МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1989

УДК 539.3.01

Ю. В. ВАСИЛЕВИЧ, И. А. ПРУСОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Изложен метод решения первой основной задачи теории упругости для ортотропного полупространства. Решение задачи представлено в виде суперпозиции двух решений, описывающих напряженно-деформированное состояние тела при заданной нормальной и тангенциальной нагрузках. Компоненты напряжений и перемещений выражены через четыре квазигармонические функции. Полученные формулы удовлетворяют принципу предельного перехода, состоящему в том, что при устремлении постоянных упругости ортотропного тела к соответствующим значениям для изотропного тела, они обращаются в известные формулы Галина для изотропного полупространства. В качестве примера рассмотрено решение задачи Неймана.

1. Пусть ортотропное тело занимает область $z>0$, ограниченную плоскостью S $(z=0)$. Плоскость S перпендикулярна к одному из трех главных направлений упругости тела, параллельных осям декартовых координат x, y, z. На некоторую область S_1 границы S действуют нормальное давление $\sigma_z=-p(x, y)$ и касательные напряжения $\tau_{xz}=X(x, y)$, $\tau_{yz}=Y(x, y)$. Вне области S_1 внешняя нагрузка отсутствует.

Как показано в [1], уравнениям равновесия в компонентах напряжения и закону Гука удовлетворим, если положим (суммирование по k от 1 до 3):

$$\sigma_x=\sum\left(\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial y^2}+\xi_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial z^2}\right)-n_1\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x\,\partial y}$$

$$\tau_{xy}=-\sum\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x\partial y}+n_4\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}-n_5\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial y^2}$$

$$\sigma_y=\sum\left(\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x^2}+\eta_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial z^2}\right)+n_2\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x\partial y}$$

$$\tau_{xz}=-\sum\xi_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x\partial z}-n_6\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial y\partial z}\tag{1.1}$$

$$\sigma_z=\sum\left(\xi_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x^2}+\eta_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial y^2}\right)+n_3\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x\partial y}$$

$$\tau_{yz}=-\sum\eta_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial y\partial z}+n_7\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x\partial z},\qquad u=\sum P_{k1}\frac{\partial\Phi_k}{\partial x}-a_{66}\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}$$

$$v=\sum P_{k2}\frac{\partial\Phi_k}{\partial y}+n_8a_{66}\frac{\partial\Phi_0}{\partial x},\qquad w=\sum P_{k3}\frac{\partial\Phi_k}{\partial z}$$

$$P_{k1}={}^1/_2(\eta_ka_{44}-\xi_ka_{55}-a_{66}),\qquad P_{k2}={}^1/_2(\xi_ka_{55}-\eta_ka_{44}-a_{66})$$

$$P_{k3}={}^1/_2(a_{66}-\eta_ka_{44}-\xi_ka_{55}),\qquad \xi_k={}^1/_2a_{22}(a_{66}\lambda_k^2-a_{44})\Delta_k^{-1}$$

$$\eta_k=[a_{22}(a_{11}\lambda_k^2-a_{13}-{}^1/_2a_{55})-(a_{12}+{}^1/_2a_{66})(a_{12}\lambda_k^2-a_{23})]\Delta_k^{-1}$$

$$\Delta_k=a_{22}\lambda_k^2(a_{11}\lambda_k^2-a_{13}-{}^1/_2a_{55})-(a_{12}\lambda_k^2-a_{23})(a_{12}\lambda_k^2+{}^1/_2a_{44})$$

$$\mu_k=+[(a_{23}+a_{33}\xi_k)(a_{13}+a_{33}\eta_k)^{-1}]^{1/2}$$

где $\lambda_k^2=x_k$ — корни кубического уравнения

$$M_0x^3-M_1x^2+M_2x-M_3=0 \tag{1.2}$$

$$M_1=a_{22}a_{66}(a_{55}+2a_{13})+a_{44}(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)-2a_{12}a_{23}a_{66}$$

$$M_2=a_{22}a_{44}(a_{55}+2a_{13})+a_{66}(a_{22}a_{33}-a_{23}^2)-2a_{12}a_{23}a_{44}$$

$$M_3=a_{44}(a_{22}a_{33}-a_{23}^2),\qquad M_0=a_{66}(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)$$

Значения $n_1,\ldots,n_8$, μ_0^2, λ_0^2 — выражены через различные комбинации a_{ij} и приведены в [1]; $\Phi_k(x, y_k, z_k)$, $\Phi_0(x, y_0, z_0)$ — произвольные гармонические функции переменных $y_k=\mu_k y$, $z_k=\lambda_k z$, $y_0=\mu_0 y$, $z_0=\lambda_0 z$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial y_k^2}+\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial z_k^2}=0\\ \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial y_0^2}+\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z_0^2}=0\end{gathered} \tag{1.3}$$

где $k=1, 2, 3$. Остальные обозначения общеприняты [2, 3]. Всякую функцию Φ_k, Φ_0 удовлетворяющую уравнениям (3) будем называть квазигармонической функцией относительно переменных x, y, z.

