МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1989

УДК 531.55 : 521.2

К. Б. АЛЕКСЕЕВ, Н. В. НИКОЛАЕВ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ АППАРАТА В ПОЛЕТЕ

Управление поворотными маневрами аппарата предполагает знание его тензора инерции, для определения которого предлагается расчетно-экспериментальный способ, основанный на измерении угловой скорости аппарата и гашения этой скорости с помощью газореактивных двигателей. В отличие от известных [1, 2], данный способ не требует равенства нулю начального кинетического момента аппарата.

1. Введем две системы координат с общим началом в центре масс аппарата — инерциальную $OX_1X_2X_3$ и жестко связанную с телом $Ox_1x_2x_3$. Взаимное расположение этих систем координат будем определять матрицей направляющих косинусов $A(t)$, причем в момент начала отсчета времени эта матрица является единичной, то есть $A(0)=\mathrm{diag}$ [1].

Уравнения движения в системе $Ox_1x_2x_3$ имеют вид

$$Id\boldsymbol{\omega}/dt+\boldsymbol{\omega}\times I\boldsymbol{\omega}=\mathbf{M} \tag{1.1}$$

$$dA/dt=S(\boldsymbol{\omega})A \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость аппарата, I — искомый тензор инерции, $\mathbf{M}$ — внешний управляющий момент, а матрица $S(\boldsymbol{\omega})$ имеет вид:

$$S(\boldsymbol{\omega})=\begin{Vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Будем предполагать, что измерение угловой скорости и интегрирование уравнений (1.2) выполняются без погрешностей, а влияние внешних возмущений на вращательные движения аппарата пренебрежимо мало.

2. При $\mathbf{M}=0$ аппарат совершает свободное движение по инерции вокруг центра масс. Исключая из рассмотрения случаи вращения аппарата вокруг одной из главных осей инерции, а также частное движение по сепаратрисам задачи Эйлера — Пуансо [3], получаем, что на любом конечном интервале $[0, T]$ существуют три момента времени t_1, t_2, t_3, для которых выполнены соотношения:

$$\det\|\boldsymbol{\omega}(t_1), \boldsymbol{\omega}(t_2), \boldsymbol{\omega}(t_3)\|\neq 0, \quad \det\|\boldsymbol{\omega}^*(t_1), \boldsymbol{\omega}^*(t_2), \boldsymbol{\omega}^*(t_3)\|\neq 0$$

где $\boldsymbol{\omega}^*(t)=A(t)\boldsymbol{\omega}(t)$ — вектор угловой скорости аппарата в инерциальной системе координат, а компоненты матрицы $A(t)$ определяются интегрированием уравнений (1.2).

В соответствии с геометрической интерпретацией свободного движения твердого тела вокруг центра масс [4], концы векторов $\boldsymbol{\omega}^*(t_s)$, $s=1, 2, 3$ располагаются на неподвижной в инерциальном пространстве плоскости, причем неизменный в системе координат $OX_1X_2X_3$ вектор кинетического момента перпендикулярен этой плоскости. Данное свойство свободного движения твердого тела позволяет найти единичный орт $\mathbf{i}$ вектора кинетического момента по формуле:

$$\mathbf{i}=\frac{(\boldsymbol{\omega}^*(t_3)-\boldsymbol{\omega}^*(t_1))\times(\boldsymbol{\omega}^*(t_2)-\boldsymbol{\omega}^*(t_1))}{|(\boldsymbol{\omega}^*(t_3)-\boldsymbol{\omega}^*(t_1))\times(\boldsymbol{\omega}^*(t_2)-\boldsymbol{\omega}^*(t_1))|}$$

причем направление вектора $\mathbf{i}$ определяется условием $(\mathbf{i}, \boldsymbol{\omega}^*(t))>0$.

Орт вектора кинетического момента в связанной системе координат $Ox_1x_2x_3$ в момент времени t_s, $s=1, 2, 3$ равен $\mathbf{e}(t_s)=A^T(t_s)\mathbf{i}$, что позволяет представить выражение для кинетического момента аппарата в виде $I\boldsymbol{\omega}(t_s)=h\mathbf{e}(t_s)$, где h — модуль вектора кинетического момента. Переходя к матричной форме записи, имеем

$$IW=hV$$

$$W=\|\boldsymbol{\omega}(t_1), \boldsymbol{\omega}(t_2), \boldsymbol{\omega}(t_3)\|, \quad V=\|\mathbf{e}(t_1), \mathbf{e}(t_2), \mathbf{e}(t_3)\|$$

Отсюда искомый тензор инерции равен $I=hVW^{-1}$.

В этом выражении неизвестным является значение h. При $h=1$ оно определяет тензор I_1, связанный с искомым тензором соотношением:

$$I=hI_1 \tag{2.1}$$

Направление единичного вектора кинетического момента при этом определяется соотношением $\mathbf{e}(t)=I_1\boldsymbol{\omega}(t)/|I_1\boldsymbol{\omega}(t)|$, что позволяет принять следующий закон управления торможением аппарата:

$$\mathbf{M}=-\alpha(t)\mathbf{e}(t) \tag{2.2}$$

Здесь текущее значение функции $\alpha(t)$ определяется видом области ограничения управляющего момента.

Движение аппарата при законе управления (2.2) изучено в работе [5]. При этом модуль вектора кинетического момента имеет вид:

$$|I\omega(t)|=|I\omega(T)|-\int_T^t \alpha(\tau)\,d\tau \tag{2.3}$$

Здесь T — время начала торможения. Пусть T_1 — время завершения торможения, то есть $\omega(T_1)=0$. Тогда из (2.3) получаем выражение для модуля кинетического момента h:

$$h=\int_T^{T_1} \alpha(\tau)\,d\tau/|I_1\omega(T)|$$

Искомое значение тензора инерции аппарата определяется по формуле (2.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев Г. М., Алексеев К. Б., Киселев М. И.* Об определении тензора инерции космического аппарата в полете // Космич. исследования. 1978. Т. 16. Вып. 3. С. 456–459.
2. *Алексеев К. Б., Злодырева О. В., Синельников О. В.* К вопросу определения тензора инерции аппарата в полете // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 2. С. 90–93.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
4. *Ляпунов А. М.* Лекции по теоретической механике. Киев: Наук. думка, 1982. 632 с.
5. *Смольников Б. А.* Обобщение Эйлерова случая движения твердого тела // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 5. С. 735–736.

Москва

Поступила в редакцию
6.V.1987