МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1989

УДК 531.8

В. Н. НОСОВ, А. В. ТРОИЦКИЙ, В. А. ТРОИЦКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ОДНОЗВЕННЫХ МАНИПУЛЯТОРОВ

Рассматриваются кинематические и линейные динамические модели манипуляторов с одной степенью подвижности. Для них формулируются три задачи оптимизации программных движений: задача о быстродействии, задача минимизации энергетических затрат и задача о минимуме «объема движения». При решении их используется необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума функционала этих вариационных задач оптимизации. Построены оптимальные решения и выполнен их сравнительный анализ.

1. Постановка задач оптимизации. При изучении программных движений манипуляторов будет использоваться или уравнение кинематики в скоростях [1—5]:

$$q^{\cdot}=v \tag{1.1}$$

или уравнение кинематики в ускорениях

$$q^{\cdot\cdot}=w \tag{1.2}$$

или простейшее уравнение динамики манипулятора вида

$$mq^{\cdot\cdot}=Q \tag{1.3}$$

В этих уравнениях q — обобщенная координата (перемещение или угол поворота), v и w — обобщенная скорость и ускорение, Q — обобщенная сила (усилие или момент), m — инерционная характеристика (масса или момент инерции).

При использовании уравнения (1.1) обобщенную скорость можно считать ограниченной. Тогда функция $v(t)$ должна удовлетворять неравенству

$$|v|\leqslant V_* \tag{1.4}$$

Аналогично этому для уравнения (1.2) будем иметь ограничение

$$|w|\leqslant W_* \tag{1.5}$$

В этом случае может быть ограниченной и скорость $q^{\cdot}$. Тогда нужно требовать, чтобы выполнялось неравенство

$$|q^{\cdot}|\leqslant V_* \tag{1.6}$$

Для уравнения (1.3) ограниченной следует считать силу Q, так что $|Q|\leqslant Q_*$. Это неравенство можно записать в виде (1.5), если ввести обозначение $W_*=Q_*/m$.

При учете динамики привода нужно использовать его уравнение движения $Q^{\cdot}=f(Q, q, q^{\cdot}, u)$, в котором под u понимается координата устройства, управляющего приводом [6]. В линейном приближении будем иметь уравнение

$$T_nQ^{\cdot}+Q=bu-aq^{\cdot} \tag{1.7}$$

где T_n, a, b — характеристики двигателя привода. Если T_n мало, так что $T_n\ll 1$, то вместо (1.7) получим соотношение

$$Q=bu-aq^{\cdot} \tag{1.8}$$

Ограничение на u можно представить в виде неравенства

$$|u|\leqslant U_* \tag{1.9}$$

Заметим, что при наличии в системах несимметричных ограничений нужно использовать неравенства следующего вида

$$\begin{gathered} V_1\leqslant v\leqslant V_2,\ \ V_1\leqslant q^{\boldsymbol{\cdot}}\leqslant V_2 \\ W_1\leqslant w\leqslant W_2,\ \ U_1\leqslant u\leqslant U_2 \end{gathered} \tag{1.10}$$

Будут изучаться задача о быстродействии, задача минимизации энергетических затрат и задача минимизации объема движения. В задаче о быстродействии минимизируется время перехода манипулятора из одного положения в другое. Функционал имеет простой вид

$$J=T-t_0 \tag{1.11}$$

где t_0 и T — моменты начала и конца процесса. Заметим, что при наличии ограничений вида (1.4)—(1.6), (1.9) или (1.10) оптимальные управляющие функции могут получиться разрывными. Поэтому, например, задачу о быстродействии для уравнения (1.1) следует формулировать следующим образом [7—9].

Среди непрерывных функций $q(t)$ и кусочно-непрерывных управлений $v(t)$, удовлетворяющих в интервале $[t_0, T]$ уравнению (1.1) и неравенству (1.4), а на концах этого интервала — условиям

$$t_0=0,\ \ q(t_0)=q_0,\ \ q(T)=q_T \tag{1.12}$$

найти такие, которые сообщают функционалу (1.11) минимальное значение.

