МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1989

УДК 531.8

С. Ф. БУРДАКОВ

О СИНТЕЗЕ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ РОБОТА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ТРАЕКТОРИИ

Рассматриваются алгоритмы управления, не требующие решения задачи преобразования координат в полном объеме и позволяющие использовать описание траектории в координатах, непосредственно характеризующих положение и ориентацию рабочего органа робота. Преимущество рассматриваемых алгоритмов в наибольшей степени проявляется в условиях неопределенности траектории, т. е. когда траектория заранее не задана, а планируется в процессе движения робота. Реализация существующих алгоритмов в этих случаях затруднена, так как в реальном масштабе времени требуется решать очень объемную, в вычислительном плане, обратную задачу кинематики манипулятора [1, 2].

1. Пусть силовое взаимодействие рабочего органа робота с другими объектами отсутствует. Запишем в векторно-матричной форме уравнение движения манипулятора в обобщенных координатах, уравнение динамики системы приводов, а также кинематическое соотношение

$$\begin{gathered}\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+\mathbf{B}(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot})=\mathbf{Q}+\mathbf{Q}_w\\ \tau\mathbf{Q}^{\cdot}+\mathbf{Q}=\varphi(\mathbf{u},\ \mathbf{q}),\quad \mathbf{r}=\mathbf{f}(\mathbf{q})\end{gathered}\tag{1.1}$$

Кинематическое соотношение связывает вектор-столбец обобщенных координат $\mathbf{q}(\mathbf{q}\in R^n)$, характеризующий положение звеньев манипулятора друг относительно друга и вектор-столбец $\mathbf{r}(\mathbf{r}\in R^m,\ n\geqslant m)$, характеризующий положение и ориентацию рабочего органа в опорной системе координат, связанной с основанием робота [1]. Постоянными времени τ_i $(\tau=\mathrm{diag}\{\tau_i\},\ i=1,\ 2,\ldots,\ n)$ в уравнении динамики системы приводов (второе уравнение (1.1)) будем пренебрегать, считая их малыми по сравнению с постоянными времени, характеризующими процесс отработки траектории. Кроме того, будем считать, что правая часть второго уравнения (1.1) разрешима относительно вектора-столбца управляющих воздействий $\mathbf{u}$ $(\mathbf{u}\in R^n)$.

Объединим два первых уравнения (1.1):

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+\mathbf{B}'(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot})=\mathbf{d}\mathbf{u}+\mathbf{Q}_w\tag{1.2}$$

где $\mathbf{d}$ — неособая $(n\times n)$-матрица; $\mathbf{B}'(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot})$ — новая векторная функция, в которую включены составляющие из правой части второго уравнения (1.1), зависящие от $\mathbf{q}^{\cdot}$.

Продифференцируем кинематическое соотношение из (1.1) дважды по времени

$$\mathbf{r}^{\cdot\cdot}=\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+\mathbf{C}(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot})\tag{1.3}$$

где $\mathbf{J}(\mathbf{q})=\partial\mathbf{f}(\mathbf{q})/\partial\mathbf{q}$ — $(m\times n)$-матрица Якоби; $\mathbf{C}(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot})$ — векторная функция с элементами $\mathbf{q}^{\cdot T}(\partial^2 f_j(\mathbf{q})/\partial\mathbf{q}\partial\mathbf{q}^T)\mathbf{q}^{\cdot}$ $(j=1,\ 2,\ldots,\ m)$.

В случае, когда матрица Якоби квадратная $(n=m)$ и невырожденная, из (1.3) получим

$$\mathbf{q}^{\cdot\cdot}=\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{r}^{\cdot\cdot}-\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot})\tag{1.4}$$

Подставим соотношение (1.4) в уравнение (1.2) и запишем новое уравнение вида

$$\mathbf{F}(\mathbf{q})\mathbf{r}^{\cdot\cdot}+\mathbf{G}(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot})=\mathbf{d}\mathbf{u}+\mathbf{Q}_w$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{q})=\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \tag{1.5}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=\mathbf{B}'(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})-\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$$

Соотношения типа (1.4) получаются и для прямоугольной матрицы $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ ($n>m$) с помощью псевдоинверсии или обобщенной обратной матрицы [2]. Имеющаяся в этом случае неоднозначность, обусловленная избыточностью кинематической схемы манипулятора, может быть использована для удовлетворения дополнительных условий. Для областей рабочей зоны робота вблизи точек, в которых матрица $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ вырожденная, обратную матрицу $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})$ можно брать фиксированной. Для каждого робота фиксированные обратные матрицы просчитываются заранее и заносятся в память системы управления.

