

УДК 539.3

А. Н. ЦВЕТКОВ, М. И. ЧЕБАКОВ

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КОНЕЧНОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ СО СВОБОДНОЙ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Рассматривается осесимметричная контактная задача теории упругости о вдавлении кругового в плане штампа в торец тела вращения конечных размеров. Тело вращения имеет две параллельные плоские границы, одна из которых лежит без трения на жестком основании, а другая взаимодействует со штампом. Образующая тела вращения — гладкая кривая. Для решения задачи используются однородные решения для слоя, с помощью которых удовлетворяются граничные условия на боковой поверхности приближенно методом граничной коллокации или методом наименьших квадратов. Задача сводится к исследованию конечных систем линейных алгебраических уравнений. Проведен численный анализ задачи для различных значений параметров. Схема решения задачи восходит к [1–3].

1. Постановка задачи. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) рассмотрим тело вращения (фиг. 1), ограниченное поверхностями $z=0$, $z=h$ и $r=R(z)$, $R(z)$ — гладкая функция. В области контакта ($z=h$, $r \leq a$) задано вертикальное смещение штампа, вне штампа отсутствуют напряжения. Тело вращения опирается на гладкое жесткое основание, боковая поверхность свободна от напряжений.

Поставленная задача сводится к решению краевой задачи для осесимметричных уравнений Ляме в цилиндрических координатах [4] при следующих граничных условиях:

$$\tau_{rz}=0, w=\delta \quad (z=h, r \leq a) \quad (1.1)$$

$$\tau_{rz}=0, \sigma_z=0 \quad (z=h, a < r < R(h)) \quad (1.2)$$

$$\tau_{rz}=0, w=0 \quad (z=0) \quad (1.3)$$

$$\sigma_r - R'(z)\tau_{rz}=0 \quad (0 < z < h, r=R(z)) \quad (1.4)$$

$$\sigma_z R'(z) - \tau_{rz}=0 \quad (0 < z < h, r=R(z)) \quad (1.5)$$

где τ_{rz} , σ_r , σ_z — компоненты тензора напряжений, w — перемещения вдоль оси z , δ — перемещение штампа, a — радиус штампа, h — высота тела вращения.

2. Решение вспомогательных задач. Решение поставленной в п. 1 краевой задачи для уравнений Ляме будем разыскивать в виде

$$u(r, z) = u^1(r, z) - u^2(r, z), \quad w(r, z) = w^1(r, z) - w^2(r, z) \quad (2.1)$$

где u — перемещение вдоль оси r , u^1 , w^1 — решение уравнений Ляме для слоя в цилиндрических координатах при следующих граничных условиях

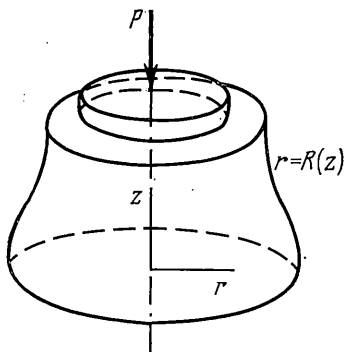
$$\tau_{rz} = w = 0 \quad (z=0) \quad (2.2)$$

$$\tau_{rz}=0, \sigma_z = \{0, r > a; q(r), r \leq a\} \quad (z=h)$$

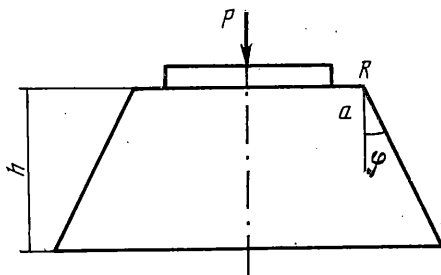
u^2 , w^2 — суперпозиция осесимметричных однородных решений для слоя, когда на границе заданы условия

$$\tau_{rz} = w = 0 \quad (z=0), \quad \tau_{rz} = \sigma_z = 0 \quad (z=h) \quad (2.3)$$

Решение неоднородной краевой задачи для уравнений Ляме при условиях (2.2) построим с помощью преобразования Ханкеля. Выражения для перемещений и компонент тензора напряжения выпишем в виде (μ — мо-



