УДК 534.1

НГУЕН ТИЕН КХИЕМ

СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В САМОВОЗБУЖДАЮЩИХСЯ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Методом уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова исследуются случайные колебания в самовозбуждающихся системах с запаздыванием. Системы с запаздыванием обычно описываются дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом или дифференциально-функциональными уравнениями [1–3]. Для исследования колебаний квазилинейных систем с запаздыванием применимы асимптотические методы, разработанные в [1]. Задача о колебаниях систем с запаздыванием при случайных воздействиях представляет интерес как в теоретическом, так и в прикладном плане. Однако эта задача рассматривалась лишь в частных случаях [4, 5].

Уравнение с запаздыванием

$$z^{\cdot\cdot}(t)\,\omega^2 z(t)=\varepsilon f[t, z(t), z^{\cdot}(t), z(t-\Delta), z^{\cdot}(t-\Delta)]+$$

$$+\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=1}^{2} g_i[t, z(t), z^{\cdot}(t), z(t-\Delta), z^{\cdot}(t-\Delta)]\,\xi_i(t) \tag{1}$$

может быть переписано в виде

$$z^{\cdot\cdot}(t)+\omega^2 z(t)=\varepsilon f\left[t, z(t), z^{\cdot}(t), \int_0^t \varphi_1(t, s, z(s))\,ds, \int_0^t \varphi_2(t, s, z^{\cdot}(s))\,ds\right]+$$

$$+\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=1}^{2} g_i\left[t, z(t), z^{\cdot}(t), \int_0^t \psi_1(t, s, z(s))\,ds, \int_0^t \psi_2(t, s, z^{\cdot}(s))\,ds\right]\xi_i(t) \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1(t, s, z(s))&=\psi_1(t, s, z(s))=\delta(t-\Delta-s)\,z(s)\\ \varphi_2(t, s, z^{\cdot}(s))&=\psi_2(t, s, z^{\cdot}(s))=\delta(t-\Delta-s)\,z^{\cdot}(s)\end{aligned} \tag{3}$$

Согласно [6], если $\{x_i(t)\}$ $(i=1,\ldots,n)$ – многомерный случайный процесс, определяемый уравнениями

$$x_i^{\cdot}(t)=\varepsilon A_i\left[t, x(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s))\,ds\right]+$$

$$+\sqrt{\varepsilon}\sum_{j=1}^{n} B_{ij}\left[t, x(t)\int_0^t \psi(t, s, x(s))\,ds\right]\xi_j(t) \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{4}$$

где $\varphi=\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$, $\psi=\{\psi_1,\ldots,\psi_n\}$ и $\xi_j(t)$ – такие случайные процессы, что $\langle\xi_j(t)\rangle=0$, $\langle\xi_i(t)\,\xi_j(t+\tau)\rangle=R_{ij}(\tau)$, то функция плотности вероятностей данного процесса удовлетворяет приближенному уравнению

$$\frac{\partial P(t,x)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\{k_i(x,t)P\}+\frac{1}{2}\sum_{i;j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\{D_{ij}(x,t)P\}$$

где коэффициенты $k_i(x, t), D_{ij}(x, t)$ вычисляются по формулам

$$k_i(x,t)=\varepsilon A_i^{\circ}(x,t)+\varepsilon\sum_{j,k}\left\{\frac{\partial B_{ij}^{\circ}(x,t)}{\partial x_k}B_{kj}^{-}(x,t)-\frac{\partial B_{ij}^{\circ}(x,t)}{\partial\psi_k^{\circ}}B_{kj}^{+}(x,t)\right\}$$

$$D_{ij}(x,t)=2\varepsilon\sum_{k,l}B_{ik}^{-}(x,t)B_{jl}^{-}(x,t),\quad B_{ij}^{-}(x,t)=\sum_{m=1}^{n}\int_0^{\infty}B_{im}^{\circ}(x,t-s)R_{jm}(s)\,ds \tag{5}$$

$$B_{ij}^{+}(x;t)=\sum_{m,k=1}^{n}\int_0^{\infty}\frac{\partial\psi_i^{\circ}(x,t-s)}{\partial x_k}B_{km}^{\circ}(x,t-s)R_{jm}(s)\,ds$$

$$A_i^\circ(x,t)=A_i(t,x,\varphi^\circ(x,t)),\quad B_{ij}^\circ(x,t)=B_{ij}(t,x,\psi^\circ(x,t))$$

$$\varphi^\circ(x,t)=\int_0^\infty \varphi(t,s,x)\,ds,\qquad \psi^\circ(x,t)=\int_0^\infty \psi(t,s,x)\,ds$$

Уравнение (2), как известно, с помощью замены переменных

$$z(t)=a(t)\cos\Phi(t),\quad z^\bullet(t)=-\omega a(t)\sin\Phi(t),\quad \Phi(t)=\omega t+\theta(t) \tag{6}$$

приводится к уравнениям вида (4), где $n=2$, $x_1=a(t)$, $x_2=\theta(t)$.

