

$$
\mathrm{div}(\partial\mathbf{D}^{\varepsilon}/\partial t+\mathbf{J}^{\varepsilon})=0,\quad \mathrm{div}(\partial\mathbf{B}^{\varepsilon}/\partial t)=0
\tag{1.9}
$$

которые получаются применением операции div к уравнениям Максвелла.

Подстановка разложений (1.4) в (1.9) приводит к равенствам

$$\operatorname{div}_y(\partial \mathbf{D}^{(0)}/\partial t+\mathbf{J}^{(0)})=0, \quad \operatorname{div}_y(\partial \mathbf{B}^{(0)}/\partial x)=0$$

которые совместно с первым уравнением (1.6) образуют локальные задачи на ячейке периодичности [1]. С учетом представлений (1.8) и соотношений (1.5) уравнения локальных задач принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left[c_{ijkl}(\mathbf{y})\frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial y_l}+e_{kij}(\mathbf{y})\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}\right]=$$

$$=-\frac{\partial c_{ijkl}(\mathbf{y})}{\partial y_j}\frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_l}+\frac{\partial e_{kij}(\mathbf{y})}{\partial y_j}\langle E_k^{(0)}\rangle \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left[e_{ikl}(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial y_l}-\theta_{ik}(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}-\varkappa_{ik}(\mathbf{y})\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}\right]=$$

$$=-\frac{\partial e_{ikl}(\mathbf{y})}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_l}-\frac{\partial e_{ik}(\mathbf{y})}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial t}\langle E_k^{(0)}\rangle-\frac{\partial \varkappa_{ik}(\mathbf{y})}{\partial y_i}\langle E_k^{(0)}\rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\mu_{ik}(\mathbf{y})\frac{\partial \psi}{\partial y_k}\right]=\frac{\partial \mu_{ik}(\mathbf{y})}{\partial y_i}\langle H_k^{(0)}\rangle$$

Применяя к (1.10) преобразование Лапласа по переменной t и используя представления

$$\begin{gathered}Lu_n^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y},p)=U_n^{kl}(\mathbf{y},p)\partial Lu_k^{(0)}(\mathbf{x},p)/\partial x_l+W_{nk}(\mathbf{y},p)L\langle E_k^{(0)}(\mathbf{x},p)\rangle\\ L\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y},p)=\Phi_{kl}(\mathbf{y},p)\partial Lu_k^{(0)}(\mathbf{x},p)/\partial x_l+\Psi_k(\mathbf{y},p)L\langle E_k^{(0)}(\mathbf{x},p)\rangle\\ \psi(\mathbf{x},\mathbf{y},t)=V_k(\mathbf{y})\langle H_k^{(0)}(\mathbf{x},t)\rangle\end{gathered} \tag{1.11}$$

получим для определения Y — периодических функций U_n^{kl}, Φ_{kl}, W_{nk}, Ψ_k $(n, k, l=1, 2, 3)$ следующие системы уравнений

$$\partial \tau_{ij}^{kl}/\partial y_j=-\partial c_{ijkl}(\mathbf{y})/\partial y_j \tag{1.12}$$

$$\partial d_i^{kl}/\partial y_i=-\partial e_{ikl}(\mathbf{y})/\partial y_i, \quad \partial \zeta_{ij}^k/\partial y_j=\partial e_{kij}(\mathbf{y})/\partial y_j$$

$$\partial g_i^k/\partial y_i=-\partial[\theta_{ik}(\mathbf{y})+p^{-1}\varkappa_{ik}(\mathbf{y})]/\partial y_i \quad (i, k, l=1, 2, 3)$$