Фиг. 1



Фиг. 2

дугль сдвига материала, $J_n(x)$ ($n=0, 1$) — функции Бесселя):

$$u^1(r, z) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} Q(\gamma) L_1(z, \gamma) J_1(\gamma r) \gamma d\gamma \quad (2.4)$$

$$w^2(r, z) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} Q(\gamma) L_2(z, \gamma) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma \quad (2.5)$$

$$\tau_{rz}^1(r, z) = \int_0^{\infty} Q(\gamma) L_3(z, \gamma) J_1(\gamma r) \gamma d\gamma \quad (2.6)$$

$$\sigma_r^1(r, z) = \int_0^{\infty} Q(\gamma) \left[L_4(z, \gamma) J_0(\gamma r) + \frac{L_5(z, \gamma)}{\gamma r} J_1(\gamma r) \right] \gamma d\gamma \quad (2.7)$$

$$\sigma_z^1(r, z) = \int_0^{\infty} Q(\gamma) L_6(z, \gamma) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma \quad (2.8)$$

$$L_1(\gamma, z) = \gamma^{-1} \{ \text{ch } \gamma z [(1-2\nu) \text{sh } \gamma h - \gamma h \text{ ch } \gamma h] + \gamma z \text{ sh } \gamma z \text{ sh } \gamma h \} \Delta^{-1}(\gamma h)$$

$$L_2(\gamma, z) = \gamma^{-1} \{ \text{sh } \gamma z [\gamma h \text{ ch } \gamma h + 2(1-\nu) \text{sh } \gamma h] - \gamma z \text{ sh } \gamma h \text{ ch } \gamma z \} \Delta^{-1}(\gamma h)$$

$$L_3(\gamma, z) = 2(\gamma z \text{ sh } \gamma h \text{ ch } \gamma z - \gamma h \text{ sh } \gamma z \text{ ch } \gamma h) \Delta^{-1}(\gamma h)$$

$$L_4(\gamma, z) = 2\{ \gamma z \text{ sh } \gamma z \text{ ch } \gamma h + \text{ch } \gamma z [(1-2\nu)^{-1} \text{sh } \gamma h - \gamma h \text{ ch } \gamma h] \} \Delta^{-1}(\gamma h)$$

$$L_5(\gamma, z) = -2\{ \text{ch } \gamma z [(1-2\nu) \text{sh } \gamma h - \gamma h \text{ ch } \gamma h] + \gamma z \text{ sh } \gamma z \text{ sh } \gamma h \} \Delta^{-1}(\gamma h)$$

$$L_6(\gamma, z) = 2\{ -\gamma z \text{ sh } \gamma h \text{ sh } \gamma z + \text{ch } \gamma z [(1-2\nu)^{-1} \text{sh } \gamma h + \gamma h \text{ ch } \gamma h] \} \Delta^{-1}(\gamma h)$$

$$\Delta(z) = \text{sh } 2z + 2z, \quad Q(\gamma) = \int_0^a q(r) J_0(\gamma r) r dr \quad (2.9)$$

Однородные решения уравнений Ляме при условии (2.3) могут быть получены по аналогии с предыдущей задачей. Выпишем их суперпозицию для компонент вектора перемещений и компонент тензора напряжений

$$u^2(r, z) = \sum_k D_k L_{1k}^{\circ}(z) J_1(p_k r/h)$$

$$w^2(r, z) = \sum_k D_k L_{2k}^{\circ}(z) J_0(p_k r/h)$$

$$\tau_{rz}^2(r, z) = \mu \sum_k D_k L_{3k}^{\circ}(z) J_1(p_k r/h) \quad (2.10)$$

$$\sigma_r^2(r, z) = \mu \sum_k D_k [L_{4k}^\circ(z) J_0(p_k r/h) + (h/p_k r) L_{5k}^\circ(z) J_1(p_k r/h)]$$

$$\sigma_z^2(r, z) = \mu \sum_k D_k L_{6k}^\circ(z) J_0(p_k r/h)$$

где функции $L_{nk}^\circ(z)$ через функции $L_k(\gamma, z)$ выражаются с помощью соотношения $L_{nk}^\circ(z) = L_k(p_n/h, z) (p_n/h) \Delta(p_n)$.