Если заменить в этой формулировке уравнение (1.1) и неравенство (1.4) соответственно на (1.2) и (1.5) и дополнить условия (1.12) равенствами

$$q^{\boldsymbol{\cdot}}(t_0)=q_0^{\boldsymbol{\cdot}},\ \ q^{\boldsymbol{\cdot}}(T)=q_T^{\boldsymbol{\cdot}} \tag{1.13}$$

то получится задача о быстродействии для уравнений (1.2) с ограничением на управление. Если в нее ввести еще требование (1.6), то придем к задаче о быстродействии с ограничениями на управление и на фазовую координату $q^{\boldsymbol{\cdot}}$. Таким же способом ставится задача о быстродействии для уравнения (1.3) в случае, когда Q является управляющей переменной. Если учитывается динамика привода, то в формулировке нужно заменить уравнение (1.1) и неравенство (1.4) соответственно на уравнения (1.3) и (1.7) и неравенство (1.9) и дополнить условия (1.12) и (1.13) соотношениями

$$Q(t_0)=Q_0,\ \ Q(T)=Q_T \tag{1.14}$$

Нужно подчеркнуть, что некоторые из условий (1.12)—(1.14) могут в формулировке задачи отсутствовать.

Функционал в задаче минимизации энергетических затрат для манипулятора с одной степенью подвижности может быть приведен к следующему виду [3, 4]:

$$J=\int_{t_0}^{T} q^{\boldsymbol{\cdot}2}\,dt \tag{1.15}$$

Поэтому, например, эта задача для уравнения (1.1) может быть сформулирована следующим образом. Среди непрерывных функций $q(t)$ и кусочно-непрерывных управлений $v(t)$, удовлетворяющих в интервале $[t_0, T]$ уравнению (1.1) и неравенству (1.4), а на концах этого интервала — условиям (1.12) и $T=T_*$, найти такие, которые сообщают функционалу

$$J=\int_{t_0}^{T} v^2\,dt \tag{1.16}$$

минимальное значение.

Внося в эту формулировку изменения, описанные выше для задачи о быстродействии, получим задачи минимизации энергетических затрат для различных математических моделей однозвенного манипулятора.

В задаче минимизации объема движения функционал записывается в форме [3]:

$$J = \int_{t_0}^{T} |q^{\cdot}|\,dt \tag{1.17}$$

Для уравнения (1.1) эту задачу можно сформулировать следующим образом. Среди непрерывных функций $q(t)$ и кусочно-непрерывных управлений $v(t)$, удовлетворяющих в интервале $[t_0, T]$ уравнению (1.1) и неравенству (1.4), а на концах его — условиям (1.12) и $T=T_*$, найти такие, которые сообщают функционалу

$$J = \int_{t_0}^{T} |v|\,dt \tag{1.18}$$

минимальное значение. Конечно и эту формулировку можно изменить так, чтобы задача минимизации объема движения ставилась для других математических моделей манипулятора.

2. Задача о быстродействии. Начнем с изучения задачи о быстродействии для уравнения (1.1). Введем обозначения

$$x_1=q,\ u_1=v \tag{2.1}$$

и построим вспомогательное соотношение

$$\psi_1=u_1^2+u_2^2-V_*^2=0 \tag{2.2}$$

в котором $u_2(t)$ — дополнительное вещественное управление. Тогда задачу оптимизации можно будет сформулировать следующим образом.

Среди непрерывных функций $x_1(t)$ и кусочно-непрерывных управлений $u_1(t)$ и $u_2(t)$, удовлетворяющих в интервале $[t_0, T]$ уравнению $x_1^{\cdot}=u_1$ и соотношению (2.2), а на концах этого интервала — условиям

$$t_0=0,\ x_1(t_0)=q_0,\ x_1(T)=q_T \tag{2.3}$$

найти такие, которые сообщают функционалу $J=T$ минимальное значение.