Таким образом, для функции плотности вероятностей процесса $\{a(t),\ \theta(t)\}$ получаем уравнение

$$\frac{\partial P(a,\theta,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial a}\{k_aP\}-\frac{\partial}{\partial\theta}\{k_\theta P\}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\{D_aP\}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\{D_\theta P\}+\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial\theta}\{D_{a\theta}P\} \tag{7}$$

$$k_a(a,\theta,t)=\varepsilon A_1^\circ(a,\theta,t)+\varepsilon\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial B_{1j}^\circ}{\partial a}B_{1j}^-+\frac{\partial B_{1j}^\circ}{\partial\theta}B_{2j}^-\right)-\varepsilon\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial B_{1j}^\circ}{\partial\psi_i^\circ}B_{ij}^+$$

$$k_\theta(a,\theta,t)=\varepsilon A_2^\circ(a,\theta,t)+\varepsilon\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial B_{2j}^\circ}{\partial a}B_{1j}^-+\frac{\partial B_{2j}^\circ}{\partial\theta}B_{2j}^-\right)-\varepsilon\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial B_{2j}^\circ}{\partial\psi_i^\circ}B_{ij}^+ \tag{8}$$

$$D_a(a,\theta,t)=2\varepsilon\sum_{j=1}^{2}B_{1j}^\circ B_{1j}^-,\qquad D_\theta(a,\theta,t)=2\varepsilon\sum_{j=1}^{2}B_{2j}^\circ B_{2j}^-$$

$$D_{a\theta}(a,\theta,t)=\varepsilon\sum_{j=1}^{2}(B_{1j}^\circ B_{2j}^-+B_{2j}^\circ B_{1j}^-).$$

$$\begin{gathered}A_1^\circ(a,\theta,t)=-\omega^{-1}F^\circ(a,\theta,t)\sin\Phi;\quad A_2^\circ(a,\theta,t)=-(a\omega)^{-1}F^\circ(a,\theta,t)\cos\Phi\\ B_{11}^\circ(a,\theta,t)=-\omega^{-1}G_1^\circ(a,\theta,t)\sin\Phi,\quad B_{12}^\circ(a,\theta,t)=-\omega^{-1}G_2^\circ(a,\theta,t)\sin\Phi\\ B_{21}^\circ(a,\theta,t)=-(a\omega)^{-1}G_1^\circ(a,\theta,t)\cos\Phi,\quad B_{22}^\circ(a,\theta,t)=-(a\omega)^{-1}G_2^\circ(a,\theta,t)\cos\Phi\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}F^\circ(a,\theta,t)=f[t,\ a\cos\Phi;\ -\omega a\sin\Phi,\ \varphi_1^\circ(a,\theta,t),\ \varphi_2^\circ(a,\theta,t)]\\ G_i^\circ(a,\theta,t)=g_i[t,\ a\cos\Phi,\ -\omega a\sin\Phi,\ \psi_1^\circ(a,\theta,t),\ \psi_2^\circ(a,\theta,t)]\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\varphi_i^\circ(a,\theta,t)=\int_0^\infty \varphi_i(t,s,a\cos(\omega s+\theta),-\omega a\sin(\omega s+\theta))\,ds\\ \psi_i^\circ(a,\theta,t)=\int_0^\infty \psi_i(t,s,a\cos(\omega s+\theta),-\omega a\sin(\omega s+\theta))\,ds\end{gathered} \tag{11}$$

В (8) функции B_{ij}^-, B_{ij}^+ определяются равенства (5), (9).

Рассматривая уравнение (1), где функция φ_i, ψ_i имеют вид (3), можно вычислить интегралы (11):

$$\varphi_1^\circ=\psi_1^\circ=a\cos(\Phi-\omega\Delta),\quad \varphi_2^\circ=\psi_2^\circ=-\omega a\sin(\Phi-\omega\Delta)$$

Следовательно, вместо (10) будем иметь

$$\begin{gathered}F^\circ=f[t,\ a\cos\Phi,\ -\omega a\sin\Phi,\ a\cos(\Phi-\omega\Delta),\ -\omega a\sin(\Phi-\omega\Delta)]\\ G_i^\circ=g_i[t,\ a\cos\Phi,\ -\omega a\sin\Phi,\ a\cos(\Phi-\omega\Delta),\ -\omega a\sin(\Phi-\omega\Delta)]\end{gathered} \tag{12}$$

Итак решение уравнения (1) имеет вид (6) со случайными процессами $a(t)$, $\theta(t)$, совместная плотность вероятностей которых определяется из уравнения (7) вместе с (5), (8), (9), (12). Видно, что описанная выше процедура согласуется с разработанным в [1] методом усреднения для уравнения с запаздыванием в детерминированном случае.

