

УДК 539.3

В. Б. ЗЕЛЕНЦОВ, Л. М. ФИЛИПОВА

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ПОЛУПЛОСКОСТИ И ПОЛОСЫ

Рассмотрены контактные задачи для полуплоскости и полосы из сжимаемого упругого материала при наличии начальных напряжений. Изучено влияние предварительной деформации на распределение контактных напряжений, перемещение штампа и размер зоны контакта.

1. Линеаризованные уравнения равновесия в задаче о плоской деформации предварительно напряженного упругого тела из полулинейного материала при однородном поле начальных напряжений имеет вид [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \theta_{21}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial \theta_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \theta_{22}}{\partial y} &= 0 & (1.1) \\ \frac{1}{2\mu} \sigma_{11} &= \frac{1}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\ \frac{1}{2\mu} \theta_{22} &= \frac{1}{1-2\nu} \left[\nu \frac{\partial u}{\partial x} + (1-\nu) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\ \frac{1}{2\mu} \theta_{12} &= \frac{1}{1+(1-2\nu)\Delta} \left[(1-\nu)\Delta \frac{\partial u}{\partial y} + (1-\nu)\Delta \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\ \frac{1}{2\mu} \theta_{21} &= \frac{1}{1+(1-2\nu)\Delta} \left[(1-\nu)\Delta \frac{\partial u}{\partial y} + (1-\nu)\Delta \frac{\partial v}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

где x, y — декартовы координаты в недеформированном состоянии тела, u, v — компоненты напряжений, μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, Δ — кратность удлинения в направлении оси x для начального плоского деформированного состояния. В (1.1) учтено, что на плоскостях $y = \text{const}$ начальные напряжения равны нулю. Формулировка граничных условий в напряжениях при $y = \text{const}$ состоит в задании величин θ_{22} и θ_{21} .

Задача о вдавливании гладкого жесткого штампа в упругую предварительно напряженную полуплоскость из полулинейного материала на основании (1.1) приводится к интегральному уравнению первого рода, ядро которого отличается от ядра уравнения классической контактной задачи для полуплоскости [1] постоянным множителем $m(\Delta) = \Delta(2\Delta - 1)^{-1}$. Отсюда вытекает, что как и в контактной задаче для преднапряженной полуплоскости из несжимаемого материала [3] начальное напряжение не влияет на распределение контактного давления под параболическим штампом, но влияет на величину зоны контакта при заданной прижимающей силе. Для наклонного прямолинейного штампа начальные напряжения меняют характер распределения контактного давления. При $\Delta \rightarrow \Delta^* = 0,5$ коэффициент $m(\Delta)$ неограниченно возрастает. Этот факт следует трактовать как потерю устойчивости сжатой полуплоскости. Вопросы устойчивости предварительно напряженных тел освещены в [1, 2, 4].

Перемещения u, v произвольной точки полуплоскости ($y \leq 0$) в случае плоского штампа выражаются с помощью интегралов

$$v = \frac{Qm(\Delta)}{2\pi\mu\Delta} \int_0^{\infty} \frac{2\Delta(1-\nu) - \alpha y}{\alpha} e^{\alpha y} J_0(\alpha a) \cos \alpha x d\alpha + v_0$$

$$u = \frac{-Qm(\Delta)}{2\pi\mu\Delta} \int_0^{\infty} \frac{1-2\Delta\nu + \alpha y}{\alpha} e^{\alpha y} J_0(\alpha a) \sin \alpha x d\alpha$$

первый из которых вычисляется с точностью до неопределенной аддитивной постоянной v_0 [5].

2. Рассмотрим контактные задачи о вдавливании жесткого гладкого штампа ширины $2a$ ($|x| \leq a$) в упругий предварительно напряженный слой толщины h ($0 \leq y \leq h$). В одном случае (задача 1) слой лежит без трения на жестком основании, в другом случае (задача 2) слой жестко сцеплен с недеформируемым основанием.

Обе задачи с помощью преобразования Фурье приводятся к решению интегрального уравнения

$$\int_{-1}^1 \varphi_0(\xi) k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x) \quad (|x| \leq 1) \quad (2.1)$$

$$k(t) = \int_0^{\infty} K(u) \cos ut du$$

в котором для задачи 1 ($\varepsilon = 2\Delta - 1$):

$$\varphi_0(x) = \frac{(1-\nu)\Delta a}{\mu\varepsilon} \varphi(x), \quad K(u) = \frac{\varepsilon(\operatorname{ch} 2u - 1)}{u(\varepsilon \operatorname{sh} 2u + 2u)} \quad (2.2)$$

а для задачи 2:

$$\varphi_0(x) = \frac{(1-\nu)\Delta\beta_1 a}{\mu\beta_2} \varphi(x), \quad K(u) = \frac{\beta_2(\beta_1 \operatorname{sh} 2u - 2u)}{\beta_1 u (\beta_2 \operatorname{ch} 2u + \beta_3 + 2u^2)} \quad (2.3)$$

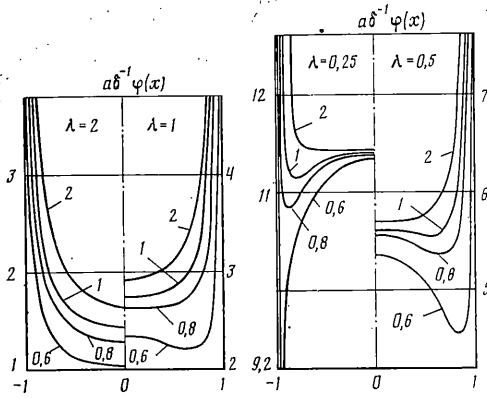
$$\beta_1 = 1 + (1-2\nu)2\Delta, \quad \beta_2 = 4\Delta^2(1-\nu)^2 - (1-2\Delta\nu)(1-2\nu)$$

$$\beta_3 = 4\Delta^2(1-\nu)^2 + (1-2\Delta\nu)(1-2\nu) \quad (\lambda = h/a)$$

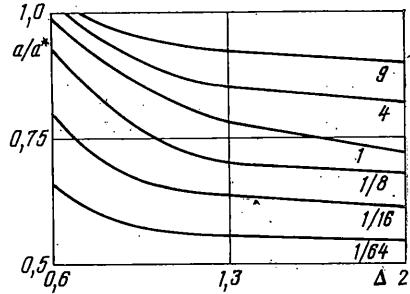
Здесь $f(x)$ — функция, характеризующая осадку и форму штампа, $\varphi(x)$ — контактные давления.