$$\begin{gathered}\tau_{ij}^{kl}=c_{ijkl}(\mathbf{y})\partial U_n^{kl}(\mathbf{y},p)/\partial y_h+e_{hij}(\mathbf{y})\partial\Phi_{kl}(\mathbf{y},p)/\partial y_h\\ d_i^{kl}=e_{inh}(\mathbf{y})\partial U_n^{kl}(\mathbf{y},p)/\partial y_h-[\theta_{ih}(\mathbf{y})+p^{-1}\varkappa_{ih}(\mathbf{y})]\partial\Phi_{kl}(\mathbf{y},p)/\partial y_h\\ \zeta_{ij}^k=c_{ijnh}(\mathbf{y})\partial W_{nk}(\mathbf{y},p)/\partial y_h+e_{hij}(\mathbf{y})\partial\Psi_k(\mathbf{y},p)/\partial y_h\\ g_i^k=e_{inh}(\mathbf{y})\partial W_{nk}(\mathbf{y},p)/\partial y_h-[\theta_{ih}(\mathbf{y})+p^{-1}\varkappa_{ih}(\mathbf{y})]\partial\Psi_k(\mathbf{y},p)/\partial y_h\end{gathered} \tag{1.13}$$

С учетом (1.11) из (1.5) при $n=0$ получим

$$\begin{gathered}L\sigma_{ij}^{(0)}=[c_{ijkl}(\mathbf{y})+\tau_{ij}^{kl}]\partial Lu_k^{(0)}(\mathbf{x},p)/\partial x_l+[e_{kij}(\mathbf{y})-\zeta_{ij}^k]L\langle E_k^{(0)}(\mathbf{x},p)\rangle\\ LD_i^{(0)}=[e_{ikl}(\mathbf{y})+d_i^{kl}+p^{-1}\eta_i^{kl}]\partial Lu_k^{(0)}(\mathbf{x},p)/\partial x_l+\\ +[\theta_{ik}(\mathbf{y})+g_i^k+p^{-1}\xi_i^k]L\langle E_k^{(0)}(\mathbf{x},p)\rangle\\ LJ_i^{(0)}=-\eta_i^{kl}\partial Lu_k^{(0)}(\mathbf{x},p)/\partial x_l+[\varkappa_{ik}(\mathbf{y})-\xi_i^k]L\langle E_k^{(0)}(\mathbf{x},p)\rangle\\ B_i^{(0)}=[\mu_{ik}(\mathbf{y})-\mu_{ih}(\mathbf{y})\partial V_k(\mathbf{y})/\partial y_h]H_k^{(0)}(\mathbf{x},t)\\ \eta_i^{kl}=\varkappa_{ih}(\mathbf{y})\partial\Phi_{kl}(\mathbf{y},p)/\partial y_h,\\ \xi_i^k=\varkappa_{ih}(\mathbf{y})\partial\Psi_k(\mathbf{y},p)/\partial y_h\end{gathered} \tag{1.14}$$

где τ_{ij}^{kl}, ζ_{ij}^k, d_i^{kl}, g_i^k определены в (1.13), а знак L обозначает изображение по Лапласу соответствующих функций.

Применяя операцию осреднения к (1.14), получим выражения для компонент осредненных напряжений, электрической индукции и тока в изображениях и соотношение для магнитной индукции

$$L\langle\sigma_{ij}^{(0)}\rangle=L\overset{*}{c}_{ijkl}(p)\,\partial L\,u_k^{(0)}(\mathbf{x},p)/\partial x_l-L\overset{*}{e}_{ikj}(p)\,L\langle E_k^{(0)}(\mathbf{x},p)\rangle$$

$$L\langle D_i^{(0)}\rangle=L\overset{*\prime}{e}_{ikl}(p)\,\partial L\,u_k^{(0)}(\mathbf{x},p)/\partial x_l+L\theta_{ik}^*(p)\,L\langle E_k^{(0)}(\mathbf{x},p)\rangle \tag{1.15}$$

$$L\langle J_i^{(0)}\rangle=-L\overset{*}{\chi}_{ikl}(p)\,\partial L\,u_k^{(0)}(\mathbf{x},p)/\partial x_l+L\varkappa_{ik}^*(p)\,L\langle E_k^{(0)}(\mathbf{x},p)\rangle$$

$$\langle B_i^{(0)}\rangle=\mu_{ik}^*\langle H_k^{(0)}(\mathbf{x},t)\rangle,\qquad L\overset{*}{c}_{ijkl}(p)\equiv\langle c_{ijkl}(\mathbf{y})+\tau_{ij}^{kl}\rangle$$