Изложенным выше методом рассмотрим колебания системы [1]:

$$z^{\cdot\cdot}(t)+\omega^2 z(t)=-\varepsilon\lambda z^{\cdot}(t)+\varepsilon\alpha[1-z^2(t-\Delta)]z^{\cdot}(t-\Delta)+\sqrt{\varepsilon}\xi(t)$$

Это уравнение имеет вид (1), где $g_1=1$, $g_2=0$, $f=-\lambda z^{\cdot}(t)+\alpha[1-z^2(t-\Delta)]z^{\cdot}(t-\Delta)$. В случае отсутствия случайного воздействия $\xi(t)$ имеют место следующие результаты:

1. При условии $\delta=\lambda-\alpha\cos\omega\Delta\geqslant 0$ существует только стационарное колебание с амплитудой $a=0$, т. е. положение равновесия. Будем называть систему в этом случае невозбуждаемой.

2. Если $\delta<0$, то существует и устойчиво колебание с конечной амплитудой $a_1=2[1-\lambda(\alpha\cos\omega\Delta)^{-1}]^{1/2}$. Систему в этом случае назовем самовозбуждающейся. Так условие самовозбуждения, как известно [1], имеет вид $\delta=\lambda-\alpha\cos\omega\Delta<0$. Отметим, что при $\lambda=0$ амплитуда колебания как известно, будет равна 2. При действии случайных возмущений имеем

$$F^\circ=-\alpha[1-a^2\cos^2(\Phi-\omega\Delta)]a\omega\sin(\Phi-\omega\Delta)+\lambda a\omega\sin\Phi$$

$$B_{11}^\circ=-\omega^{-1}\sin\Phi,\ B_{12}^\circ=B_{22}^\circ=0,\ B_{21}^\circ=-(a\omega)^{-1}\cos\Phi$$

$$B_{11}^-=-\omega^{-1}[R_c\sin\Phi-R_s\cos\Phi],\ B_{21}^\circ=-(a\omega)^{-1}[R_c\cos\Phi+R_s\sin\Phi]$$

$$R_c=\int_0^\infty R_\xi(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau,\qquad R_s=\int_0^\infty R_\xi(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau$$

С учетом этих выражений усредненные коэффициенты (8) уравнения (7) примут вид

$$k_a^*=-{}^1/_2\varepsilon a[1-\alpha(1-{}^1/_4a^2)\cos\omega\Delta]+\varepsilon R_c/2a\omega^2$$

$$k_\theta^*=-{}^1/_2\varepsilon\alpha(1-{}^1/_4a^2)\sin\omega\Delta-\varepsilon R_s/2a^2\omega^2$$

$$D_a^*=\varepsilon R_c/\omega^2,\ D_\theta^*=\varepsilon R_c/a^2\omega^2,\ D_{a\theta}^*=0$$

Тогда указанное уравнение допускает стационарное решение

$$P(a)=Ca\exp\{-{}^1/_2\omega^2a^2R_c^{-1}[\lambda-\alpha(1-{}^1/_4a^2)\cos\omega\Delta]\}$$

Постоянная нормировки C определяется лишь при условии $\mu=\alpha\cos\omega\Delta>0$. Это есть и условие существования стационарных колебаний.

Амплитуда наиболее вероятностного стационарного колебания находится из уравнения

$$-\mu a^4-4\delta a^2+4\varkappa=0$$

$$\mu=\alpha\cos\omega\Delta,\ \delta=\lambda-\alpha\cos\omega\Delta,\ \varkappa=R_c\omega^{-2}.$$

Видно, что это уравнение не имеет нулевого решения, т. е. под действием случайных возмущений система всегда возбуждается. При этом амплитуда колебания равна $a_*=[2(\delta^2+\mu\varkappa)^{1/2}/\mu-\delta]^{1/2}$. Рассматривая правую часть приведенного выражения как функцию от $\delta(\mu=\lambda-\delta)$, вычисляя производную от этой функции по δ, получим, что если $\varkappa=4\lambda$, то $a_*=2$. Это означает, что амплитуда колебания равна амплитуде колебания самовозбуждающейся системы без запаздывания. Так что вязкое демпфирование и случайное внешнее воздействие друг друга компенсируют и получается в результате, что они не будут влиять на колебания. При $\varkappa>4\lambda$ амплитуда колебания монотонно возрастает с ростом δ. Тогда амплитуда колебания самовозбуждающейся системы будет меньше амплитуды колебания невозбуждаемой системы. В случае $\varkappa<4\lambda$ поскольку a_* монотонно убывает с возрастанием δ, амплитуда невозбуждаемой системы будет меньше.

