МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1989

УДК 531.38

А. П. ИВАНОВ

О ДИНАМИКЕ ТЕЛА НА ВИБРИРУЮЩЕМ НЕУДЕРЖИВАЮЩЕМ ПОДВЕСЕ

Как известно, колебания точки подвеса маятника могут существенно влиять на его движение [1]. В публикуемой работе рассматривается способ крепления тела к подвесу через посредство гибкой нерастяжимой нити. Различные вопросы динамики тела при таком подвесе изучены в [2, 3]. Отличительной чертой такой связи является ее неудерживающий характер [4]: натяжение нити вследствие вибрации может ослабиться, что приведет к движению виброударного типа.

Исследовано влияние вертикальных колебаний на устойчивость перманентного вращения тела на нити. Рассмотрена также задача о равновесии тела, висящего на двух нитях. Получены условия устойчивости при наличии высокочастотных колебаний с малой амплитудой, связывающие динамические характеристики тела, геометрию подвеса и упругие свойства нитей.

1. Рассмотрим тяжелое твердое тело, шарнирно прикрепленное в точке A' своей оси симметрии к нити, другой конец A которой совершает гармонические колебания вдоль вертикали с частотой ν и амплитудой ε. Нить будем считать нерастяжимой, так что она осуществляет неудерживающую связь $|AA'|\leqslant a$, где a – длина нити в натянутом состоянии.

Введем инерциальную систему координат, начало O которой находится в среднем положении точки A, ось Y вертикальна, и возьмем в качестве обобщенных координат сферические координаты ρ, α, β точки A', определяемые соотношениями $z=\rho\sin\beta$, $x=\rho\cos\alpha\cos\beta$, $y=\rho\sin\alpha\cos\beta+\varepsilon\sin\nu t$, и углы Эйлера, описывающие ориентацию тела (точка A' и центр инерции G лежат на оси Z'). Функция Лагранжа имеет вид

$$L={}^1/_2m(x_G^{\cdot2}+y_G^{\cdot2}+z_G^{\cdot2})+{}^1/_2B(\theta^{\cdot2}+\psi^{\cdot2}\sin^2\theta)+ \tag{1.1}$$
$$+{}^1/_2C(\varphi^\cdot+\psi^\cdot\cos\theta)^2-mgy_G$$

$$x_G=\rho\cos\alpha\cos\beta-b\sin\theta\sin\psi,\ y_G=\rho\sin\alpha\cos\beta+\varepsilon\sin\nu t+$$
$$+b\sin\theta\cos\psi,\ z_G=\rho\sin\beta-b\cos\theta\ (\rho\leqslant a,\ b=|GA'|)$$

где m – масса, B и C – экваториальный и осевой моменты инерции, g – ускорение свободного падения. Если $\rho<a$ (нить не натянута), то тело движется под действием силы тяжести, а в моменты натяжения нити происходят удары, которые мы будем описывать ньютоновским коэффициентом восстановления R $(0<R\leqslant1)$.

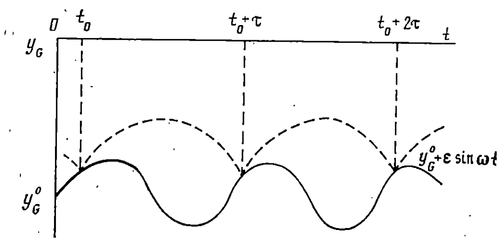
Если при ударе точки A, A' и G лежат на одной вертикали, то момент ударного импульса относительно точки G равен нулю. Поэтому существуют такие движения тела, для которых

$$x_G=z_G\equiv0,\ \theta={}^1/_2\pi,\ \psi=\pi,\ \varphi^\cdot=\Omega=\text{const} \tag{1.2}$$