Эта задача является частным случаем общих вариационных задач оптимизации процессов управления системами с ограниченными управлениями, подробно изученных в работах [9–12]. Здесь будут широко использоваться результаты, описанные в книгах [9, 10]. Следуя им, составляем функции H и φ. Найдем следующие выражения

$$H=\lambda_1u_1+\mu_1\psi_1$$

$$\varphi=T+\rho_0t_0+\rho_1[x_1(t_0)-q_0]+\rho_2[x_1(T)-q_T]$$

Поэтому дифференциальное уравнение для множителя λ_1 будет иметь простой вид

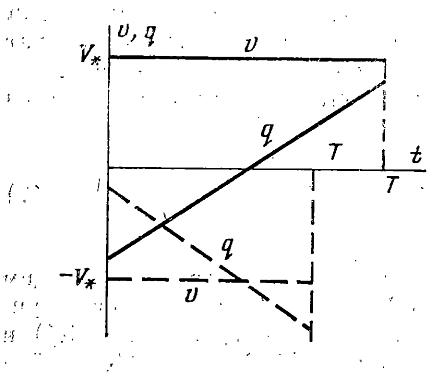
$$\lambda_1^{\cdot}=0 \tag{2.4}$$

Кроме этого должны выполняться равенства $\lambda_1+2\mu_1u_1=0$, $\mu_1u_2=0$.

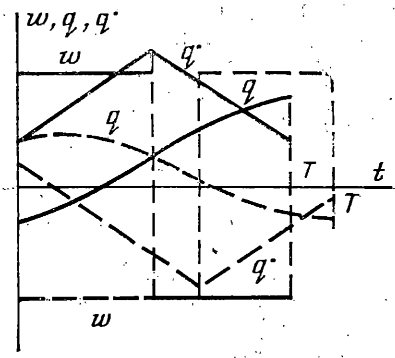
Условия Эрдмана-Вейерштрасса сводятся к требованиям непрерывности функций $\lambda_1(t)$ и H на интервале $[t_0, T]$ [9]. Из условий трансверсальности следует использовать равенство $(H)_T=1$. Неравенство Вейерштрасса имеет вид

$$\lambda_1u_1\geqslant\lambda_1U_1,\quad U_1\neq u_1 \tag{2.5}$$

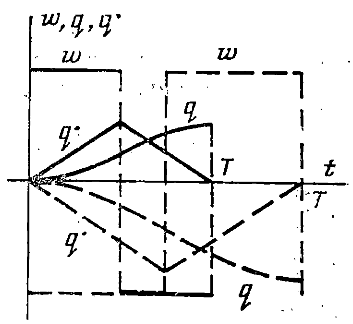
где $u_1(t)$ — функция, сообщающая минимум функционалу задачи, а $U_1(t)$ — любая допустимая функция.



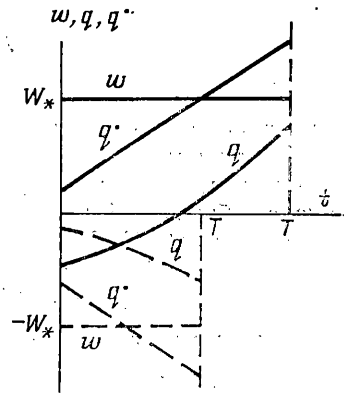
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

С помощью неравенства (2.5) найдем, что в оптимальном режиме должно выполняться соотношение

$$u_1(t)=V_* \operatorname{sign} \lambda_1 \qquad (2.6)$$

На основании уравнения (2.4) имеем $\lambda_1=\mathrm{const}$. Поэтому функция $u_1(t)$ не меняет знак в интервале $[t_0, T]$ и равна $u_1=V_*$ при $q_T>q_0$ или $u_1=-V_*$ при $q_T<q_0$. Соответственно этому движению получаются кривые, показанные на фиг. 1. На нем и на всех приводимых ниже фигурах используются исходные обозначения п. 1. На фиг. 1 сплошные линии отвечают случаю $q_T>q_0$, а штриховые — неравенству $q_T<q_0$.

В задаче о быстродействии для уравнений (1.2) введем обозначения

$$x_1=q, \; x_2=q^{\bullet}, \; u_1=w \qquad (2.7)$$

Тогда вместо уравнения (2.2) будем иметь систему уравнений

$$x_1^{\bullet}=x_2, \; x_2^{\bullet}=u_1 \qquad (2.8)$$

При наличии только одного ограничения (1.5) дополним эту систему соотношением

$$\psi_2=u_1^2+u_2^2-W_*^2=0 \qquad (2.9)$$

Функция H в задаче о быстродействии имеет вид $H=\lambda_1x_2+\lambda_2u_1+\mu_2\psi_2$. Поэтому оптимальный закон $u_1(t)$ находится по формуле

$$u_1(t)=W_* \operatorname{sign} \lambda_2 \qquad (2.10)$$

Нетрудно убедиться в том, что в интервале $[t_0, T]$ имеется не более одной точки переключения $u_1(t)$. Соответствующее решение имеет вид, показанный на фиг. 2. На фиг. 3 изображено решение при торможении в конце процесса. Кривые фиг. 4 отвечают задаче о быстродействии, в которой не фиксировано одно из концевых значений скорости.