Отметим, что представление (1.1) имеет место, если между постоянными упругости существует связь, заключающаяся в выражении модулей сдвига G_{ij} через модули Юнга E_i, E_j и коэффициенты ν_{ij} Пуассона $G_{ij}={}^1/_2E_i[(E_i/E_j)^{1/2}+\nu_{ij}]^{-1}$ $(i, j=1, 2, 3;\ i\neq j)$.

Анализ решения кубического уравнения (1.2) и численные расчеты его корней для различных произвольно заданных значений постоянных упругости a_{ij} с учетом зависимостей модулей сдвига от модулей Юнга и коэффициентов Пуассона показали, что все корни уравнения (1.2) — вещественные числа, причем один корень кратный $x_1=x_2$ и равен a_{44}/a_{66} (третий корень находится по формуле Виета $x_3=M_3/M_0x_1^2$). Следовательно, параметры $\mu_1=\mu_2$ и λ_k $(k=1, 2)$, являющиеся составной частью аргументов функций Φ_1, Φ_2, также являются кратными. Учитывая это преобразуем формулы (1.1).

В силу произвольности функций Φ_1, Φ_2 положим (α_k — произвольные постоянные; $\lambda_2\neq\lambda_1$):

$$\begin{gathered}\Phi_1=\alpha_1\Phi(x, \mu_1y, \lambda_1z)-\alpha_3\Phi(x, \mu_1y, \lambda_1z)(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}\\ \Phi_2=\alpha_2\Phi(x, \mu_1y, \lambda_1z)+\alpha_3\Phi(x, \mu_1y, \lambda_2z)(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}\end{gathered} \tag{1.4}$$

Разложим функции $\Phi(x, \mu_1y, \lambda_2z)$, ξ_2, η_2 в ряд Тейлора в окрестности точки λ_1. С точностью до малых высшего порядка имеем

$$\begin{gathered}\Phi(x, \mu_1y, \lambda_2z)=\Phi(x, \mu_1y, \lambda_1z)+(z/\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)\partial\Phi(x, \mu_1y, \lambda_1z)/\partial z\\ \xi_2=\xi_1+(\lambda_2-\lambda_1)\partial\xi_1/\partial\lambda_1,\qquad \eta_2=\eta_1+(\lambda_2-\lambda_1)\partial\eta_1/\partial\lambda_1\end{gathered} \tag{1.5}$$

Рассмотрим сначала простейший случай, когда тело находится под действием только внешнего нормального давления. Пусть на некоторой части S_1 поверхности тела S $(z=0)$ задана плотность распределения сил давления $p(x, y)=-\sigma_z$; $\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ на S; $\sigma_z=0$ на $S_2=S\backslash S_1$.

В этом случае в (1.1) полагаем $\Phi_3=\Phi_0=0$. Осуществляя предельный переход в (1.1) с учетом (1.4), (1.5) для σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} при $\lambda_2\to\lambda_1$ и пренебрегая малыми величинами высшего порядка получим

$$\begin{gathered}\sigma_z=(\xi_1\alpha_1+\xi_1\alpha_2+\alpha_3\partial\xi_1/\partial\lambda_1)(\partial^2\Phi/\partial x^2+(\eta_1\alpha_1+\eta_1\alpha_2+\alpha_3\partial\eta_1/\partial\lambda_1)\times\\ \times(\xi_1\alpha_1+\xi_1\alpha_2+\alpha_3\partial\xi_1/\partial\lambda_1)^{-1}\partial^2\Phi/\partial y^2)+\alpha_3\lambda_1^{-1}z(\xi_1\partial^3\Phi/\partial z\partial x^2+\eta_1\partial^3\Phi/\partial z\partial y^2)\\ \tau_{xz}=-[\xi_1\alpha_1+\xi_1\alpha_2+\alpha_3(\xi_1/\lambda_1+\partial\xi_1/\partial\lambda_1)]\partial^2\Phi/\partial x\partial z-\\ -(z\alpha_3\xi_1/\lambda_1)\partial^3\Phi/\partial x\partial z^2\\ \tau_{yz}=-[\eta_1\alpha_1+\eta_1\alpha_2+\alpha_3(\eta_1/\lambda_1+\partial\eta_1/\partial\lambda_1)]\partial^2\Phi/\partial y\partial z-(z\alpha_3\eta_1/\lambda_1)\partial^3\Phi/\partial y\partial z^2\end{gathered} \tag{1.6}$$