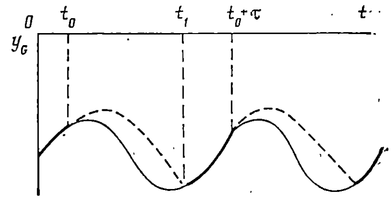
т. е. ось тела не изменяет своей ориентации, а его центр инерции движется вдоль вертикали в соответствии с уравнением

$$y_G^{\cdot\cdot}=-g,\ y_G\geqslant b-a+\varepsilon\sin\nu t \tag{1.3}$$

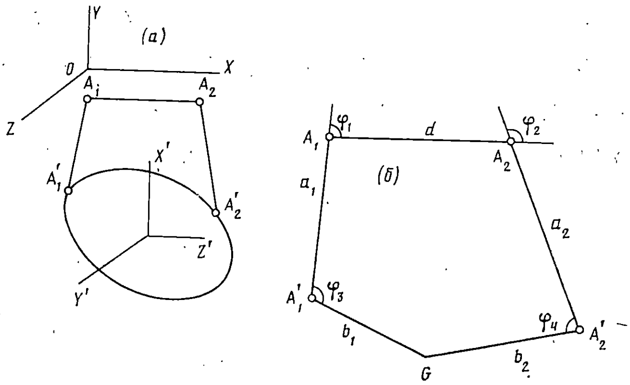
Соотношения (1.3) совпадают с уравнениями движения точки на вибрирующей плоскости [5], имеющими такие асимптотически устойчивые решения, для которых соударения происходят в одной и той же фазе t_0



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

вынуждающего колебания (фиг. 1). Период такого решения равен $\tau=2\pi n/\nu$ ($n=1, 2,\ldots$) (на фиг. 1 $n=1$), а условие его существования следующее

$$\varkappa\geqslant\pi n(1-R)(1+R)^{-1},\quad \varkappa=\varepsilon\nu^2 g^{-1} \tag{1.4}$$

При выполнении неравенства (1.4) фаза удара t_0 определится из уравнения

$$\varkappa\cos t_0\omega=\pi n(1-R)(1+R)^{-1},\quad \sin\nu t_0>0 \tag{1.5}$$

(периодические решения существуют и для $\sin\nu t_0<0$, однако они неустойчивы [5]).

Исследуем в первом приближении устойчивость τ — периодических решений (1.2) с соударениями в фазе (1.5) по отношению к возмущениям переменных x_G, z_G, θ, ψ и их производных.

Ввиду асимптотического поведения переменной y_G можно считать, что удары происходят и в возмущенном движении в той же фазе (1.5).

Для получения условий устойчивости необходимо определить связь между начальными и конечными значениями переменных на протяжении одного периода (включая удар). Заметим при этом, что движение в промежутке между ударами не зависит от наличия возбуждающего колебания.

При ударе обобщенные скорости изменяются в соответствии с уравнениями

$$\Delta(\partial L/\partial q_i^{\cdot})=0,\quad q_1=\alpha,\quad q_2=\beta,\quad q_3=\theta,\quad q_4=\psi \tag{1.6}$$

к которым надо добавить условие $y_G^{\cdot+}=-y_G^{\cdot-}$, выражающее синфазность соударений. Знаки минус и плюс соответствуют началу и концу удара. Поскольку квадратичная по скоростям часть лагранжиана (1.1) не зависит от ν, ε, приведенные соотношения также оказываются инвариантными.

Следовательно, условия устойчивости τ — периодических решений (1.2), (1.5) одинаковы как при наличии колебаний точки подвеса, так и в их отсутствие (в последнем случае $R=1$). Второй из этих случаев исследован в [6], результаты которой без изменений переносятся на рассматриваемый здесь случай. Различие состоит лишь в том, что при $R<1$ периодические движения существуют не при любых $\varkappa$, а при выполнении условия (1.4).

Можно, в частности, сделать вывод о возможной дестабилизации перманентных вращений при сколь угодно малых ε вследствие параметрического резонанса.

2. Пусть теперь тело подвешено на двух нитях, верхние концы $A_{1,2}$ которых прикреплены к прямой, параллельной оси X и совершающей описанные колебания. Форму тела будем считать произвольной, а точки крепления нитей $A_{1,2}'$ и точка G не лежат на одной прямой.