Сделанные выводы могут быть использованы для обеспечения нужного режима колебания системы с запаздыванием путем выбора коэффициента демпфирования по отношению к интенсивности внешних случайных воздействий.

Исследуем, наконец, колебания самовозбуждающейся системы с запаздыванием при случайном параметрическом воздействии.

Уравнение движения такой системы имеет вид

$$z^{\cdot\cdot}(t)+\omega^2[1-\eta(t)]z(t)=\varepsilon\alpha[1-z^2(t-\Delta)]z^{\cdot}(t-\Delta)-\varepsilon\lambda z^{\cdot}(t)$$

Тогда $g_1=\omega^2 z(t)$, $g_2=0$, $f=\alpha[1-z^2(t-\Delta)]z^{\cdot}(t-\Delta)-\lambda z^{\cdot}(t)$. Следовательно

$$F^\circ=-\alpha[1-a^2\cos^2(\Phi-\omega\Delta)]a\omega\sin(\Phi-\omega\Delta)+\lambda a\omega\sin\Phi$$

$$B_{11}^\circ=-a\omega^{-1}\sin\Phi\cos\Phi,\ B_{21}^\circ=-\omega^{-1}\cos^2\Phi,\ B_{12}^\circ=B_{22}^\circ=0$$

$$B_{11}^-=\int_0^\infty B_{11}^\circ(a,\theta,t-s)R_\eta(s)\,ds=-{}^1/_2\omega^{-1}a[R_c(2\omega)\sin2\Phi-R_s(2\omega)\cos2\Phi]$$

$$B_{21}^-=\int_0^\infty B_{21}^\circ(a,\theta,t-s)R_\eta(s)\,ds=-{}^1/_2\omega^{-1}[R_c(0)+R_c(2\omega)\cos\Phi-R_s(2\omega)\sin2\Phi]$$

$$R_c(\omega)=\int_0^\infty R_\eta(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau,\qquad R_s(\omega)=\int_0^\infty R_\eta(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau$$

Усредненные коэффициенты сноса и диффузии амплитуды после громоздких вычислений примут вид

$$k_a^*=-{}^1\!/_2\varepsilon a[\lambda-\alpha(1-{}^1\!/_4a^2)\cos\omega\Delta]+{}^3\!/_8\varepsilon a\omega^2R_c(2\omega)$$

$$D_a^*={}^1\!/_4\varepsilon a^2\omega^2R_c(2\omega)$$

Стационарное решение уравнения (7) в данном случае находится в виде $P(a)=Ca^{D(\omega)}\exp\{-\mu[\omega^2R_c(2\omega)]^{-1}a^2\}$, $D(\omega)=1-4\delta[\omega^2R_c(2\omega)]^{-1}$ которое имеет место только при условии $\mu>0$, $\gamma=2\delta/[\omega^2R_c(2\omega)]<1$.

Однако, в противном случае, когда $\gamma\geqslant1$ как показано в [7], правая часть (13) вырождается в дельта-функцию Дирака, что свидетельствует об устойчивости положения равновесия $a=0$.

Рассмотрим стационарные колебания. Нетрудно убедиться в том, что функция (13) может достигать своего максимума в одном из следующих положений:

$$a_*=0,\ \mu<\lambda-\omega^2R_c(2\omega)/4$$

$$\{{}^1\!/_4[\omega^2R_c(2\omega)-4\delta]\}^{1/2},\ \mu>\lambda-\omega^2R_c(2\omega)/4$$

Таким образом, в случае действия параметрического возмущения система возбуждается лишь при выполнении последнего из этих неравенств. Это и представляет условие возбуждения рассматриваемой системы. Очевидно, что параметрическое возмущение повышает степень возбуждаемости системы.

Рассматривая зависимость амплитуды от величины δ, получаем такие же выводы, как и выше. Разница состоит лишь в том, что вместо $\varkappa$ следует подставить $\varkappa^*=\omega^2R_c(2\omega)/4$.

В заключение отметим, что изложенный выше метод может быть использован для исследования более сложных систем с запаздыванием при случайных воздействиях.

Автор признателен В. П. Рубанику за поддержку, полезные указания и обсуждения результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рубаник В. П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 287 с.
2. *Эльгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1964. 127 с.
3. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
4. *Митропольский Ю. А., Нгуен Донг Ань.* Случайные колебания в квазилинейных системах стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием // Укр. мат. ж. 1986. Т. 38. № 2. С. 181–187.
5. *Рубаник В. П.* Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием. Минск: Изд-во Университетское, 1985. 143 с.
6. *Нгуен Тиен Кхием.* О функции плотности вероятностей процессов, определяемых интегро-дифференциальными уравнениями // Укр. мат. ж. 1983. Т. 35. № 2. С. 227–234.
7. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.

Ханой

Поступила в редакцию
29.V.1987