Пусть траектория определяется в опорной системе координат $\mathbf{r}^*=\mathbf{r}^*(t)$. Существуют производные $\dot{\mathbf{r}}^*=\dot{\mathbf{r}}^*(t)$, $\ddot{\mathbf{r}}^*=\ddot{\mathbf{r}}^*(t)$. Датчики обратных связей с точностью до ошибок ξ_1 и ξ_2 измеряют координаты и скорости по степеням подвижности робота $\check{\mathbf{q}}=\mathbf{q}+\xi_1$, $\check{\dot{\mathbf{q}}}=\dot{\mathbf{q}}+\xi_2$. Сформируем вектор управляющих воздействий в соответствии с выражением

$$\mathbf{u}=\mathbf{d}^{-1}[\check{\mathbf{G}}(\check{\mathbf{q}},\check{\dot{\mathbf{q}}})+\check{\mathbf{F}}(\check{\mathbf{q}})\mathbf{v}(\check{\mathbf{q}},\check{\dot{\mathbf{q}}},\mathbf{r}^*,\dot{\mathbf{r}}^*,\ddot{\mathbf{r}}^*)] \tag{1.6}$$

Галочка у матриц $\check{\mathbf{F}}$ и $\check{\mathbf{G}}$ означает возможное несоответствие, например, по массе груза, между моделью, на основе которой формируется вектор $\mathbf{u}$ и объектом управления.

Подставим (1.6) в уравнение (1.5) и рассмотрим идеальный случай, когда модель адекватна объекту управления, отсутствуют возмущения $\mathbf{Q}_w$ и ошибки измерений ξ_1 и ξ_2. В этом случае получим

$$\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{v}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{r}^*,\dot{\mathbf{r}}^*,\ddot{\mathbf{r}}^*) \tag{1.7}$$

Построим векторную функцию $\mathbf{v}$ следующим образом

$$\mathbf{v}=\ddot{\mathbf{r}}^*-\mathrm{diag}\{\alpha_{1i}\}[\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}-\dot{\mathbf{r}}^*]-\mathrm{diag}\{\alpha_{2i}\}[\mathbf{f}(\mathbf{q})-\mathbf{r}^*] \tag{1.8}$$

Уравнения системы (1.7) при такой $\mathbf{v}$ полностью распадаются. Введем ошибку отработки траектории $\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{r}-\mathbf{r}^*$. Тогда с учетом последнего соотношения (1.1) и соотношения $\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ из (1.7) и (1.8) для ошибки $\boldsymbol{\varepsilon}$ получим систему несвязанных уравнений $\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}+\mathrm{diag}\{\alpha_{1i}\}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}+\mathrm{diag}\{\alpha_{2i}\}\boldsymbol{\varepsilon}=0$.

В отличие от [3], где аналогичное уравнение было получено для ошибки $\mathbf{e}=\mathbf{q}-\mathbf{q}^*$, характеризующей отклонения от желаемого движения в пространстве обобщенных координат, ошибка $\boldsymbol{\varepsilon}$ является прямой характеристикой выполнения цели управления, которая в конечном итоге всегда связана с отработкой положения и ориентации рабочего органа робота. При выборе элементов диагональных матриц в (1.8), а также способов коррекции алгоритма при неполной компенсации можно использовать те же приемы, что и в [3].

Объем вычислений, которые должны проводиться в реальном масштабе времени для роботов с пятью-шестью степенями подвижности в общем случае получается весьма большим. Однако, практически всегда удается осуществить декомпозицию полной динамической модели, записывая отдельно уравнения движения для переносных и ориентирующих степеней подвижности. Связь таких подсистем осуществляется через кинематические соотношения. В полном объеме алгоритм может потребоваться лишь для переносных степеней подвижности, которых обычно не более трех, так как именно для них динамические эффекты проявляются в наибольшей степени. Более того, в уравнениях движения, построенных с учетом только переносных степеней подвижности, часто удается выделить доминирующие и несущественные составляющие. При слабой динамической взаимосвязи движений по различным степеням подвижности регулятор существенно упрощается. Однако даже в этих случаях алгоритм позволяет выбрать коэффициенты регулятора с учетом динамических характеристик робота.