Функция Лагранжа и наложенные на систему неудерживающие связи имеют вид

$$L={}^1/_2 m(x_G^{\cdot 2}+y_G^{\cdot 2}+z_G^{\cdot 2})+{}^1/_2(\boldsymbol{\omega}, J\boldsymbol{\omega})-mgy_G \tag{2.1}$$

$$2a_1f_1=a_1^2-(\mathbf{r}_G+\mathbf{b}_1U-\mathbf{r}_1)^2\geqslant 0,\quad 2a_2f_2=a_2^2-(\mathbf{r}_G+\mathbf{b}_2U-\mathbf{r}_2)^2\geqslant 0$$

$$\mathbf{r}_G=(x_G, y_G, z_G),\quad \mathbf{r}_1=(0, \varepsilon\sin\nu t, 0),\quad \mathbf{r}_2=(d, \varepsilon\sin\nu t, 0)$$

$$\omega_1=\varphi^\cdot\sin\theta\sin\varphi+\theta^\cdot\cos\varphi,\quad \omega_2=\psi^\cdot\sin\theta\cos\varphi-\theta^\cdot\sin\varphi$$

$$\omega_3=\varphi^\cdot+\psi^\cdot\cos\theta,\quad U=\|u_{ij}\|,\quad u_{11}=\cos\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\psi\sin\varphi$$

$$u_{12}=\sin\psi\cos\varphi+\cos\theta\cos\psi\sin\varphi,\quad u_{13}=\sin\theta\sin\varphi,$$

$$u_{21}=-\cos\psi\sin\varphi-\cos\theta\sin\psi\cos\varphi,\quad u_{22}=-\sin\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\psi\cos\varphi,$$

$$u_{23}=\sin\theta\cos\varphi,\quad u_{31}=\sin\theta\sin\psi,\quad u_{32}=-\sin\theta\cos\psi,\quad u_{33}=\cos\theta$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела, J — тензор инерции, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ — векторы $GA_{1,2}'$ в связанных осях, U — матрица ориентации, θ, ψ, φ — углы Эйлера, $\mathbf{r}_{1,2}$ — векторы OA_1, OA_2 в инерциальных осях, a_1, a_2 — длины натянутых нитей, d — расстояние между точками A_1 и A_2 (фиг. 2, *а*).

Уравнения движения представим в виде

$$d(\partial L/\partial\mathbf{q}^\cdot)/dt-\partial L/\partial\mathbf{q}=\lambda_1\nabla f_1+\lambda_2\nabla f_2 \tag{2.2}$$

$$\lambda_{1,2}\geqslant 0,\quad \mathbf{q}=(x_G, y_G, z_G, \theta, \psi, \varphi)$$

Определим условия равновесия тела в отсутствие колебаний оси подвеса ($\varepsilon=0$). Если обе нити натянуты, $\lambda_{1,2}>0$, то в равновесии $\mathbf{q}^\cdot\equiv 0$, вследствие чего $\lambda_1\nabla f_1+\lambda_2\nabla f_2+\mathbf{P}=0$, где $\mathbf{P}$ — сила тяжести. Отсюда можно сделать вывод, что точки A_1', A_2', G лежат в плоскости $Z=0$, а углы, описывающие конфигурацию системы (фиг. 2, *б*), удовлетворяют соотношению $b_1\cos\varphi_2\sin\varphi_3+b_2\cos\varphi_1\sin\varphi_4=0$. Данные условия выполняются в двух случаях — при расположении точки G ниже или выше прямой $A_1'A_2'$. При положении точки G ниже прямой $A_1'A_2'$ равновесие устойчиво согласно принципу Торричелли.

Наличие колебаний оси подвеса ($\varepsilon\neq 0$) приводит к движению системы в плоскости XY. Если интенсивность возбуждения $\varkappa$ в (1.4) меньше единицы, то конфигурация системы все время может оставаться неизменной.