Все сказанное выше остается в силе и в том случае, когда манипулятор описывается уравнением (1.3), а управляющим воздействием является усилие $Q(t)$, а также тогда, когда привод описывается упрощенным уравнением (1.8) и управлением является переменная $u(t)$. В этом случае количество точек $t=t_*$ возможного разрыва управляющих функций $Q(t)$ или $u(t)$ не превосходит единицы, так что оптимальные законы изменения этих управляющих воздействий будут такими же, как и описанные выше для уравнения манипулятора в ускорениях (1.2).

Сложнее дело обстоит в случае, когда динамика привода описывается уравнением (1.7). Здесь порядок дифференциальных уравнений системы повышается до трех. Поэтому число возможных переключений управляющего воздействия увеличивается до двух. В остальном оптимальные решения строятся также, как это делалось выше.

3. Задача о быстродействии для системы с ограничениями на фазовую координату. В задаче о быстродействии для уравнения (1.2) с двумя ограничениями (1.5) и (1.6) неравенство (1.6) определяет ограничение на фазовую координату $x_2=\dot{q}$. Такая задача является частным случаем общей задачи оптимизации процессов управления с ограничениями на управления и фазовые координаты. Результаты изучения ее подробно описаны в работах [9, 13—15]. В них показано, что при наличии ограничения (1.6) введенный выше множитель $\lambda_2(t)$ может иметь разрывы первого рода в точках $t=t_1$ выхода координаты $x_2(t)$ на ограничение или $t=t_2$ схода ее с ограничения. Кроме этого в подынтервале $[t_1, t_2]$ функция H имеет вид $H=\lambda_1 x_2+(\lambda_2+\alpha)u_1+\mu_2\psi_2$, где $\alpha=\alpha(t)$ — дополнительный множитель Лагранжа, учитывающий уравнение $\dot{\vartheta}=0$. Оно получается с помощью неравенства $\vartheta=x_2-V_*\leqslant 0$ или $\vartheta=x_2+V_*\geqslant 0$, определяющего ограничение на фазовую координату x_2.

Анализ задачи с учетом ее особенностей показывает, что в общем случае задания концевых условий оптимальные функции $u_1=w$, $x_1=q$ и $x_2=\dot{q}$ имеют вид, показанный на фиг. 5. Ему отвечают значения $\lambda_2(t_0)>0$ и $\lambda_2(T)<0$. Если одно из концевых значений $x_2(t_0)$ или $x_2(T)$ не фиксировано, то соответствующая величина множителя $\lambda_2(t_0)$ или $\lambda_2(T)$ равна нулю. Поэтому оптимальное решение имеет вид, изображенный на фиг. 6 сплошной линией для свободного значения $x_2(t_0)$ и штриховой — для свободного $x_2(T)$. При этом сплошные линии отвечают случаю $q_T>q_0$, а штриховые — неравенству $q_T<q_0$.

Особо следует выделить случай, когда не фиксированы оба значения $x_2(t_0)$ и $x_2(T)$. Для него имеем $\lambda_2(t_0)=0$ и $\lambda_2(T)=0$ и оптимальное решение совпадает с тем, которое получено выше для уравнения манипулятора в скоростях.

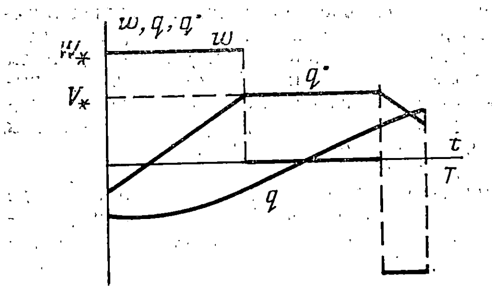
Таким образом, если величины $x_2(t_0)$ и $x_2(T)$ не фиксированы, то решение задачи о быстродействии для уравнения манипулятора с одной степенью подвижности в ускорениях (1.2) и, вообще говоря, для уравнения (1.3), в котором управлением является $Q(t)$, при наличии ограничений (1.5) и (1.6) совпадает с оптимальным решением задачи о быстродействии для уравнения кинематики в скоростях (2.1) с ограничением (1.4).