Для получения выражения τ_{xz} запишем

$$\xi_1\Phi_1+\xi_2\Phi_2=\lim_{\lambda_2\to\lambda_1}\{\xi_1\alpha_1\Phi(x,\ \mu_1y,\ \lambda_1z)-\xi_1\alpha_3(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}\Phi(x,\ \mu_1y,\ \lambda_1z)+$$
$$+[\xi_1+(\lambda_2-\lambda_1)\partial\xi_1/\partial\lambda_1][\alpha_2\Phi(x,\ \mu_1y,\ \lambda_1z)+\alpha_3(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}(\Phi(x,\ \mu_1y,\ \lambda_1z)+$$
$$+(z/\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)\partial\Phi(x,\ \mu_1y,\ \lambda_1z)/\partial z)]\}=$$
$$=(\xi_1\alpha_1+\xi_1\alpha_2+\alpha_3\partial\xi_1/\partial\lambda_1)\Phi(x,\ \mu_1y,\ \lambda_1z)+(z\alpha_3\xi_1/\lambda_1)\partial\Phi(x,\ \mu_1y,\ \lambda_1z)/\partial z$$

Следовательно

$$\tau_{xz}=-\partial_2(\xi_1\Phi_1+\xi_2\Phi_2)/\partial x\partial z=(\xi_1\alpha_1+\xi_1\alpha_2+\alpha_3\partial\xi_1/\partial\lambda_1)\partial^2\Phi/\partial x\partial z-$$
$$-(\alpha_3\xi_1/\lambda_1)\partial^2(z\partial\Phi/\partial z)/\partial x\partial z=-[\xi_1\alpha_1+\xi_1\alpha_2+\alpha_3(\xi_1/\lambda_1+\partial\xi_1/\partial\lambda_1)]\partial^2\Phi/\partial x\partial z-$$
$$-(z\alpha_3\xi_1/\lambda_1)\partial^3\Phi/\partial x\partial z^2$$

Поскольку α_k — произвольные коэффициенты, то потребуем, чтобы в (1.6)

$$\eta_1\alpha_1+\eta_1\alpha_2+\alpha_3\partial\eta_1/\partial\lambda_1=\mu_1^{-2}(\xi_1\alpha_1+\xi_1\alpha_2+\alpha_3\partial\xi_1/\partial\lambda_1)\qquad(1.7)$$

Кроме того положим

$$\eta_1\alpha_1+\eta_1\alpha_2+\alpha_3(\eta_1/\lambda_1+\partial\eta_1/\partial\lambda_1)=0\qquad(1.8)$$
$$\xi_1\alpha_1+\xi_1\alpha_2+\alpha_3(\xi_1/\lambda_1+\partial\xi_1/\partial\lambda_1)=0$$

Для того чтобы система уравнений (1.7), (1.8) имела ненулевое решение необходимо, чтобы ее определитель равнялся нулю. Нетрудно убедиться, что это условие выполняется. Следовательно, среди соотношений (1.7), (1.8), независимыми уравнениями будут два, например, (1.8). Так как $\xi_1^{-1}\partial\xi_1/\partial\lambda_1=\eta_1^{-1}\partial\eta_1/\partial\lambda_1$ то из двух уравнений (1.8) независимым будет одно (например, последнее уравнение (1.8)). Полагая затем $\alpha_1=\alpha_2=(a_{11}+2a_{12})[2a_{11}(a_{11}-a_{12})]^{-1}$ из (1.8) получаем $\alpha_3=-2\xi_1\alpha_2(\xi_1/\lambda_1+\partial\xi_1/\partial\lambda_1)^{-1}$. Принимая теперь во внимание соотношения (1.7), (1.8) формулы (1.6) преобразуем к виду

$$\sigma_z=(\alpha_3z/\lambda_1)(\xi_1\partial^3\Phi/\partial z\partial x^2+\eta_1\partial^3\Phi/\partial z\partial y^2)+(\alpha_3\xi_1/\lambda_1^3)\partial^2\Phi/\partial z^2\qquad(1.9)$$
$$\tau_{xz}=-z(\alpha_3\xi_1/\lambda_1)\partial^3\Phi/\partial x\partial z^2,\qquad \tau_{yz}=-z(\alpha_3\eta_1/\lambda_1)\partial^3\Phi/\partial y\partial z^2$$

Отметим, что значение α_2 получено на основании формул (1.9) при предельном переходе к изотропному телу. Для изотропного тела $\xi_1=\eta_1=\lambda_1=\mu_1=1$, $\partial\xi_1/\partial\lambda_1=\partial\eta_1/\partial\lambda_1=-2(a_{11}+a_{12})/a_{11}$.