Иначе обстоит дело в случае $\varkappa>1$: натяжение нитей при этом в некоторый момент ослабляется, что приводит к ударам о связи, в том числе и двойным. Как показано в [7], определяющую роль в ходе кратного удара о неудерживающие связи $f_1\geqslant 0$, $f_2\geqslant 0$ играет величина угла α между поверхностями $f_1=0$ и $f_2=0$ в метрике, определяемой при помощи матрицы M кинетической энергии системы:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})=\mathbf{u}M\mathbf{v}^T \tag{2.3}$$

В случае удара уравнения (2.2) принимают вид

$$\Delta\partial L/\partial\mathbf{q}^\cdot=\Lambda_1\nabla f_1+\Lambda_2\nabla f_2 \tag{2.4}$$

где $\Lambda_{1,2}$ — ударные импульсы нитей. Из соотношения (2.4) следует, что $\Delta\mathbf{q}^\cdot=\Lambda_1\mathbf{N}_1+\Lambda_2\mathbf{N}_2$, где $\mathbf{N}_i=\nabla f_i\cdot M^{-1}$ ($i=1, 2$). Учитывая, что $f_i^\cdot=\mathbf{q}^\cdot(\nabla f_i)^T$, получим уравнения удара о две связи в виде

$$\Delta f_1^\cdot=\Lambda_1(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_1)+\Lambda_2(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2),\quad \Delta f_2^\cdot=\Lambda_1(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)+\Lambda_2(\mathbf{N}_2, \mathbf{N}_2) \tag{2.5}$$

В окрестности двойного удара связи напрягаются не одновременно. Если сначала происходит удар о первую связь, то в (2.5) оказывается $\Lambda_2=0$, а Λ_1 определяется из граничного условия $\Delta f_1^{\cdot}=-(1+R_1)f_1^{\cdot -}$; при этом изменится (если $(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)\neq 0$) и величина $f_2^{\cdot}$. Затем происходит удар о вторую связь, и повторные удары продолжаются до окончания кратного удара [7]. При этом в общем случае величины Λ_1, Λ_2 зависят от последовательности повторных соударений, вследствие чего двойные удары приводят к дестабилизации системы.

Действительно, при выполнении условий равновесия реакции нитей определены однозначно. Для сохранения ориентации тела при ударах необходимо, чтобы ударные импульсы были пропорциональны этим равновесным значениям. Бифуркация в связи с двояким ходом двойного удара исключает возможность сохранения такой пропорциональности на обеих ветвях. Поэтому конфигурация системы разрушается.

Особыми случаями, когда двойной удар определен корректно, являются следующие два: ортогональные связи $((\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)=0)$ и стопорный (т. е. абсолютно неупругий, несмотря на упругий характер каждой из связей в отдельности) удар. Предполагая упругие свойства нитей одинаковыми $(R_1=R_2=R)$, запишем условие стопорного удара в виде

$$2\operatorname{tg}\alpha<R^{-1/2}(1-R) \tag{2.6}$$

Для определения угла α между поверхностями $f_1=0$ и $f_2=0$ введем связанную с телом систему координат $GX'Y'Z'$, направляя в положении равновесия оси $X'\|Y$, $Y'\|Z$, $Z'\|X$ (фиг. 2, a), при этом матрица J не обязательно диагональна. Тогда в равновесии

$$\theta=\frac{\pi}{2},\quad \psi=\frac{\pi}{2},\quad \varphi=0,\quad U=\begin{Vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{Vmatrix},\quad M=\begin{Vmatrix}mE_3&O_3\\O_3&J\end{Vmatrix}.$$

где O_3 и E_3 — нулевая и единичная матрицы третьего порядка.