$$L\overset{*}{e}_{ijk}(p)\equiv\langle e_{ijk}(\mathbf{y})-\zeta_{ij}^{k}\rangle,\qquad L\overset{*\prime}{e}_{ikl}(p)\equiv\langle e_{ikl}(\mathbf{y})+d_i^{kl}+p^{-1}\eta_i^{kl}\rangle$$

$$L\theta_{ik}^*(p)\equiv\langle\theta_{ik}(\mathbf{y})+g_i^k+p^{-1}\xi_i^k\rangle,$$

$$L\theta_{ik}^*(p)\equiv\langle\theta_{ik}(\mathbf{y})+g_i^k+p^{-1}\xi_i^k\rangle,$$

$$L\overset{*}{\chi}_{ikl}(p)\equiv\langle\eta_i^{kl}\rangle,\qquad \mu_{ik}^*\equiv\langle\mu_{ik}(\mathbf{y})-\mu_{ih}(\mathbf{y})\,\partial V_k(\mathbf{y})/\partial y_h\rangle$$

Возвращаясь к оригиналам в (1.15), получим уравнения состояния композита с учетом проводимости

$$\langle\sigma_{ij}^{(0)}\rangle=\int_0^t\left[\overset{*}{c}_{ijkl}(t-\tau)\,\frac{\partial u_k^{(0)}(\mathbf{x},\tau)}{\partial x_l}-\overset{*}{e}_{ijk}(t-\tau)\,\langle E_k^{(0)}(\mathbf{x},\tau)\rangle\right]d\tau$$

$$\langle D_i^{(0)}\rangle=\int_0^t\left[\overset{*\prime}{e}_{ikl}(t-\tau)\,\frac{\partial u_k^{(0)}(\mathbf{x},\tau)}{\partial x_l}+\theta_{ik}^*(t-\tau)\,\langle E_k^{(0)}(\mathbf{x},\tau)\rangle\right]d\tau \tag{1.16}$$

$$\langle J_i^{(0)}\rangle=-\int_0^t\left[\overset{*}{\chi}_{ikl}(t-\tau)\frac{\partial u_k^{(0)}(\mathbf{x},\tau)}{\partial x}-\varkappa_{ik}^*(t-\tau)\langle E_k^{(0)}(\mathbf{x},\tau)\rangle\right]d\tau$$

$$\langle B_i^{(0)}\rangle=\mu_{ik}^*\langle H_k^{(0)}(\mathbf{x},t)\rangle$$

2. Рассмотрим пьезоэлектрический композит слоистой структуры, ячейка периодичности которого состоит из слоя пьезокерамики толщиной ε_1, поляризованной в направлении оси x_3, и слоя изотропного диэлектрика с конечной электропроводностью (фиг. 2). Матрицы материальных констант (в двухиндексных обозначениях) для пьезокерамики имеют вид [3, 4]:

$$c_{\alpha\beta}^{(p)}=\begin{Vmatrix} c_{11}^{(p)} & c_{12}^{(p)} & c_{13}^{(p)} & 0 & 0 & 0\\ c_{12}^{(p)} & c_{11}^{(p)} & c_{13}^{(p)} & 0 & 0 & 0\\ c_{13}^{(p)} & c_{13}^{(p)} & c_{33}^{(p)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^{(p)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{(p)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^{(p)} \end{Vmatrix},\qquad e_{\alpha i}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & e_{13}\\ 0 & 0 & e_{13}\\ 0 & 0 & e_{33}\\ 0 & e_{15} & 0\\ e_{15} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\theta_{ij}^{(p)}=\begin{Vmatrix} \theta_{11}^{(p)} & 0 & 0\\ 0 & \theta_{11}^{(p)} & 0\\ 0 & 0 & \theta_{33}^{(p)} \end{Vmatrix},\qquad c_{66}^{(p)}=\frac{1}{2}\left(c_{11}^{(p)}-c_{12}^{(p)}\right)$$