Преобразуя аналогичным образом другие из соотношений (1.1), находим

$$\sigma_x=(\alpha_3z/\lambda_1)(\partial^3\Phi/\partial z\partial y^2+\xi_1\partial^3\Phi/\partial z^3)+\alpha_3(2\xi_1/\lambda_1+\partial\xi_1/\partial\lambda_1)\partial^2\Phi/\partial z^2+$$
$$+2\alpha_2(\xi_1\partial^2\Phi/\partial z^2+\partial^2\Phi/\partial y^2)$$
$$\sigma_y=(\alpha_3z/\lambda_1)(\partial^3\Phi/\partial z\partial x^2+\eta_1\partial^3\Phi/\partial z^3)+\alpha_3(2\eta_1/\lambda_1+\partial\eta_1/\partial\lambda_1)\partial^2\Phi/\partial z^2+$$
$$+2\alpha_2(\eta_1\partial^2\Phi/\partial z^2+\partial^2\Phi/\partial x^2)$$
$$\tau_{xy}=-(z\alpha_3/\lambda_1)\partial^3\Phi/\partial x\partial y\partial z-2\alpha_2\partial^2\Phi/\partial x\partial y\qquad(1.10)$$
$$u=(z\alpha_3/\lambda_1)P_{11}\partial^2\Phi/\partial x\partial z+{}^1/_2[\alpha_3(a_{44}\partial\eta_1/\partial\lambda_1-a_{55}\partial\xi_1/\partial\lambda_1)+4\alpha_2P_{11}]\partial\Phi/\partial x$$
$$v=(z\alpha_3/\lambda_1)P_{12}\partial^2\Phi/\partial y\partial z+{}^1/_2[\alpha_3(a_{55}\partial\xi_1/\partial\lambda_1-a_{44}\partial\eta_1/\partial\lambda_1)+4\alpha_2P_{12}]\partial\Phi/\partial y$$
$$w={}^1/_2\{(\alpha_3/\lambda_1)[a_{66}-(1+(\lambda_1/\xi_1)\partial\xi_1/\partial\lambda_1)(a_{44}\eta_1+a_{55}\xi_1)]+4\alpha_2P_{13}\}\partial\Phi/\partial z+$$
$$+(z\alpha_3/\lambda_1)P_{13}\partial^2\Phi/\partial z^2$$
$$\partial\xi_1/\partial\lambda_1=a_{22}\lambda_1\Delta_1^{-2}[a_{66}\Delta_1-(a_{66}\lambda_1^2-a_{44})\Delta]$$
$$\partial\eta_1/\partial\lambda_1=(\eta_1/\xi_1)\partial\xi_1/\partial\lambda_1$$
$$\Delta=a_{22}(a_{11}\lambda_1^2-a_{13}-{}^1/_2a_{55})+$$
$$+a_{11}a_{22}\lambda_1^2-a_{12}(a_{12}\lambda_1^2+{}^1/_2a_{44})-a_{12}(a_{12}\lambda_1^2-a_{23})$$

Устремляя коэффициенты a_{ij} к соответствующим значениям для изотропного тела и введя обозначение $\partial\Phi/\partial z=\varphi(x,\ y,\ z)$ найдем, что выражения (1.9), (1.10) преобразуются в известные формулы [4] для изотропного полупространства. Таким образом, напряженно-деформированное состояние ортотропного полупространства при заданной на его границе статической нормальной нагрузке определяется по формулам (1.9), (1.10).

Положим теперь, что в области S_1 кроме нормальной нагрузки заданы касательные напряжения τ_{xz}, τ_{yz}. Согласно общим формулам (1.1), (1.9), (1.10) компоненты напряжений и перемещений определяются выражениями

$$\begin{aligned}
\sigma_x = (z\alpha_3/\lambda_1)\,[\partial^3(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial z\partial y^2+\xi_1\partial^3(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial z^3]+\\
+\alpha_3(2\xi_1/\lambda_1+\partial\xi_1/\partial\lambda_1)\partial^2(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial z^2+2\alpha_2\,[\xi_1\partial^2(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial z^2+\\
+\partial^2(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial y^2]+(\partial^2\Phi_3/\partial y^2+\xi_3\partial^2\Phi_3/\partial z^2)+n_2\partial^2\Phi_0/\partial x\partial y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y = (z\lambda_3/\lambda_1)\,[\partial^3(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial z\partial x^2+\eta_1\partial^3(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial z^3]+\\
+\alpha_3(2\eta_1/\lambda_1+\partial\eta_1/\partial\lambda_1)\partial^2(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial z^2+\\
+2\alpha_2[\eta_1\partial^2(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial z^2+\partial^2(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial x^2]+\\
+(\partial^2\Phi_3/\partial x^2+\eta_3\partial^2\Phi_3/\partial z^2)+n_2\partial^2\Phi_0/\partial x\partial y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z = (\alpha_3 z/\lambda_1)\,[\xi_1\partial^3(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial z\partial x^2+\eta_1\partial^3(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial z\partial y^2]+\\
+(\alpha_3\xi_1/\lambda_1^3)\partial^2(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial z^2+\\
+\xi_3\partial^2\Phi_3/\partial x^2+\eta_3\partial^2\Phi_3/\partial y^2+n_3\partial^2\Phi_0/\partial x\partial y
\end{aligned}$$