4. Задача о минимуме энергетических затрат. Начнем с изучения этой задачи для уравнения кинематики в скоростях (1.1). Если воспользоваться описанными выше обозначениями, то функционал (1.16) запишется в виде

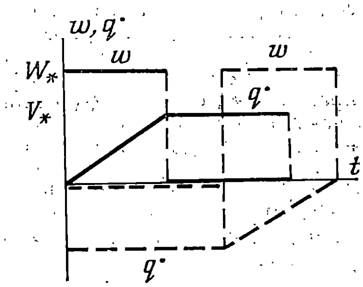
$$J=\int_{t_0}^{T} u_1^2\,dt$$

так что функция H представится формулой $H=-u_1^2+\lambda_1 u_1+\mu_1\psi_1$. Значит уравнение для λ_1 опять имеет простой вид (2.4), так что $\lambda_1=\mathrm{const}$. Для u_1 и u_2 получим уравнения $\lambda_1-2u_1+2\mu_1 u_1=0$, $\mu_1 u_2=0$, а неравенство Вейерштрасса будет иметь форму $-u_1^2+\lambda_1 u_1\geqslant -U_1^2+\lambda_1 U_1$, $U_1\neq u_1$. Следовательно, оптимальные величины $u_1(t)$ сообщают максимум функции $H(U_1)=-U_1^2+\lambda_1 U_1$. Необходимое условие максимума этой функции записывается в форме $\lambda_1-2U_1=0$. Поэтому в оптимальном режиме будем иметь

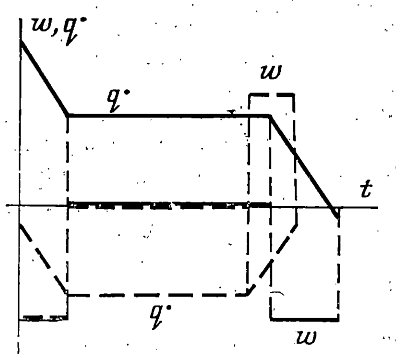
$$u_1=\lambda_1/2=\mathrm{const} \qquad (4.1)$$



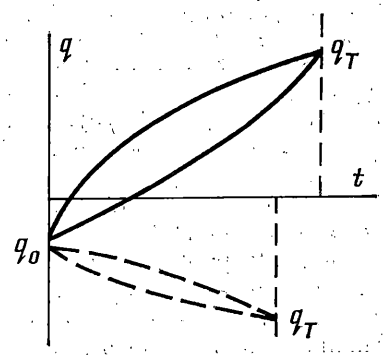
Фиг. 5



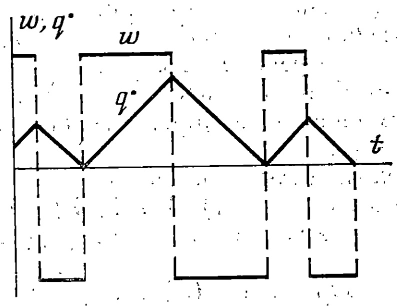
Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

Значение этой постоянной при фиксированном времени T_* находится по концевым условиям (1.12) с помощью формулы $u_1=(q_T-q_0)/T_*$. Этому решению отвечает фиг. 1, если на ней убрать величины $\pm V_*$. Если для получившегося u_1 не удовлетворяется неравенство (1.4), то манипулятор нельзя перевести из положения $q(t_0)=q_0$ в $q(T)=q_T$ за заданное время T_*.