Для изотропного проводящего диэлектрика имеем

$$c_{\alpha\beta}^{(c)}=\begin{Vmatrix} c_{11}^{(c)} & c_{12}^{(c)} & c_{12}^{(c)} & 0 & 0 & 0\\ c_{12}^{(c)} & c_{11}^{(c)} & c_{12}^{(c)} & 0 & 0 & 0\\ c_{12}^{(c)} & c_{12}^{(c)} & c_{11}^{(c)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^{(c)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{(c)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{(c)} \end{Vmatrix}$$

$$c_{11}^{(c)}=\lambda+2\mu,\qquad c_{12}^{(c)}=\lambda,\qquad c_{44}^{(c)}=\mu$$

$$\theta_{ij}^{(c)}=\theta^{(c)}\delta_{ij},\qquad \varkappa_{ij}=\varkappa\delta_{ij}$$

где λ и μ — коэффициенты Ламе, δ_{ij} — символ Кронекера. С учетом зависимости только от y_1 и структуры матриц $c_{\alpha\beta}$, $e_{\alpha i}$, θ_{ij}, $\varkappa_{ij}$, соотношения (1.13) принимают вид

$$\tau_{11}^{kl}=c_{11}(y_1)\partial U_1^{kl}(y_1)/\partial y_1,\quad \tau_{22}^{kl}=c_{12}(y_1)\partial U_1^{kl}(y_1)/\partial y_1$$

$$\tau_{33}^{kl}=c_{13}(y_1)\partial U_1^{kl}(y_1)/\partial y_1,\quad \tau_{12}^{kl}=c_{66}(y_1)\partial U_2^{kl}(y_1)/\partial y_1$$

$$\tau_{13}^{kl}=c_{44}(y_1)\partial U_3^{kl}(y_1)/\partial y_1+e_{15}(y_1)\partial\Phi_{kl}(y_1)/\partial y_1,\quad \tau_{23}^{kl}=0$$

$$d_1^{kl}=e_{15}(y_1)\partial U_3^{kl}(y_1)/\partial y_1-[\theta_{11}(y_1)+p^{-1}\varkappa_{11}(y_1)]\,\partial\Phi_{kl}(y_1)/\partial y_1$$

$$d_2^{kl}=0,\quad d_3^{kl}=e_{13}(y_1)\partial U_1^{kl}(y_1)/\partial y_1$$

$$\zeta_{11}^{l}=c_{11}(y_1)\partial W_{1l}(y_1)/\partial y_1,\quad \zeta_{22}^{l}=c_{12}(y_1)\partial W_{1l}(y_1)/\partial y_1$$

$$\zeta_{33}^{l}=c_{13}(y_1)\partial W_{1l}(y_1)/\partial y_1,\quad \zeta_{12}^{l}=c_{66}(y_1)\partial W_{2l}(y_1)/\partial y_1$$

$$\zeta_{13}^{l}=c_{44}(y_1)\partial W_{3l}(y_1)/\partial y_1+e_{15}(y_1)\partial\Psi_l(y_1)/\partial y_1,\quad \zeta_{23}^{l}=0$$

$$g_1^{l}=e_{15}(y_1)\partial W_{3l}(y_1)/\partial y_1-[\theta_{11}(y_1)+p^{-1}\varkappa_{11}(y_1)]\,\partial\Psi_l(y_1)/\partial y_1$$

$$g_2^{l}=0,\quad g_3^{l}=e_{15}(y_1)\partial W_{1l}(y_1)/\partial y_1$$

Решая локальные задачи (1.12), определяем функции $U_n^{kl}(y_1)$, $\Phi_{kl}(y_1)$, $W_{nl}(y_1)$, $\Psi_l(y_1)$ и с их помощью после несложных преобразований получаем матрицы эффективных характеристик приведенной однородной среды в следующем виде ($\delta(t)$ — дельта-функция Дирака):

$$c_{\alpha\beta}^{*}(t)=\begin{Vmatrix} c_{11}^{*}(t) & c_{12}^{*}(t) & c_{13}^{*}(t) & 0 & 0 & 0\\ c_{12}^{*}(t) & c_{22}^{*}(t) & c_{23}^{*}(t) & 0 & 0 & 0\\ c_{13}^{*}(t) & c_{23}^{*}(t) & c_{33}^{*}(t) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^{*}(t) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^{*}(t) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^{*}(t)\end{Vmatrix}$$