$$\tau_{xz}=-z(\alpha_3\xi_1/\lambda_1)\partial^3(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial x\partial z^2-\xi_3\partial^2\Phi_3/\partial x\partial z-n_6\partial^2\Phi_0/\partial y\partial z$$

$$\tau_{yz}=-z(\alpha_3\eta_1/\lambda_1)\partial^3(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial y\partial z^2-\eta_3\partial^2\Phi_3/\partial y\partial z+n_7\partial^2\Phi_0/\partial x\partial z$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy}=z(\alpha_3/\lambda_1)\partial^3(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial x\partial y\partial z-\\
-2\alpha_2\partial^2(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial x\partial y-\partial^2\Phi_3/\partial x\partial y+n_4\partial^2\Phi_0/\partial x^2-n_5\partial^2\Phi_0/\partial y^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u=z(\alpha_3/\lambda_1)P_{11}\partial^2(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial x\partial z+{}^1/_2\,[\alpha_3(a_{44}\partial\eta_1/\partial\lambda_1-a_{55}\partial\xi_1/\partial\lambda_1)+\\
+4\alpha_2P_{11}]\partial(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial x+P_{31}\partial\Phi_3/\partial x-a_{66}\partial\Phi_0/\partial y
\end{aligned}\tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}
v=z(\alpha_3/\lambda_1)P_{12}\partial^2(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial y\partial z+\\
+{}^1/_2[\alpha_3(a_{55}\partial\xi_1/\partial\lambda_1-a_{44}\partial\eta_1/\partial\lambda_1)+4\alpha_2P_{12}]\,\partial(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial y+\\
+P_{32}\partial\Phi_3/\partial y+n_8a_{66}\partial\Phi_0/\partial x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w={}^1/_2\{(\alpha_3/\lambda_1)\,[a_{66}-(1+(\lambda_1/\xi_1)\partial\xi_1/\partial\lambda_1)\times\\
\times(a_{44}\eta_1+a_{55}\xi_1)]+4\alpha_2P_{13}\}\partial(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial z+\\
+z(\alpha_3/\lambda_1)P_{13}\partial^2(\Phi+\varkappa\Phi_*)/\partial z^2+P_{33}\partial\Phi_3/\partial z
\end{aligned}$$

где $\varkappa$ — произвольная постоянная, $\Phi_*(x,\ \mu_1 y,\ \lambda_1 z)$ — квазигармоническая функция, подлежащая определению в процессе решения задачи.

Рассмотрим случай, когда безразмерные параметры μ_k и μ_0 удовлетворяют условию $\mu_1=\mu_3=\mu_0=\mu$.

Пусть в S_1: $\sigma_z=0$ (тогда $\Phi=0$), $\tau_{xz}=X(x,\ y)$, $\tau_{yz}=Y(x,\ y)$. Вне S_1 нагрузка отсутствует. Обозначим $\zeta=\lambda_k z$ ($k=0,\ 1,\ 3$). Тогда при $\zeta=0$ формулы для напряжений σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} преобразуем к виду

$$\alpha_3\xi_1\varkappa\lambda_1^{-1}\partial^2\Phi_*/\partial\zeta^2+\xi_3\partial^2\Phi_3/\partial x^2+\eta_3\partial^2\Phi_3/\partial y^2+n_3\partial^2\Phi_0/\partial x\partial y=0 \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\zeta}\,(\xi_3\lambda_3\partial\Phi_3/\partial x+n_6\lambda_0\partial\Phi_0/\partial y)=-X\\
\frac{\partial}{\partial\zeta}\,(\eta_3\lambda_3\partial\Phi_3/\partial y-n_7\lambda_0\partial\Phi_0/\partial x)=-Y
\end{aligned}\tag{1.13}$$