Интегральные уравнения поставленных задач при $\Delta = 1$ переходят в соответствующие интегральные уравнения для упругого слоя, которые рассматривались, например, в [6].

Функции $K(u)$ ядер интегральных уравнений существенно зависят от параметра преднапряженного состояния Δ . Изучение свойств функций $K(u)$, а следовательно и свойств ядер этих уравнений показывает, что они совпадают со свойствами ядер соответствующих уравнений задач теории упругости [6] при $\Delta > \Delta^*$ ($\Delta^* < 1$) (для $K(u)$ вида (2.2) это $\Delta^* = 0,5$, а для $K(u)$ из (2.3) оно находится из уравнения $\beta_2 = 0$). Нетрудно видеть, что функции $\varepsilon^{-1}K(u)$ и $\beta_2^{-1}K(u)$, где в первом случае $K(u)$ из (2.2), а во втором из (2.3), при $\Delta = \Delta^*$ экспоненциально возрастают при $|u| \rightarrow \infty$, поэтому ядро интегрального уравнения в этом случае не существует. Чтобы выяснить, какому физическому явлению соответствует такое изменение ядра интегрального уравнения, проведем аналогию рассматриваемых контактных задач с задачей о действии сосредоточенной силы P на упругий преднапряженный слой, скрепленный с основанием как в зада-



Фиг. 1



Фиг. 2

че 1. Перемещения u , v произвольной точки слоя даются формулами

$$v = \frac{P}{2\pi\mu} \int_0^{\infty} \frac{L(u, u\eta h^{-1})}{p(u)} \cos u\eta h^{-1} du \quad (2.4)$$

$$u = \frac{P}{2\pi\mu} \int_0^{\infty} \frac{M(u, u\eta h^{-1})}{p(u)} \sin u\eta h^{-1} du$$

$$p(u) = u(u + (2\Delta - 1) \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u) \quad (2.5)$$

$$L(u, \eta) = \eta \operatorname{sh} u \operatorname{ch} \eta - [2(1 - \nu)\Delta \operatorname{sh} u + u \operatorname{ch} u] \operatorname{sh} \eta$$

$$M(u, \eta) = \eta \operatorname{sh} u \operatorname{sh} \eta - [u \operatorname{ch} u - (1 - 2\Delta\nu) \operatorname{sh} u] \operatorname{ch} \eta$$

Легко видеть, что при $\Delta \neq \Delta^*$ и любых x , y перемещения u , v — ограничены и растут при $\Delta \rightarrow \Delta^* + 0$. При $\Delta = \Delta^*$ интегралы (2.4), (2.5) в обычном смысле не существуют. Как в контактных задачах, так и в рассматриваемой задаче о сосредоточенной силе при $\Delta^* = 0$ на действительной оси у функций $K(u)$ и у подынтегральных функций (2.4), (2.5), появляется полюс на бесконечности. Это означает, что в слое и на его поверхности вне штампа появляется стоячая волна перемещений с длиной волны стремящейся к нулю, когда $\Delta \rightarrow \Delta^* = 0$. Этот факт указывает, что промежуток $0 < \Delta \leq \Delta^*$ физически не реализуем, а величина $e^* = 1 - \Delta^*$ — есть критическое значение деформации слоя.

Строгое неравенство Адамара (требование сильной эллиптичности) для рассматриваемой начальной деформации полулинейного материала согласно [2] приводит к условиям $\Delta > 0$, $\nu < 0,5$. Очевидно, что в задаче 1 неравенство Адамара выполнено при всех допустимых значениях $\Delta > \Delta^* = 0,5$. В задаче 1 условие $\Delta > \Delta^*$ влечет выполнение неравенства Адамара при $\nu \leq \nu^* = 0,358$.

Свойства ядер интегральных уравнений позволяют в диапазоне $\Delta > \Delta^*$ для анализа напряженного состояния использовать асимптотические методы «больших» и «малых» λ развитые в [6]. Преднапряженное состояние слоя оказывает влияние на перераспределение контактных давлений под штампом. Так для плоского узкого штампа в обеих задачах характер изменения контактных давлений такой же как и в классической теории упругости. При увеличении ширины штампа и сжимающих предварительных напряжений контактные давления имеют локальный максимум в центре штампа (фиг. 1, задача 1; возле кривых указаны значения Δ). В данном случае разное сцепление слоя с основанием мало влияет на изменение характера контактных напряжений, а сказывается только на величине этих давлений.

Была рассмотрена задача о вдавливании параболического штампа ($f(x) = \delta - \chi x^2$) в преднапряженную полосу. На фиг. 2 показано изменение

полуширины зоны контакта a в зависимости от Δ для задачи 1 при различных значениях $\gamma = \delta/\chi$ (числа возле кривых в долях величины $a^* = \sqrt{\gamma}$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
2. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
3. Филиппова Л. М. Плоская контактная задача для предварительно напряженного упругого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 3. С. 143–146.
4. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка, 1973. 270 с.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
10.IV.1987