В (2.10) суммирование проводится по всем лежащим в правой полуплоскости корням уравнения

$$\Delta(p_n) = 0 \quad (p_{2n} = \bar{p}_{2n-1}) \quad (2.11)$$

Если решение исходной поставленной в п. 1 контактной задачи искать в виде (2.1), то граничные условия (1.2)–(1.3) будут удовлетворены. Удовлетворяя граничному условию (1.1) получим интегральное уравнение (2.12)

$$Kq \equiv \int_0^a q(\rho) k(\rho, r) r d\rho = \frac{\mu}{1-\nu} \left[\delta + \sum_k D_k L_{2k}^\circ(h) J_0\left(\frac{p_k r}{h}\right) \right]$$

$$k(\rho, r) = \int_0^\infty L(\gamma) J_0(r\gamma) J_0(\rho\gamma) \gamma d\gamma$$

$$L(\gamma) = (1-\nu)^{-1} L_2(h, \gamma) = \gamma^{-1} (\operatorname{ch} 2\gamma h - 1) \Delta^{-1}(\gamma h)$$

Решение интегрального уравнения (2.12) удобно представить в виде

$$q(r) = \frac{\mu}{1-\nu} \left[\delta q_0(r) + \sum_k D_k L_{2k}^\circ(h) q_k(r) \right] \quad (2.13)$$

где $q_k(r)$ — решения интегральных уравнений

$$Kq_k = \begin{cases} 1 & (r \leq a, k=0) \\ J_0(p_k r/h) & (r \leq a, k \geq 1) \end{cases} \quad (2.14)$$

Здесь Kq_k — интегральный оператор, стоящий в левой части соотношения (2.12).

Оставшимся граничным условиям (1.4)–(1.5) удовлетворим приближенно двумя способами: методом граничной коллокации и методом наименьших квадратов.

Для построения решений интегральных уравнений (2.14) воспользуемся методом «больших λ », который для данного случая изложен в [5]. Не останавливаясь на изложении метода, выпишем результат

$$q_k(\rho a) = \frac{2}{\pi} \left[\sum_{j=0}^M H_j^k(\lambda) S_j(\rho) + G_k(\rho) \right] + O(\lambda^{-2(M+1)}) \quad (\rho \leq 1) \quad (2.15)$$

$$G_0(\rho) = a^{-1} S_0(\rho)$$

$$G_k(\rho) = \frac{d}{ad\rho} \rho \int_0^1 \frac{\cos(ap_k t/h) dt}{t(t^2 - \rho^2)^{1/2}} \quad (k \geq 1)$$

$$S_j(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(j-1)! (2j\rho^2 - 2j + 2k + 1)}{k! (j-k-1)! (2k+1)} (1-\rho^2)^k \rho^{2(j-k-1)}$$

$$H_j^k(\lambda) = \sum_{s=j}^M \lambda^{-(2s+1)} (\beta_{sj}^k + \lambda^{-1} \alpha_{s+1,j}^k)$$

где $\lambda = h/a$, число M — выбирается в зависимости от заданной точности, α_{sj}^k и β_{sj}^k определяется из простых рекуррентных соотношений из [5].

мулы (2.15) позволяют построить решение интегральных уравнений в области сходимости метода больших λ практически с любой степенью точности.

3. Метод граничной коллокации. Контактные напряжения под штампом определяются формулой (2.13), в которой не известны постоянные D_k . Найдем их, удовлетворив граничным условиям (1.4)–(1.5) в N точках кривой $r=R(z)$ ($0 < z < 1$).

Предварительно сделаем следующие преобразования для компонент тензора напряжений исходной задачи. В соответствии с (2.1) будем иметь

$$\tau_{rz} = \tau_{rz}^1 - \tau_{rz}^2, \quad \sigma_r = \sigma_r^1 - \sigma_r^2, \quad \sigma_z = \sigma_z^1 - \sigma_z^2. \quad (3.1)$$

где слагаемые, стоящие в правых частях равенств с учетом (2.6)–(2.8), (2.9), (2.10) и (2.13) могут быть представлены в виде

$$\tau_{rz}^1 = \frac{\mu}{1-\nu} \left[\delta T_1^0(r, z) + \sum_{k=1}^{2N} D_k T_1^k(r, z) \right] \quad (3.2)$$

$$\sigma_r^1 = \frac{\mu}{1-\nu} \left[\delta T_2^0(r, z) + \sum_{k=1}^{2N} D_k T_2^k(r, z) \right] \quad (3.3)$$

$$\sigma_z^1 = \frac{\mu}{1-\nu} \left[\delta T_3^0(r, z) + \sum_{k=1}^{2N} D_k T_3^k(r, z) \right] \quad (3.4)$$

$$T_1^k = L_{2k}(h) \int_0^\infty Q_k(\gamma) L_3(z, \gamma) J_1(\gamma r) \gamma d\gamma \quad (3.5)$$