Решение граничных задач (1.13), как известно, имеет вид

$$\begin{aligned}
\xi_3\lambda_3\partial\Phi_3/\partial x+n_6\lambda_0\partial\Phi_0/\partial y=q_1(x,\ \mu y,\ \zeta)\\
\eta_3\lambda_3\partial\Phi_3/\partial y-n_7\lambda_0\partial\Phi_0/\partial x=q_2(x,\ \mu y,\ \zeta)
\end{aligned}\tag{1.14}$$

$$q_1=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_1}\frac{X(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta}{[(x-\alpha)^2+(\mu y-\beta)^2+\zeta^2]^{1/2}}$$

$$q_2=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_1}\frac{Y(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta}{[(x-\alpha)^2+(\mu y-\beta)^2+\zeta^2]^{1/2}}$$

Продифференцируем уравнения (1.14) соответственно по переменным x и y. Затем умножим полученные выражения на произвольные постоянные c_2, c_3 и сложим их с уравнением (1.12), умноженным на произвольную постоянную c_1. В итоге получим

$$\alpha_3\xi_1 c_1\varkappa\lambda_1^{-1}\partial^2\Phi_*/\partial\zeta^2+\xi_3(c_1+c_2\lambda_3)\partial^2\Phi_3/\partial x^2+$$
$$+\eta_3(c_1+c_3\mu\lambda_3)\partial^2\Phi_3/\partial y^2+(c_1n_3+c_2n_6\lambda_0-c_3n_7\lambda_0\mu)\partial^2\Phi_0/\partial x\partial y=c_2J_1+c_3J_2 \quad (1.15)$$

$$J_1=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_1}\frac{(x-\alpha)X(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta}{[(x-\alpha)^2+(\mu y-\beta)^2]^{3/2}}$$

$$J_2=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_1}\frac{(\mu y-\beta)Y(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta}{[(x-\alpha)^2+(\mu y-\beta)^2]^{3/2}}$$

Положим в (1.15)

$$\xi_3(c_1+c_2\lambda_3)=1,\qquad \eta_3(c_1+c_3\mu\lambda_3)=\mu^{-2} \quad (1.16)$$
$$c_1n_3+c_2n_6\lambda_0-c_3n_7\lambda_0\mu=0,\qquad \varkappa=\lambda_1/\alpha_3\xi_1c_1$$

С учетом (1.16) из уравнения (1.15) получаем граничную задачу для определения разности функций $\Phi_*-\Phi_3$:

$$\partial^2(\Phi_*-\Phi_3)/\partial\zeta^2=f_1(x,\ \mu y),\qquad f_1(x,\ \mu y)=c_2J_1+c_3J_2 \quad (1.17)$$

Решение задачи (1.17) запишем в виде

$$\Phi_*-\Phi_3=q_3(x,\ \mu y,\ \zeta) \quad (1.18)$$

$$q_3=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_1}\frac{f_2(\sigma,t)\,d\sigma\,dt}{[(x-\sigma)^2+(\mu y-t)^2+\zeta^2]^{1/2}}$$

$$f_2=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_1}\frac{f_1(\delta,\omega)\,d\delta\,d\omega}{[(\sigma-\delta)^2+(t-\omega)^2]^{1/2}}$$

Постоянные c_1, c_2, c_3 определяются из системы уравнений (1.16).

Выразим слагаемое $\partial^2\Phi_*/\partial\zeta^2$ из уравнения (1.17) и подставим его выражение в (1.12). Поскольку $\partial^2\Phi_3/\partial\zeta^2=-\partial^2\Phi_3/\partial x^2-\mu^{-2}\partial^2\Phi_3/\partial y^2$, то уравнение (1.12) преобразуем к виду

$$(c_1^{-1}-\xi_3)\partial^2\Phi_3/\partial x^2+(c_1^{-1}\mu^{-2}-\eta_3)\partial^2\Phi_3/\partial y^2-$$
$$-n_3\partial^2\Phi_0/\partial x\partial y=c_2c_1^{-1}J_1+c_3c_1^{-1}J_2 \quad (1.19)$$

Аналогично тому, как было получено уравнение (1.15) на основании (1.14) и (1.19) получим дифференциальное уравнение относительно искомой функции $\Phi_3(x,\ \mu y,\ \lambda_3 z)$ (s_1, s_2, s_3 — произвольные коэффициенты):

$$[s_1(c_1^{-1}-\xi_3)+s_2\xi_3\lambda_3]\partial^2\Phi_3/\partial x^2+$$
$$+[s_1(c_1^{-1}\mu^{-2}-\eta_3)+s_3\mu\eta_3\lambda_3]\partial^2\Phi_3/\partial y^2+(s_2n_6\lambda_0-s_1n_3-s_3n_7\lambda_0\mu)\times$$
$$\times\partial^2\Phi_0/\partial x\partial y=(s_1c_2c_1^{-1}-s_2)J_1+(c_3s_1c_1^{-1}+s_3)J_2 \quad (1.20)$$