$$e_{\alpha i}^{*}(t)=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & e_{13}^{*}(t)\\ 0 & 0 & e_{23}^{*}(t)\\ 0 & 0 & e_{33}^{*}(t)\\ 0 & e_{42}^{*}(t) & 0\\ e_{51}(t) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}$$

$$e_{i\alpha}^{*\prime}(t)=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}^{*\prime} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e_{24}^{*\prime}(t) & 0 & 0\\ e_{31}^{*\prime}(t) & e_{32}^{*\prime}(t) & e_{33}^{*\prime}(t) & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix},\quad \theta_{ik}^{*}(t)=\begin{Vmatrix}\theta_{11}^{*}(t) & 0 & 0\\ 0 & \theta_{22}^{*}(t) & 0\\ 0 & 0 & \theta_{33}^{*}(t)\end{Vmatrix}$$

$$\varkappa_{ik}^{*}(t)=\begin{Vmatrix}\varkappa_{11}^{*}(t) & 0 & 0\\ 0 & \varkappa_{22}^{*}(t) & 0\\ 0 & 0 & \varkappa_{33}^{*}(t)\end{Vmatrix},\quad \chi_{i\alpha}^{*}(t)=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{15}^{*}(t) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}$$

$$c_{11}^{*}(t)=\varepsilon c_{11}^{(p)}[\varepsilon_1+(\varepsilon-\varepsilon_1)c_{11}']^{-1}\delta(t),\qquad c_{12}^{*}(t)=A_1\delta(t),\qquad c_{13}^{*}(t)=A_2\delta(t)$$

$$c_{22}^{*}(t)=\{\varepsilon_1\varepsilon^{-1}[c_{11}^{(p)}-(c_{12}^{(p)}-A_1)c_{12}^{(p)}/c_{11}^{(p)}]+$$

$$+(\varepsilon-\varepsilon_1)\varepsilon^{-1}[c_{11}^{(c)}-(c_{12}^{(c)}-A_1)c_{12}^{(c)}/c_{11}^{(c)}]\}\delta(t)$$

$$c_{33}^{*}(t)=\{\varepsilon_1\varepsilon^{-1}[c_{33}^{(p)}-(c_{13}^{(p)}-A_2)c_{13}^{(p)}/c_{11}^{(p)}]+$$

$$+(\varepsilon-\varepsilon_1)\varepsilon^{-1}[c_{33}^{(c)}-(c_{13}^{(c)}-A_2)c_{13}^{(c)}/c_{11}^{(c)}]\}\delta(t)$$

$$c_{23}^{*}(t)=\{\varepsilon_1\varepsilon^{-1}[c_{13}^{(p)}-(c_{13}^{(p)}-A_2)c_{12}^{(p)}/c_{11}^{(p)}]+$$

$$+(\varepsilon-\varepsilon_1)\varepsilon^{-1}[c_{13}-(c_{13}-A_2)c_{12}^{(c)}/c_{11}^{(c)}]\}\delta(t)$$

$$c_{44}^*(t)=[\varepsilon_1\varepsilon^{-1}c_{44}^{(p)}+(\varepsilon-\varepsilon_1)\varepsilon^{-1}c_{44}\ ]\delta(t)$$

$$c_{66}^*(t)=\varepsilon c_{66}^{(p)}\ [\varepsilon_1+(\varepsilon-\varepsilon_1)c_{66}\ /c_{66}\ ]^{-1}\delta(t)$$

$$c_{55}^*(t)=\{2\varepsilon_1\varepsilon^{-1}(c_{44}^{(p)}-c_{44}^{(c)})+2c_{44}\ -2\varepsilon_1\varepsilon^{-1}c_{44}\ e_{15}b_3b_2^{-1}\times$$

$$\times(e_{15}^2+c_{44}^{(p)}\theta_{11}^{(p)})^{-1}+b_1b_2^{-1}\}\delta(t)-b_2^{-2}\{a_1b_2+b_1a_2-$$