Эффективность алгоритма проверялась численным моделированием для робота с шарнирным манипулятором. Рассматривались прямолинейные и круговые траектории с постоянной скоростью движения рабочего органа робота. Учитывались следующие возмущающие факторы: начальные рассогласования $\mathbf{e}_0$ и $\dot{\mathbf{e}}_0$, случайные (типа белого шума) возмущения $\mathbf{Q}_w$ и ошибки измерений ξ_1 и ξ_2, возмущения $\mathbf{Q}_w$ типа сухого трения, возмущения, обусловленные параметрической и структурной неадекватностью математической модели робота. Основная цель, которая ставилась при моделировании, была связана не с выбором подходящих значений коэффициентов регулятора, а с исследованием чувствительности алгоритма к различным возмущающим факторам, возможности реализации алгоритма в реальном масштабе времени, с определением требований к точностным характеристикам датчиков обратных связей, а также к динамическим и энергетическим характеристикам приводов. В связи с этим рассматривались даже такие уровни возмущений, которые в реальных ситуациях заведомо не достигаются. Практически во всех случаях можно было добиться устойчивой работы алгоритма.

Для рассматриваемого робота наибольшее влияние на точность отработки траектории оказывали ошибки ξ_1 в измерении координат $\mathbf{q}$. В меньшей степени проявлялось влияние ошибок ξ_2 в измерении скоростей $\mathbf{q}^{\cdot}$. Случайные возмущения $\mathbf{Q}_w$ оказывали наименьшее влияние (уровни ξ_1, ξ_2 и $\mathbf{Q}_w$ задавались по отношению к значениям, соответствующим заданной точности отработки траектории). Ошибки, обусловленные возмущением $\mathbf{Q}_w$ типа сухого трения, исключались введением в (1.8) интегральной составляющей $\operatorname{diag}\{\alpha_{3i}\}\int[\mathbf{f}(\mathbf{q})-\mathbf{r}^*]dt$. Устойчиво и с небольшим снижением точности работал редуцированный алгоритм $\mathbf{u}=\mathbf{d}^{-1}\mathbf{F}^{\vee}(\mathbf{q}^{\vee})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{q}^{\vee},\ \mathbf{q}^{\cdot\vee},\ \mathbf{r}^*,\ \mathbf{r}^{*\cdot},\ \mathbf{r}^{*\cdot\cdot})$, требующий существенно меньшего объема вычислений, чем полный алгоритм (1.6). Если не предусматривались специальные меры, во всех случаях наблюдалось некоторое снижение точности отработки траектории вблизи особых точек рабочей зоны робота.

2. Пусть на движение робота с n степенями подвижности наложено l ($l<m$) связей, в общем случае неголономных, задаваемых уравнением вида

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},\ t)\mathbf{r}^{\cdot}+\mathbf{g}(\mathbf{r},\ t)=0 \tag{2.1}$$

где $\mathbf{S}(\mathbf{r},\ t)$ — матрица ($l\times m$) (в дальнейшем рассматривается случай $n=m$); $\mathbf{g}(\mathbf{r},\ t)$ — вектор-столбец ($l\times1$).

Уравнение движения робота необходимо теперь рассматривать совместно с уравнением (2.1). Система в целом имеет ($n-l$) степеней свободы и для управления движением, в принципе, могут быть использованы лишь ($n-l$) приводов. Однако в этом случае в местах сопряжения робота с другими объектами могут возникнуть условия, при которых дальнейшее движение окажется невозможным. В частности может оказаться, что мощности приводов недостаточны для преодоления сил сопротивления, возникающих в местах сопряжения. Поэтому в общем случае необходимо управлять и остальными l приводами. Задача состоит в том, как организовать такое управление, т. е. как обеспечить отработку траектории с одновременным управлением силовым взаимодействием.