$$T_2^k = L_{2k}(h) \int_0^\infty Q_k(\gamma) [L_4(z, \gamma) J_0(\gamma r) + (\gamma r)^{-1} L_5(z, \gamma) J_1(\gamma r)] \gamma d\gamma \quad (3.6)$$

$$T_3^k = L_{2k}(h) \int_0^\infty Q_k(\gamma) L_6(z, \gamma) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma \quad (3.7)$$

$$Q_k(\gamma) = \int_0^a q_k(r) J_0(\gamma r) r dr \quad (3.8)$$

В выражениях (3.2)–(3.4) под знаком суммы удержано $2N$ слагаемых, так как имеем после удовлетворения граничным условиям на боковой поверхности $2N$ уравнений. Аналогично получим выражения для вторых слагаемых правых частей равенств (3.1):

$$\tau_{rz}^2 = \mu \sum_{k=1}^{2N} D_k E_1^k(r, z), \quad \sigma_r^2 = \mu \sum_{k=1}^{2N} D_k E_2^k(r, z) \\ \sigma_z^2 = \mu \sum_{k=1}^{2N} D_k E_3^k(r, z) \quad (3.9)$$

$$E_2^k(r, z) = L_{4k}^0(z) J_0(p_k r/h) + L_{5k}^0(z) J_1(p_k r/h) h / (r p_k)$$

$$E_1^k(r, z) = L_{3k}^0(z) J_1(p_k r/h), \quad E_3^k(r, z) = L_{6k}^0(z) J_0(p_k r/h)$$

В суммах (3.2)–(3.3), (3.9) корни уравнения (2.11) пронумерованы так, что $p_{2k} = \bar{p}_{2k-1}$ ($k=1, \dots, N$).

Обозначим точки коллокации через (z_k, r_k) ($k=1, \dots, N$), при этом выполняются соотношения $r_k = R(z_k)$ ($0 \leq z_k \leq h$).

Удовлетворяя граничным условиям (1.4)–(1.5) в указанных точках коллокации, получим для определения $2N$ неизвестных D_k систему $2N$ ли-

нейных алгебраических уравнений

$$\sum_{h=1}^{2N} D_h a_{hm}^1 = b_m^1, \quad \sum_{h=1}^{2N} D_h a_{hm}^2 = b_m^2 \quad (m=1, \dots, 2N) \quad (3.10)$$

$$a_{hm}^1 = (1-\nu) E_2^h(r_m, z_m) - T_2^h(r_m, z_m) - R'(z_m) [(1-\nu) E_1^h(r_m, z_m) - T_1^h(r_m, z_m)]$$

$$b_m^1 = \delta [T_2^\circ(r_m, z_m) - R'(z_m) T_1^\circ(r_m, z_m)]$$

$$a_{hm}^2 = (1-\nu) E_1^h(r_m, z_m) - T_1^h(r_m, z_m) - R'(z_m) [(1-\nu) E_3^h(r_m, z_m) - T_3^h(r_m, z_m)]$$

$$b_m^2 = \delta [T_1^\circ(r_m, z_m) - R'(z_m) T_3^\circ(r_m, z_m)]$$

Формулы для вычисления матрицы и правой части системы (3.10) содержат только однократные несобственные интегралы типа (3.5)–(3.7), в которых внутренний интеграл (3.8) вычисляется в явном виде с учетом (2.15).

4. Метод наименьших квадратов. Для контроля результатов численных расчетов используем второй способ приближенного удовлетворения граничным условиям (1.4)–(1.5) на боковой поверхности. Неизвестные постоянные D_h найдем из условия минимума функционала

$$J = \int_{\Gamma} [(\sigma_r - R' \tau_{rz})^2 + (R' \sigma_z - \tau_{rz})^2] ds \quad (4.1)$$

где Γ — образующая боковой поверхности, компоненты тензора напряжений, стоящие под интегралом, определяются формулами (3.1)–(3.9).