Пусть

$$s_1(c_1^{-1}-\xi_3)+s_2\xi_3\lambda_3=1 \quad (1.21)$$
$$s_1(c_1^{-1}\mu^{-2}-\eta_3)+s_3\mu\eta_3\lambda_3=\mu^{-2}$$
$$s_2n_6\lambda_0-s_1n_3-s_3n_7\lambda_0\mu=0$$

Тогда из (1.20) с учетом (1.21) имеем

$$\partial^2\Phi_3/\partial\zeta^2=f_3(x,\ \mu y) \tag{1.22}$$

$$f_3(x,\ \mu y)=-(s_1c_2c_1^{-1}+s_2)J_1-(s_1c_3c_1^{-1}+s_3)J_2$$

Решение задачи (1.22) имеет вид

$$\Phi_3=q_4(x,\ \mu y,\ \zeta)$$

$$q_4=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_1}\frac{f_4(\sigma,t)\,d\sigma\,dt}{[(x-\sigma)^2+(\mu y-t)^2+\zeta^2]^{1/2}}$$

$$f_4=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_1}\frac{f_3(\delta,\omega)\,d\delta\,d\omega}{[(\sigma-\delta)^2+(t-\omega)^2]^{1/2}}$$

Коэффициенты s_1, s_2, s_3 находятся из уравнений (1.21).

Считая, что функция $\Phi_3(x,\ \mu y,\ \lambda_3 z)$ найдена, для определения $\Phi_0(x,\ \mu y,\ \lambda_0 z)$ поступим следующим образом. Продифференцируем уравнения (1.14) соответственно по y и x:

$$n_6\lambda_0\mu\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial y^2}=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_1}\frac{(\mu y-\beta)X(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta}{[(x-\alpha)^2+(\mu y-\beta)^2]^{3/2}}-\xi_3\lambda_3\mu\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x\partial y} \tag{1.23}$$

$$n_7\lambda_0\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_1}\frac{(x-\alpha)Y(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta}{[(x-\alpha)^2+(\mu y-\beta)^2]^{3/2}}+\eta_3\lambda_3\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x\partial y} \tag{1.24}$$

Уравнение (1.23) умножим на произвольную постоянную c_4 и сложим его с (1.24). Требуя, чтобы в полученном уравнении $c_4=n_7/n_6\mu^3$, при $\zeta=0$ получим граничную задачу для определения функции Φ_0:

$$\partial^2\Phi_0/\partial\zeta^2=-f_5(x,\ \mu y) \tag{1.25}$$

$$f_5(x,\mu y)=\frac{1}{n_7\lambda_0}\left(\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_1}\frac{(x-\alpha)Y(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta}{[(x-\alpha)^2+(\mu y-\beta)^2]^{3/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{c_4}{2\pi}\iint\limits_{S_1}\frac{(\mu y-\beta)X(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta}{[(x-\alpha)^2+(\mu y-\beta)^2]^{3/2}}+\lambda_3(\eta_3-c_4\xi_3\mu)\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x\partial y}\right)$$

Из (1.25) находим искомую функцию

$$\Phi_0(x,\ \mu y,\ \zeta)=q_5(x,\ \mu y,\ \zeta)$$

$$q_5=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_1}\frac{f_6(\sigma,t)\,d\sigma\,dt}{[(x-\sigma)^2+(\mu y-t)^2+\zeta^2]^{1/2}}$$

$$f_6(\sigma,t)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_1}\frac{f_5(\delta,\omega)\,d\delta\,d\omega}{[(\sigma-\delta)^2+(t-\omega)^2]^{1/2}}$$

Таким образом, напряженно-деформированное состояние ортотропного полупространства при заданной нормальной и касательной нагрузке определяется по формулам (1.11) через четыре квазигармонические функции $\Phi(x,\ \mu y,\ \lambda_1 z)$, $\Phi_*(x,\ \mu y,\ \lambda_1 z)$, $\Phi_3(x,\ \mu y,\ \lambda_3 z)$, $\Phi_0(x,\ \mu y,\ \lambda_0 z)$, метод определения которых изложен выше.

2. В качестве примера рассмотрим решение первой основной задачи для ортотропного полупространства, считая, что $\sigma_z=-p(x,\ y)$, $\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ (в S_1) $\sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ (в $S_2=S\backslash S_1$).