Будем считать, что для силомоментного очувствления робота, используется датчик, установленный в районе рабочего органа [4]. В общем случае это шестикомпонентный датчик. Если пренебречь динамикой датчика (для этого его характеристики должны быть согласованы с характеристиками системы управления робота), то показания датчика дают главный вектор $\mathbf{P}$ и главный момент $\mathbf{M}$ сил нормальных реакций и трения, возникающих в местах сопряжения, приведенные к месту установки датчика. Уравнение движения робота, составленное в соответствии с принципом освобождаемости от связей, имеет вид [3]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+\mathbf{B}'(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot})=\mathbf{d}\mathbf{u}+\mathbf{J}^{\mathrm{T}}(\mathbf{q})\begin{bmatrix}\mathbf{P}\\ \mathbf{M}\end{bmatrix}+\mathbf{Q}_w \tag{2.2}$$

где $\mathbf{J}^{\mathrm{T}}(\mathbf{q})$ — транспонированная ($n\times6$)-матрица Якоби.

Если считать, что заклинивания отсутствуют, а силы трения пропорциональны (с заданными коэффициентами трения) силам нормальных реакций и направлены против векторов относительных скоростей в точках приложения соответствующих сил нормальных реакций, то среди всех компонент шестимерного вектора-столбца главных усилий в (2.2) можно выделить l независимых. Объединим их в вектор-столбец $\mathbf{R}$ и перепишем уравнение (2.2) в виде ($\mathbf{U}(\mathbf{q})$ — матрица ($n\times l$)):

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+\mathbf{B}'(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot})+\mathbf{U}(\mathbf{q})\mathbf{R}=\mathbf{d}\mathbf{u}+\mathbf{Q}_w \tag{2.3}$$

Подставляя дважды продифференцированное по времени и разрешенное относительно $\mathbf{q}^{\cdot\cdot}$ кинематическое соотношение из (1.1) в уравнение (2.3), получим

$$\mathbf{F}(\mathbf{q})\mathbf{r}^{\cdot\cdot}+\mathbf{G}(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot})+\mathbf{U}(\mathbf{q})\mathbf{R}=\mathbf{d}\mathbf{u}+\mathbf{Q}_w \tag{2.4}$$

где матрицы $\mathbf{F}(\mathbf{q})$ и $\mathbf{G}(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot})$ такие же, как в уравнении (1.5).

Продифференцируем уравнение связей (2.1) по времени (для голономных связей дважды) и запишем результат следующим образом

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)\mathbf{r}^{\cdot\cdot}+\mathbf{s}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{\cdot}, t)=0 \qquad (2.5)$$

В векторе-столбце $\mathbf{r}$ выделим столбцы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ размером $(n-l)\times 1$ и $(l\times 1)$ соответственно. В простейшем случае $\mathbf{r}_1$ объединяет координаты схвата, по которым движение возможно, а $\mathbf{r}_2$ — координаты, по которым из-за наложенных связей возникают силы нормальных реакций.

Уравнения (2.4) и (2.5) перепишем в блочной форме

$$\begin{bmatrix}\mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12}\\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{r}_1^{\cdot\cdot}\\ \mathbf{r}_2^{\cdot\cdot}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{G}_1\\ \mathbf{G}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{U}_1\\ \mathbf{U}_2\end{bmatrix}\mathbf{R}=\mathbf{du}+\mathbf{Q}_w$$

$$[\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2]\begin{bmatrix}\mathbf{r}_1^{\cdot\cdot}\\ \mathbf{r}_2^{\cdot\cdot}\end{bmatrix}+\mathbf{s}=0 \qquad (2.6)$$

Исключая из системы уравнений (2.6) $\mathbf{r}_2^{\cdot\cdot}$ и разрешая ее относительно $\mathbf{r}_1^{\cdot\cdot}$ и $\mathbf{R}$, получим замкнутую систему

$$\mathbf{M}_1(\mathbf{q}, \mathbf{r}, t)\mathbf{r}_1^{\cdot\cdot}+\mathbf{N}_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, \mathbf{r}, \mathbf{r}^{\cdot}, t)=\mathbf{L}_1(\mathbf{q}, t)(\mathbf{du}+\mathbf{Q}_w) \qquad (2.7)$$

$$\mathbf{M}_2(\mathbf{q}, \mathbf{r}, t)\mathbf{R}+\mathbf{N}_2(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, \mathbf{r}, \mathbf{r}^{\cdot}, t)=\mathbf{L}_2(\mathbf{q}, \mathbf{r}, t)(\mathbf{du}+\mathbf{Q}_w)$$