Пусть теперь манипулятор описывается кинематическим уравнением в ускорениях (1.2). Введя обозначения (2.7), получим уравнения (2.8) и (2.9) и концевые условия (2.10), которые можно дополнить равенством $T=T_*$. Функционал (1.15) в изучаемом случае имеет вид

$$J=\int_{t_0}^{T} x_2^2\,dt$$

а функция H запишется в форме $H=-x_2^2+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u_1+\mu_2\psi_2$. Поэтому уравнения Эйлера — Лагранжа будут иметь вид

$$\lambda_1^{\cdot}=0,\quad \lambda_2^{\cdot}+\lambda_1-2x_2=0$$
$$\lambda_2+2\mu_2 u_1=0,\quad \mu_2 u_2=0 \qquad (4.2)$$

Последние два уравнения вместе с неравенством Вейерштрасса $\lambda_2 u_1 \geqslant \geqslant \lambda_2 U_1$, $U_1 \neq u_1$ показывают, что в оптимальном режиме выполняется соотношение (2.12), причем неравенство $|u_1| < W_*$ может иметь место лишь при $\lambda_2 = 0$.

При фиксированных $x_2(t_0)$ и $x_2(T)$ с помощью условий трансверсальности [9, 10] легко установим, что $\lambda_2(t_0)$ и $\lambda_2(T)$ могут быть отличными от нуля. На основании первого уравнения (4.2) найдем, что $\lambda_1 = \lambda_{10} = \text{const}$. Кроме того уравнение $\dot{x}_2 = u_1$ показывает, что при $u_1 = 0$ будем иметь $x_2 = \text{const}$. Поэтому в оптимальном режиме возможны следующие соотношения: $u_1 = 0$, $\lambda_1 = 2x_2$, $\lambda_2 = 0$. Если проанализировать все возможные варианты, то получим оптимальное решение следующего вида: $u_1 = \pm W_*$, $x_2 = q_0^{\bullet} \pm W_* t$ при $t \in [t_0, t_1]$; $u_1 = 0$, $x_2 = q_0^{\bullet} \pm W_* t_1 = \text{const}$ при $t \in [t_1, t_2]$ и $u_1 = \mp W_*$, $x_2 = q_T^{\bullet} \mp W_*(T-t)$ при $t \in [t_2, T]$. Эти режимы при различных концевых значениях $x_2(t_0)$ и $x_2(T)$ показаны на фиг. 7, где изображены только функции $w = u$ и $\dot{q} = x_2$. Постоянное значение координаты x_2 в промежутке $[t_1, t_2]$ и границы этого подынтервала t_1 и t_2 находятся из концевых условий (2.10) и равенства $T = T_*$.

Если опять рассмотреть задачу минимизации при свободной величине $x_2(t_0)$ или $x_2(T)$, то получатся решения, которые могут быть представлены графиками фиг. 6. Наконец, если свободны обе величины $x_2(t_0)$ и $x_2(T)$, то оптимальное решение имеет вид, показанный на фиг. 1. Оно совпадает с оптимальным решением задачи минимизации энергетических затрат для кинематического уравнения манипулятора в скоростях.

Задача минимизации энергетических затрат может быть поставлена и решена для случая, когда используется математическая модель, отвечающая уравнению (1.2) или (1.3) при наличии двух ограничений (1.5) и (1.6). Результаты решения этой задачи оптимизации будут аналогичны описанным выше. Разница будет проявляться только в случае, когда постоянное значение координаты x_2 в подынтервале $[t_1, t_2]$ не будет удовлетворять неравенству $|x_2| \leqslant V_*$. В этом случае нужно рассмотреть другой подынтервал $[t_1', t_2']$, в котором $|x_2| = V_*$ и перевод манипулятора из заданного начального состояния в заданное конечное состояние нельзя выполнить за заданное время $T = T_*$. Возможное время этого процесса найдется из концевых условий задачи.

5. Задача о минимуме объема движения. Начнем опять с изучения этой задачи для уравнения (1.1). Если ввести обозначения (2.1), то ее можно будет сформулировать следующим образом. Среди непрерывных функций $x_1(t)$ и кусочно-непрерывных управлений $u_1(t)$ и $u_2(t)$, удовлетворяющих на отрезке $[t_0\ T]$ уравнению $\dot{x}_1 = u_1$ и соотношению (2.2), а на концах его — условиям (2.3), найти такие, которые сообщают минимальное значение функционалу

$$J = \int_{t_0}^{T} |u_1|\, dt = \int_{t_0}^{T} u_1 \operatorname{sign} u_1\, dt \tag{4.3}$$