Из условия минимума функционала (4.1) для определения D_h получим систему линейных алгебраических уравнений $\partial J / \partial D_m = 0$ ($m=1, \dots, N$), которая имеет вид

$$\sum_{h=1}^{2N} D_h a_{hm} = d_m \quad (m=1, \dots, 2N) \quad (4.2)$$

$$a_{hn} = \int_0^h [r_h(z) r_n(z) + p_h(z) p_n(z)] dz \quad (4.3)$$

$$d_n = -\delta \int_0^h [r_0(z) r_n(z) + p_0(z) p_n(z)] dz$$

$$r_h(z) = T_2^h - (1-\nu) E_2^h - R'(z) [T_1^h - (1-\nu) E_1^h] \quad (k \geq 1)$$

$$p_h(z) = R'(z) [T_3^h - (1-\nu) E_3^h] - T_1^h + (1-\nu) E_1^h \quad (k \geq 1) \quad (4.4)$$

$$r_0(z) = T_2^\circ - R'(z) T_1^\circ, \quad p_0(z) = R'(z) T_3^\circ - T_1^\circ$$

В правых частях (4.4) следует положить $r=R(z)$. В отличие от системы (3.10) элементы матрицы и правой части системы (4.2) вычисляются по формулам, содержащим двукратные интегралы.

Учитывая трудности, возникающие при вычислении двукратных интегралов (4.3), заменим в последних интеграл по z конечной суммой, выбрав определенным способом точки z_h на отрезке $[0, h]$:

$$a_{hn} = \sum_{m=1}^K [r_h(z_m) r_n(z_m) + p_h(z_m) p_n(z_m)]$$

$$d_n = -\delta \sum_{m=1}^K [r_0(z_m) r_n(z_m) + p_0(z_m) p_n(z_m)]$$

Это значительно упростит вычисления и при этом решение будет получено с достаточной точностью.

5. Результаты численных расчетов. В качестве примера было взято тело вращения, осевое сечение которого есть равнобедренная трапеция (фиг. 2). В таблице приведены значения величин

$$\sigma_z(r) = a(1-\nu)(G\delta)^{-1}\sigma_z(r, h) \quad (r \leq a) \quad (5.1)$$

$$P^* = (1-\nu)(G\delta a)^{-1}P$$

при $\lambda=2$ и некоторых значениях R и φ . В (5.1) $\sigma_z(r, h)$ — контактные напряжения под штампом, определяемые соотношением (2.13), а P — величина силы, действующей на штамп.

R	φ	$\sigma_z(0)$	$\sigma_z(a/2)$	$\sigma_z(5a/6)$	P^*	$2N$	K
1,3	0	1,06	1,29	2,26	5,64	10	6
1,5	0	1,07	1,24	2,05	5,13	8	4
1,5	0	1,06	1,25	2,10	5,26	10	4
1,5	0	1,10	1,33	2,32	5,72	10	6
1,5	0	1,10	1,33	2,33	5,74	10	8
1,2	0	1,01	1,15	1,83	3,68	8	24
1,5	0	1,13	1,36	2,29	5,64	6	—
1,5	10	1,13	1,36	2,31	5,76	6	—
1,5	20	1,13	1,37	2,36	5,88	6	—
1,6	0	1,12	1,35	2,34	5,84	10	6
2,0	0	1,14	1,38	2,39	5,94	10	6
2,5	0	1,15	1,40	2,41	6,00	10	6
∞	0	1,15	1,40	2,43	6,036	10	—

В предпоследней колонке таблицы для методов коллокаций и квадратичного отклонения указан порядок систем (3.10) и (4.2) соответственно, в последней колонке для метода квадратичного отклонения указано количество слагаемых, на которые, как уже отмечалось выше, заменяются в (4.3) интегралы по z . В последней строке таблицы для сравнения приведены результаты для слоя.

Из таблицы видно, как уточняются результаты с увеличением числа уравнений системы (4.2) и числа слагаемых, на которые разбиваются интегралы (4.3), отмечается также близость результатов, получаемых методом коллокаций и методом наименьших квадратов.

Числовые эксперименты показывают, что сходимость методов улучшается с увеличением R , а метод коллокации дает приемлемые результаты при шести уравнениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bratz J. H. A. The stress function and photo-elasticity applied to dams // Proc. Amer. Soc. civil engng. 1935. V. 61. № 7. P. 983—1020.
2. Tölke F. Wasserkraftanlagen // Handbibliothek für Bauingenier. Berlin: Springer, 1938. III Teil. Bd. 9. S. 358—408.
3. Александров В. М. Метод однородных решений в контактных задачах теории упругости для тел конечных размеров // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. Естеств. н. 1974. № 4. С. 12—16.
4. Ревак В. Г. Руководство к решению задач по теории упругости. М.: Высш. шк. 1977. 215 с.
5. Чебаков М. И. Некоторые динамические и статические контактные задачи теории упругости для кругового цилиндра конечных размеров // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 5. С. 923—933.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
21.XII.1987