состоящую из $(n-l)$ уравнений первого типа l уравнений второго типа. В (2.7) введены следующие обозначения

$$\mathbf{M}_1=\mathbf{F}_{11}-\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1}\mathbf{F}_{21}-(\mathbf{F}_{12}-\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1}\mathbf{F}_{22})\mathbf{H}_2^{-1}\mathbf{H}_1$$

$$\mathbf{N}_1=\mathbf{G}_1-\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1}\mathbf{G}_2-(\mathbf{F}_{12}-\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1}\mathbf{F}_{22})\mathbf{H}_2^{-1}\mathbf{s}$$

$$\mathbf{M}_2=\mathbf{HF}^{-1}\mathbf{U}, \quad \mathbf{N}_2=\mathbf{HF}^{-1}\mathbf{G}-\mathbf{s}$$

$$\mathbf{L}_1=[\mathbf{E}, -\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1}], \quad \mathbf{L}_2=\mathbf{HF}^{-1}$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

Пусть датчики обратных связей позволяют измерить $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}^{\cdot}$ и $\mathbf{R}$. В каждый момент времени определены: траектория $\mathbf{r}_1^*=\mathbf{r}_1^*(t)$ и желаемое силовое взаимодействие $\mathbf{R}^*$. Сформируем вектор управляющих воздействий в соответствии с выражением

$$\mathbf{u}=\mathbf{d}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{L}_1^{\vee}\\ \mathbf{L}_2^{\vee}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{N}_1^{\vee}+\mathbf{M}_1^{\vee}\mathbf{v}_1(\mathbf{q}^{\vee}, \mathbf{q}^{\cdot\vee}, \mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_1^{*\cdot}, \mathbf{r}_1^{*\cdot\cdot})\\ \mathbf{N}_2^{\vee}+\mathbf{M}_2^{\vee}\mathbf{v}_2(\mathbf{R}^{\vee}, \mathbf{R}^*)\end{bmatrix} \qquad (2.8)$$

При точной компенсации из (2.7) и (2.8) получим $\mathbf{r}_1^{\cdot\cdot}=\mathbf{v}_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, \mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_1^{*\cdot}, \mathbf{r}_1^{*\cdot\cdot})$, $\mathbf{R}=\mathbf{v}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^*)$.

Представим векторную функцию $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ и матрицу Якоби $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ в блочной форме

$$\mathbf{f}(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}\mathbf{f}_1(\mathbf{q})\\ \mathbf{f}_2(\mathbf{q})\end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}\mathbf{J}_1(\mathbf{q})\\ \mathbf{J}_2(\mathbf{q})\end{bmatrix}$$

так, чтобы имели место соотношения $\mathbf{r}_1=\mathbf{f}_1(\mathbf{q})$, $\mathbf{r}_1^{\cdot}=\mathbf{J}_1(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot}$. Векторные функции $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ построим следующим образом

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{r}_1^{*\cdot\cdot}-\mathrm{diag}\{\alpha_{1i}\}[\mathbf{J}_1(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot}-\mathbf{r}_1^{*\cdot}]-\mathrm{diag}\{\alpha_{2i}\}[\mathbf{f}_1(\mathbf{q})-\mathbf{r}_1^*] \quad (i=1, 2, \ldots, n-l)$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{R}^*-\mathrm{diag}\{\beta_j\}\int(\mathbf{R}-\mathbf{R}^*)dt \quad (j=1, 2, \ldots, l) \qquad (2.9)$$

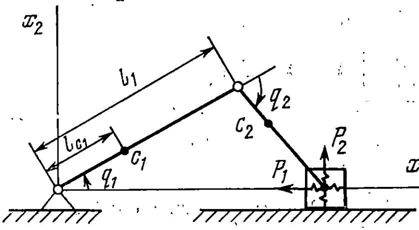
Введем векторы-столбцы ошибок $\boldsymbol{\varepsilon}_1=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_1^*$ и $\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{R}-\mathbf{R}^*$. Подставляя (2.9) в (2.8), получим

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\cdot\cdot}+\mathrm{diag}\{\alpha_{1i}\}\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\cdot}+\mathrm{diag}\{\alpha_{2i}\}\boldsymbol{\varepsilon}_1=0$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\cdot}+\mathrm{diag}\{\beta_j\}\boldsymbol{\sigma}=0 \qquad (2.10)$$

Таким образом, задача свелась к выбору коэффициентов в уравнениях (2.10). При неточной компенсации может потребоваться коррекция (2.9) или даже векторные функции другого типа. Однако независимо от этого выражения (2.8) и (2.9) позволяют установить распределение функций между приводами, приводящее к цели управления. При этом не происходит разделение приводов на две группы, одна из которых обеспечивает отработку только траектории, а вторая — только желаемого силового взаимодействия. Цель управления достигается согласованной работой приводов.