Эта задача является частным случаем общей задачи оптимизации процессов управления в системах с разрывными правыми частями дифференциальных уравнений движения или с разрывами первого рода подынтегральных функций функционалов. Эта общая задача подробно изучена в работах [9, 16]. Здесь будут использоваться описанные в них результаты. В соответствии с ними должна быть построена функция ϑ, с помощью которой устанавливается равенство $\vartheta[x_1(t'), u_1(t'), t'] = 0$, определяющее моменты времени $t = t'$ разрыва правых частей или подынтегральной функции функционала. При $t = t'$ множители Лагранжа λ_s и функция H могут иметь разрывы первого рода в случае, когда функция ϑ зависит от x_s и t.

В изучаемой задаче имеем $\vartheta = u_1$, так что эта функция не зависит от x_1 и t. Поэтому λ_1 и H непрерывны в интервале $[t_0, T]$. Гамильтониан H этой задачи записывается в форме $H = -u_1 \operatorname{sign} u_1 + \lambda_1 u_1 + \mu_1 \psi_1$, так что для λ_1 будем иметь дифференциальное уравнение (2.4) и $\lambda_1 = \text{const}$. Функция H не зависит явно от времени. Следовательно, в задаче имеется первый интеграл $H=\text{const}$. Постоянная в нем находится из условия трансверсальности $(H)_T=0$. В соответствии с этим будем иметь $H=(\lambda_1-\text{sign}\,u_1)u_1=0$ на всем интервале $[t_0, T]$. Это равенство показывает, что оптимальное управляющее воздействие $u_1(t)$ не может изменить знак при $t\in[t_0, T]$, то есть оптимальной будет любая монотонная функция $x_1(t)$, переводящая манипулятор из положения $x_1(t_0)=q_0$ в положение $x_1(T)=q_T$.

Для всех оптимальных функций такого вида, показанных на фиг. 8, значение функционала (4.3) равно $J=q_T-q_0$. Подчеркнем, что это же значение функционала (4.3) получится и для решения $u_1=\pm W_*$ задачи о быстродействии для перехода манипулятора из положения $x_1(t_0)=q_0$ в положение $x_1(T)=q_T$, так что оно является оптимальным и для задачи минимизации объема движения.

В задаче о минимуме объема движения для уравнения кинематики в ускорениях (1.2) функционал (1.17) после перехода к обозначениям (2.7) примет вид

$$J=\int_{t_0}^{T} x_2\,\text{sign}\,x_2\,dt \qquad (4.4)$$

Дифференциальные уравнения задачи, начальные и терминальные условия имеют вид $\dot{x}_1=x_2$, $\dot{x}_2=u_1$, $x_1(0)=q_0$, $x_2(0)=\dot{q}_0$, $x_1(T)=q_T$, $x_2(T)=\dot{q}_T$; функция H равна

$$H=-x_2\,\text{sign}\,x_2+\lambda_1x_2+\lambda_2u_1+\mu_2\psi_2,\quad \psi_2=u_1^2+u_2^2-W_*^2$$

Решениями сопряженных уравнений

$$\dot{\lambda}_1=-\partial H/\partial x_1=0,\quad \dot{\lambda}_2=-\partial H/\partial x_2=\text{sign}\,x_2-\lambda_1$$

являются функции $\lambda_1=\lambda_{10}=\text{const}$, $\lambda_2=(\text{sign}\,x_2-\lambda_1)t+\lambda_{20}$. Неравенство Вейерштрасса $\lambda_2u_1\geqslant\lambda_2U_1$ приводит к соотношению (2.10).

Рассмотрим сначала случай не фиксированной величины $x_2(T)$. Для него условия трансверсальности дают равенство $\lambda_2(T)=0$. Поэтому будем иметь $\lambda_2=(\text{sign}\,x_2-\lambda_1)(t-T)$ и, если функция $x_2(t)$ не меняет знак, то и $\lambda_2(t)$ не будет менять знак. Оптимальным будет решение $u_1=W_*$ или $u_1=-W_*$. Ему отвечают функции $x_2=\dot{q}_0\pm W_*t$, $x_1=q_0+\dot{q}_0t\pm W_*t^2/2$, которые являются также решением задачи о быстродействии при тех же концевых условиях. Это решение показано на фиг. 4 для $q_T>q_0$ сплошными линиями и для $q_T<q_0$ — штриховыми.