$$-2\varepsilon_1\varepsilon^{-1}c_{44}^{(p)}e_{15}(a_3b_2-b_3a_2)/(e_{15}^2+c_{44}^{(p)}\theta_{11}^{(p)})\}\exp(-\lambda_2t)$$

$$e_{31}^{*\prime}(t)=\varepsilon_1e_{13}[\varepsilon_1+(\varepsilon-\varepsilon_1)c_{11}']^{-1}\delta(t)$$

$$e_{32}^{*\prime}(t)=[\varepsilon_1\varepsilon e_{13}-\varepsilon^{-1}c_{12}^{(p)}/c_{11}^{(p)}-\varepsilon^{-1}A_1/c_{11}^{(p)}]\delta(t)$$

$$e_{33}^{*\prime}(t)=\{\varepsilon_1\varepsilon^{-1}[e_{33}-e_{13}(c_{13}^{(p)}-A_2)/c_{11}\ ]\}\delta(t)$$

$$e_{15}^{*\prime}(t)=b_3b_2^{-1}\delta(t)+(a_3b_2-b_3a_2)b_2^{-2}[1+(\varepsilon-\varepsilon_1)\varepsilon^{-1}\lambda_1/(\lambda_1-\lambda_2)]\times$$
$$\times\exp(-\lambda_2t)-(\varepsilon-\varepsilon_1)\varepsilon\lambda_1b_2^{-2}[b_3b_2+(a_3b_2-b_3a_2)/(\lambda_1-\lambda_2)]\exp(-\lambda_1t)$$

$$e_{24}^{*\prime}(t)=\varepsilon_1\varepsilon^{-1}e_{15}\delta(t),\ e_{42}^*(t)=\varepsilon_1\varepsilon^{-1}e_{15}\delta(t)$$

$$e_{13}^*(t)=\varepsilon_1e_{13}[\varepsilon_1+(\varepsilon-\varepsilon_1)c_{11}']\delta(t)$$

$$e_{23}^*(t)=\{\varepsilon_1\varepsilon^{-1}(e_{13}-e_{13}c_{12}^{(p)}/c_{11}^{(p)})+[\varepsilon_1\varepsilon^{-1}c_{12}^{(p)}/c_{11}^{(p)}+$$

$$+(\varepsilon-\varepsilon_1)\varepsilon^{-1}c_{12}^{(c)}/c_{11}^{(c)}]\varepsilon_1e_{13}[\varepsilon_1+(\varepsilon-\varepsilon_1)c_{11}']^{-1}\}\delta(t)$$

$$e_{51}^*(t)=b_3b_2^{-1}\delta(t)+(a_3b_2-b_3a_2)b_2^{-2}\exp(-\lambda_2t)$$

$$e_{33}^*(t)=\{\varepsilon_1\varepsilon^{-1}(e_{33}-c_{13}^{(p)}e_{31}/c_{11}^{(p)})+[\varepsilon_1\varepsilon^{-1}c_{13}^{(p)}/c_{11}^{(p)}+$$

$$+(\varepsilon-\varepsilon_1)\varepsilon^{-1}c_{13}^{(c)}/c_{11}^{(c)}]\varepsilon_1e_{31}[\varepsilon_1+(\varepsilon-\varepsilon_1)c_{11}']^{-1}\}\delta(t)$$

$$\theta_{11}^*(t)=b_4b_2^{-1}\delta(t)+b_2^{-2}[(a_4b_2-b_4a_2)/(\lambda_1-\lambda_2)-$$
$$-b_4b_2\lambda_1]\exp(-\lambda_1t)+b_2^{-2}(a_4b_2-b_4a_2)[1-(\lambda_1-\lambda_2)^{-1}]\exp(-\lambda_2t)$$

$$\theta_{22}^*(t)=[\varepsilon_1\varepsilon^{-1}e_{11}^{(p)}+(\varepsilon-\varepsilon_1)\varepsilon^{-1}e^{(c)}]\delta(t)$$

$$\theta_{33}^*(t)=\varepsilon_1\varepsilon^{-1}(e_{13}^2/c_{11}^{(p)})[1-\varepsilon_1(\varepsilon_1+(\varepsilon-\varepsilon_1)c_{11}')^{-1}]\delta(t)$$