При $z=0$ из (1.9) имеем

$$p(x,\ y)=-\alpha_3\xi_1\lambda_1^{-1}\partial\varphi(x,\ y_1)/\partial z_1$$

$$\varphi(x,\ y_1,\ z_1)=\partial\Phi(x,\ y_1,\ z_1)/\partial z_1$$

$$y_1=\mu_1 y,\qquad z_1=\lambda_1 z$$

Для определения функции φ имеем следующий случай задачи Неймана

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\begin{cases}-\lambda_1\alpha_3^{-1}\xi_1^{-1}p(x,y) & (\text{в } S_1)\\ 0 & (\text{вне } S_1)\end{cases} \tag{2.1}$$

Из теории потенциала известно, что решение задачи (2.1) может быть представлено в виде потенциала простого слоя

$$\varphi(x,y_1,z_1)=\frac{\lambda_1}{2\pi\xi_1\alpha_3}\iint\limits_{S_1}\frac{p(\theta_1,\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2}{[(x-\theta_1)^2+(y_1-\theta_2)^2+z_1^2]^{1/2}} \tag{2.2}$$

Учитывая связь между w и φ, выражение для перемещения w, имеющего место на границе полупространства, запишем в виде

$$w=\lambda_1(4\pi\alpha_3\xi_1)^{-1}\{(\alpha_3/\lambda_1)[a_{66}-(1+(\lambda_1/\xi_1)\partial\xi_1/\partial\lambda_1)(a_{44}\eta_1+a_{55}\xi_1)]+4\alpha_2P_{13}\}\times$$
$$\times\iint\limits_{S_1}\frac{p(\theta_1,\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2}{[(x-\theta_1)^2+(y_1-\theta_2)^2]^{1/2}} \tag{2.3}$$

Переходя в (2.3) к изотропному телу, получим хорошо известный результат

$$w=\frac{1-\nu^2}{\pi E}\iint\limits_{S_1}\frac{p(\theta_1,\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2}{[(x-\theta_1)^2+(y-\theta_2)^2]^{1/2}}$$

Выражение (2.3) является также интегральным уравнением для определения контактных усилий между штампом и ортотропным полупространством при отсутствии сил трения.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть на ортотропное полупространство по области S_1, представляющей прямоугольник, ограниченный прямыми $x=\pm a$, $y=\pm b$, действует равномерно распределенная нормальная нагрузка интенсивности $p=\text{const}$. Вне S_1 $\sigma_z=0$. В S $\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$. Воспользовавшись формулой (2.3) приведем выражение для осадки $w(x, y)$:

$$w(x,y)=\lambda_1p(4\pi\xi_1\alpha_3)^{-1}\{(\alpha_3/\lambda_1)[a_{66}-(1+$$
$$+(\lambda_1/\xi_1)\partial\xi_1/\partial\lambda_1)(a_{44}\eta_1+a_{55}\xi_1)]+4\alpha_2P_{13}\}\times$$
$$\times[\mu_1(y-b)A-\mu_1(y+b)B+(x-a)C-(x+a)D]$$

$$A\equiv\ln(\{x-a+[(x-a)^2+\mu_1^2(y-b)^2]^{1/2}\}\{x+a+[(x+a)^2+\mu_1^2(y-b)^2]^{1/2}\}^{-1})$$
$$B\equiv\ln(\{x-a+[(x-a)^2+\mu_1^2(y-b)^2]^{1/2}\}\{x+a+[(x+a)^2+\mu_1^2(y+b)^2]^{1/2}\}^{-1})$$
$$C\equiv\ln(\{\mu_1(y-b)+[(x-a)^2+\mu_1^2(y-b)^2]^{1/2}\}\times$$
$$\times\{\mu_1(y+b)+[(x-a)^2+\mu_1^2(y+b)^2]^{1/2}\}^{-1})$$
$$D\equiv\ln(\{\mu_1(y-b)+[(x+a)^2+\mu_1^2(y-b)^2]^{1/2}\times$$
$$\times\{\mu_1(y+b)+[(x+a)^2+\mu_1^2(y+b)^2]^{1/2}\}^{-1})$$

При численном расчете перемещения по вышеприведенной формуле в некоторых слагаемых необходимо раскрыть неопределенность аргументов логарифмической функции.

Авторы выражают благодарность профессору Н. Ф. Морозову, ценные замечания которого способствовали улучшению содержания статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прусов И. А., Василевич Ю. В.* Об одном варианте представления общих формул теории упругости ортотропного тела. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1. 1981. № 3. С. 39–45.
2. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука. 1977. 416 с.
3. *Прусов И. А.* Метод сопряжения в теории плит. Минск. Изд-во БГУ. 1975. 256 с.
4. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Изд-во техн.-теор. лит-ры. 1953. 264 с.

Минск

Поступила в редакцию
3.XII.1987