Для уменьшения объема вычислений, которые требуется проводить в темпе с процессом управления движением робота, в (2.8) и (2.9) целесообразно провести предварительные аналитические преобразования. Покажем это на примере электромеханического робота с двухзвенным шарнирным манипулятором и силомоментным очувствлением (фигура). Параметры манипулятора: l_1 и l_2 — длины звеньев, l_{c1} и l_{c2} — координаты центров масс, m_1 и m_2 — массы звеньев, m — масса рабочего органа, J_{c1} и J_{c2} — моменты инерции звеньев, J_1 и J_2 — моменты инерции роторов двигателей, приведенные к осям шарниров. Пренебрегая электромагнитной инерцией, для приводов запишем уравнения $Q_i=d_iu_i-h_iq_i$, где d_i и h_i — коэффициенты передачи и противо-электродвижущей силы i-го привода; u_i — управляющее напряжение, поступающее на i-ый привод.



Уравнение связи имеет вид $x_2=0$ (при $l_1=l_2=l$ в обобщенных координатах это эквивалентно уравнению $2q_1+q_2=0$). Силовое взаимодействие робота с поверхностью $x_2=0$ характеризуется составляющими $P_1=-kR\,\mathrm{sign}\,\dot{x}_1$, $P_2=R$, где R — нормальная реакция; k — коэффициент трения.

Уравнение (2.2) для рассматриваемого случая запишем в виде

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot q_1 \\ \ddot q_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1' \\ B_2'\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2\end{bmatrix} R = \begin{bmatrix} d_1u_1 \\ d_2u_2\end{bmatrix} + Q_w$$

$$A_{11}=a_1+2a_2\cos q_2,\quad A_{22}=a_3$$

$$A_{12}=a_3+a_2\cos q_2$$

$$B_1'=-a_2\dot q_2(2\dot q_1+\dot q_2)\sin q_2+h_1\dot q_1+c_1\cos q_1+c_2\cos(q_1+q_2)$$

$$B_2'=a_2\dot q_1^2\sin q_2+h_2\dot q_2+c_2\cos(q_1+q_2)$$

$$U_1=-l_1\cos q_1-l_2\cos(q_1+q_2)\mp k[l_1\sin q_1+l_2\sin(q_1+q_2)]$$

$$U_2=-l_2\cos(q_1+q_2)\mp kl_2\sin(q_1+q_2)$$

$$a_1=m(l_1^2+l_2^2)+m_1l_{c1}^2+m_2(l_1^2+l_{c2}^2)+J_{c1}+J_{c2}+J_1$$

$$a_2=(ml_2+m_2l_{c2})l_1,\quad a_3=ml_2^2+m_2l_{c2}+J_{c2}+J_2$$

$$c_1=(ml_1+m_1l_{c1}+m_2l_1)g,\quad c_2=(ml_2+m_2l_{c2})g$$

где g — ускорение сил тяжести.

Осуществляя аналитические преобразования в соответствии с (2.8) при $l_1=l_2=l$ получим

$$u_1=(F_{11}\check{}\,v_1+U_1\check{}\,v_2+G_1\check{})/d_1 \qquad (2.11)$$

$$u_2=(F_{21}\check{}\,v_1+U_2\check{}\,v_2+G_2\check{})/d_2$$

$$F_{11}\check{}=(2a_3-a_1)/(2l\sin q_1\check{})$$

$$F_{21}\check{}=(a_3-a_2\cos 2q_1\check{})/(2l\sin q_1\check{})$$

$$U_1\check{}=-2l\cos q_1\check{},\quad U_2\check{}=-l(\cos q_1\check{}\pm k\sin q_1\check{})$$

$$G_1\check{}=(2a_3-a_1)\dot q_1\check{}^2\,\mathrm{ctg}\,q_1\check{}+h_1\dot q_1\check{}+(c_1+c_2)\cos q_1\check{}$$

$$G_2^{\vee}=(a_3-a_2)\,\dot q_1^{\vee 2}\,\mathrm{ctg}\, q_1^{\vee}-2h_2\dot q_1^{\vee}+c_2\cos q_1^{\vee}$$