$$\varkappa_{11}^*(t)=(\varepsilon-\varepsilon_1)\varepsilon^{-1}\{b_1b_2^{-1}\delta(t)-\lambda_1^2(a_1-b_1\lambda_1)(a_2-b_2\lambda_1)^{-1}\exp(-\lambda_1t)+$$
$$+\lambda_1a_2b_2^{-2}(a_1b_2-b_1a_2)(a_2-b_2\lambda_1)^{-1}\exp(-\lambda_2t)$$

$$\varkappa_{22}^*(t)=\varkappa_{33}^*(t)=(\varepsilon-\varepsilon_1)\varepsilon^{-1}\varkappa$$

$$\chi_{15}^*(t)=-\varepsilon_1^2e_{15}c_{44}^{(c)}b_2^{-1}\{\delta(t)-\lambda_2\exp(-\lambda_2t)\}$$

$$A_1=[\varepsilon_1c_{12}^{(p)}+(\varepsilon-\varepsilon_1)c_{12}^{(c)}c_{11}'][\varepsilon_1+(\varepsilon-\varepsilon_1)c_{11}']^{-1}$$

$$A_2=[\varepsilon_1c_{13}^{(p)}+(\varepsilon-\varepsilon_1)c_{13}^{(c)}c_{11}'][\varepsilon_1+(\varepsilon-\varepsilon_1)c_{11}']^{-1}$$

$$a_1=\varepsilon_1\varepsilon c_{44}^{(p)}c_{44}^{(c)}\varkappa,\qquad a_2=\varepsilon_1\varkappa[\varepsilon_1c_{44}^{(c)}+(\varepsilon-\varepsilon_1)c_{44}^{(p)}]$$

$$a_3=\varepsilon_1\varepsilon e_{15}c_{44}^{(c)}\varkappa,\qquad a_4=\lambda_1b_4$$

$$b_1=\varepsilon_1\varepsilon c_{44}^{(c)}c_{44}^{(p)}\theta^{(c)}+\varepsilon(\varepsilon-\varepsilon_1)c_{44}^{(c)}[e_{15}^2+c_{44}^{(p)}\theta_{11}^{(p)}]$$

$$b_2=\varepsilon_1^2 c_{44}^{(c)}\theta^{(c)}+(\varepsilon-\varepsilon_1)^2(e_{15}^2+c_{44}^{(p)}\theta_{11}^{(p)})+\varepsilon_1(\varepsilon-\varepsilon_1)c_{44}^{(p)}\theta^{(c)}+\varepsilon_1(\varepsilon-\varepsilon_1)c_{44}^{(c)}$$

$$b_3=\varepsilon_1\varepsilon e_{15}c_{44}^{(c)}\theta^{(c)},\qquad b_4=\varepsilon\theta^{(c)}[\varepsilon_1\theta_{11}^{(p)}c_{44}^{(c)}+(\varepsilon-\varepsilon_1)(e_{15}^2+c_{44}^{(p)}\theta_{11}^{(p)})]$$

$$c_{11}'=c_{11}^{(p)}/c_{11}^{(c)},\qquad \lambda_1=\varkappa/\theta^{(c)},\qquad \lambda_2=a_2/b_2$$

Таким образом, с учетом проводимости материала непьезоэлектрического слоя пьезоэлектрического композита рассмотренной структуры уравнения состояния (1.16) принимают вид соотношений, характерных для вязкоупругой среды, причем наличие экспоненциальных множителей в выражениях для некоторых эффективных коэффициентов указывает на дифференциальный характер зависимости соответствующих компонент средних напряжений, индукции и тока (а именно: $\langle\sigma_{13}^{(0)}\rangle$, $\langle D_1^{(0)}\rangle$, $\langle J_1^{(0)}\rangle$) от деформации и напряженности электрического поля. Отметим также характерную особенность третьего уравнения (1.16), состоящую в зависимости средней плотности тока проводимости от деформации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
2. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
3. Физическая акустика. Т. 1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. М.: Мир, 1966. 592 с.
4. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 159 с.

Москва

Поступила в редакцию 18.II.1987