В изучаемом случае имеются и другие решения. При построении их предположим, что $q_T>q_0$ и что при $t=t_0$ выполняется неравенство $\lambda_2(t_0)>$ >0. Тогда $u_1(t_0)=W_*$ и $x_2(t_0+0)>0$. Если $x_2(t_0+0)>\lambda_1$, то получается описанное выше решение. Поэтому считаем, что $x_2(t_0+0)<\lambda_1$. Тогда $\lambda_2(t)$ убывает с течением времени и при $t=t_*$ обратится в нуль, $\lambda_2(t_*)=0$. При этом будет выполняться неравенство $\lambda_2(t_*+0)<0$, на основании которого будем иметь $u_1(t_*+0)=-W_*$. Фазовая координата $x_2(t)$ при $t>t_*$ убывает и при $t=t'$ обратится в нуль. Если $x_2(t'+0)<0$, то при дальнейшем увеличении t будем иметь $x_2(t)<0$, так что $x_1(t)$ станет с течением времени отрицательной. При этом условию $x_1(T)-x_1(t_0)=q_T-q_0>0$ нельзя удовлетворить. Следовательно $x_2(t'+0)>0$, $\lambda_2(t'+0)>0$ и повторится описанное выше построение. Поэтому функция $x_2(t)=\dot{q}(t)$ имеет вид, показанный на фиг. 9, а функция $x_1(t)$ опять будет монотонной функцией времени.

При фиксированном значении $x_2(T)$ характер движения аналогичен только что описанному. И в этом случае может быть найдено решение, показанное на фиг. 2, которое является одновременно решением соответствующей задачи о быстродействии.

В задаче минимизации объема движения для уравнения (1.2) с ограничениями (1.5) и (1.6) неравенство (1.6) опять определяет ограничение на координату $\dot{q}=x_2$. Решение такой задачи строится аналогично описанному выше. В ней, вообще говоря, возможны выходы координаты x_2 на границу по ограничению (1.6). Тогда графики соответствующих кривых будут аналогичны описанным выше и показанным на фиг. 5. Если таких выходов на границу нет, то оптимальные кривые будут такими же, как показанные на фиг. 9.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.* Курс теоретической механики. Т. 2. М.: Наука, 1983. 640 с.
2. *Попов Е. П., Верещагин А. Ф., Зенкевич С. Л.* Манипуляционные роботы. Динамика и алгоритмы. М.: Наука, 1978. 398 с.
3. *Кобринский А. А., Кобринский А. Е.* Манипуляционные системы роботов. Основы устройства, элементы теории. М.: Наука, 1985. 343 с.
4. Динамика управления роботами/Под ред. Е. И. Юревич. М.: Наука, 1984. 334 с.
5. *Вукобратович М., Стокич Д.* Управление манипуляционными роботами. М.: Наука, 1985. 343 с.
6. *Волков Н. И., Миловзоров В. П.* Электромашинные устройства автоматики. М.: Высш. шк., 1978. 336 с.
7. *Аветисян В. В., Болотник Н. Н., Черноусько Ф. Л.* Оптимальные программные движения двузвенного манипулятора // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 3. С. 123–131.
8. *Аветисян В. В., Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н.* Моделирование и оптимизация транспортных движений промышленного робота // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1986. № 3. С. 84–90.
9. *Троицкий В. А.* Оптимальные процессы колебаний механических систем. Л.: Машиностроение, 1976. 248 с.
10. *Троицкий В. А., Петухов Л. В.* Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука, 1982. 432 с.
11. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. Под ред. Лейтмана Дж. М.: Наука, 1965. 538 с.
12. Теория оптимальных аэродинамических форм/Под ред. Миеле А. М.: Мир, 1969. 507 с.
13. *Троицкий В. А.* Вариационные задачи оптимизации процессов управления в системах с ограниченными координатами // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 3. С. 431–443.
14. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
15. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М. Физматгиз. 1961. 391 с.
16. *Троицкий В. А.* Вариационные задачи оптимизации процессов управления для уравнений с разрывными правыми частями // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 2. С. 233–246.

Ленинград

Поступила в редакцию 6.VIII.1987