Выражения (2.9) приводятся к виду

$$v_1=\ddot x_1^{*}-\alpha_{11}(-2l\dot q_1^{\vee}\sin q_1^{\vee}-\dot x_1^{*})-\alpha_{21}(2l\cos q_1^{\vee}-x_1^{*}) \qquad (2.12)$$

$$v_2=R^*-\beta_1\int (R^{\vee}-R^*)\,dt$$

Заметим, что выражения (2.11) и (2.12) справедливы при произвольных $x_1^*=x_1^*(t)$ и R^*. Если закон движения вдоль поверхности $x_2=0$ задан заранее, т. е. является программным, то для дополнительного уменьшения объема вычислений в реальном времени можно вместо (2.11) использовать редуцированный алгоритм, пренебрегая второстепенными составляющими в $G_1^{\vee}$ и $G_2^{\vee}$, если такие имеются. В выражения (2.11) и (2.12) не входят показания датчиков измеряющих q_2 и $\dot q_2$. Это удалось сделать, так как в рассматриваемом случае имеются явные зависимости между обобщенными координатами и скоростями. Аналогично можно было бы исключить показания датчиков по первой степени подвижности. Естественно, что при такой возможности следует учитывать точностные характеристики датчиков, чтобы исключить показания наименее точных из них.

Численное моделирование показало эффективность алгоритма. В частности для рассмотренного выше примера при $x_1^*=V^*t$ и $R^*=0$ (связь считалась удерживающей) отклонения по силе не превышали долей ньютона, даже при довольно высоких уровнях возмущений ξ_1, ξ_2 и Q_w. Алгоритм работал устойчиво и при ошибках в измерении силы реакции R. Однако была выявлена более высокая, чем в алгоритмах без управления по силе, чувствительность к начальному рассогласованию $\mathbf{e}_0=\mathbf{q}_0-\mathbf{q}_0^*$. Это выражалось в резком скачке скорости рабочего органа робота, относительно номинального значения V^* сразу после начала движения, который затем полностью отрабатывался. Можно дать физическую интерпретацию этого эффекта. При $\mathbf{e}_0\neq 0$ в начальный момент времени рабочий орган стремится уйти с поверхности $x_2=0$ (фигура). Это приводит к росту силы нормальной реакции R, а следовательно и силы трения, так как $|P_1|=kR$. Для преодоления силы трения, двигатели должны развивать моменты, значительно превышающие программные. При уменьшении R это приводит к резкому скачку скорости рабочего органа. В реальной ситуации возможности приводов робота ограничены, поэтому значительное начальное рассогласование $\mathbf{e}_0$ может привести к заклиниванию, т. е. к тому, что движение вообще не начнется. При моделировании эта проблема частично снималась за счет соответствующего подбора коэффициентов обратных связей в (2.12). Заметим, что для реального робота могут потребоваться не только настройка коэффициентов в (2.12), но и более сложные законы управления [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов Е. П., Верещагин А. Ф., Зенкевич С. Л.* Манипуляционные роботы: Динамика и алгоритмы. М.: Наука, 1978. 398 с.
2. *Tuan Pham Anh, Zimmermann K.* Die Lösung der Umkehraufgabe für Industrieroboter mit kinematischer Redundanz // Techn. Mech., 1985, Bd. 6, N 4. S. 41–45.
3. *Бурдаков С. Ф.* О синтезе алгоритмов управления движением робота по программной траектории // Изв. АН СССР. МТТ, 1988, № 1, с. 89–95.
4. Системы очувствления и адаптивные промышленные роботы/Под ред. *Е. П. Попова, В. В. Клюева.* М.: Машиностроение, 1985. 255 с.
5. *Гурфинкель В. С., Девянин Е. А., Ленский А. В., Можжевелов С. Б., Формальский А. М., Шнейдер А. Ю.* Силовая обратная связь в системе управления манипулятором // Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 6, с. 56–64.

Ленинград

Поступила в редакцию 18.VI.1987