Угол α определим как дополнительный по π к углу между $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ — нормальным векторам к поверхностям $f_1=0$ и $f_2=0$ в смысле определения (2.3). Учитывая, что в положении равновесия

$$\nabla f_1=(\cos\varphi_1,\ \sin\varphi_1,\ 0,\ 0,\ -b_1\sin\varphi_3,\ 0)$$

$$\nabla f_2=(\cos\varphi_2,\ \sin\varphi_2,\ 0,\ 0,\ b_2\sin\varphi_4,\ 0)$$

получим окончательно следующее выражение

$$\cos\alpha=[-\cos(\varphi_1-\varphi_2)+mb_1b_2J_{22}^{-1}\sin\varphi_3\sin\varphi_4]\times$$
$$\times(1+mb_1^2J_{22}^{-1}\sin^2\varphi_3)^{-1/2}(1+mb_2^2J_{22}^{-1}\sin^2\varphi_4)^{-1/2} \tag{2.7}$$

Если связи ортогональны, $\cos\alpha=0$, то существуют такие периодические движения тела, при которых его ориентация не изменяется, а поведение точки G такое же, как для периодических движений, рассмотренных в п. 1 (фиг. 1).

Действительно, двойные удары описываются системой (2.5). Для ортогональных связей $(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)=0$, $\Delta f_i^{\cdot}=-(1+R_i)f_i^{\cdot -}$ $(i=1, 2)$ и, как можно убедиться, при выполнении условия (2.2) оказывается $\Delta x_G^{\cdot}=\Delta z_G^{\cdot}=\Delta\theta^{\cdot}=\Delta\psi^{\cdot}=\Delta\varphi^{\cdot}=0$.

При выполнении условия (2.4) стопорного удара в (2.5) надо считать, что $\Delta f_i^{\cdot}=-f_i^{\cdot -}$ $(i=1, 2)$, так как $f_i^{\cdot +}=0$. Можно проверить, что и в этом случае двойной удар в положении равновесия (2.2) не изменяет ориентацию тела. Поэтому существует такое периодическое движение периода $\tau=2\pi/\nu$, которое состоит из чередующихся участков напряженного и ослабленного состояния нитей; ослабление нитей происходит в такой фазе t_0, что $\sin\nu t_0=\varkappa^{-1}$ (напомним, что рассматривается случай $\varkappa>1$), а напряжение в фазе t_1 сопровождается стопорным ударом (фиг. 3).

Условия ортогональности и стопорного удара связывают геометрическую конфигурацию системы с динамическими характеристиками тела, а второе из них включает также упругие свойства нитей.

Например, если масса тела сосредоточена в двух точках A_1', A_2' («гантель»), то ортогональность означает, что в равновесии хотя бы одна из нитей перпендикулярна отрезку $A_1'A_2'$. Стопорный удар реализуется, если углы φ_3, φ_4 одновременно достаточно близки к нулю или к π [7].

Другим примером служит случай $\varphi_1+\varphi_2=\pi$, $\varphi_1\neq\pi/2$. При этом $b_1\sin\varphi_3=$ $=b_2\sin\varphi_4$ и $|N_1|=|N_2|$. Соотношение (2.7) принимает вид

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\varphi_1/(1+k),\quad k=mb_1^2J_{22}^{-1}\sin^2\varphi_3$$

В плоскости параметров k, $\sin\varphi_1$ условие ортогональности изображается отрезком параболы $2\sin^2\varphi_1=1+k$, а условие стопорного удара (2.4) — областью $2[1+R^{-1}(1-R)^2]^{1/2}\sin^2\varphi_1<1+k$.

3. Особенностью исследования устойчивости периодических движений, описанных в п. 2, является необходимость учета кратных ударов о связи. Проведем такое исследование при следующих дополнительных предположениях о параметрах системы.

Будем считать, что в положении равновесия нити вертикальны ($\varphi_1=$ $=\varphi_2=\pi/2$), $a_1=a_2=a$, $b_1=b_2=b$, а ось GY' является одной из главных осей центрального эллипсоида инерции тела.

При сделанных предположениях уравнения в вариациях переменных x_G, y_G, ψ, описывающих движение в плоскости $Z=0$, отделяются от остальных уравнений движения. Рассмотрим плоское движение, считая $\delta z_G=$ $=\delta\theta=\delta\varphi=0$. Заметим, что, как и в п. 1, величину $y_G^{\cdot}$ можно считать неизменной.

Пусть в положении равновесия выполнено неравенство (2.6). Тогда и для достаточно малых возмущений удар о связи будет иметь стопорный характер, и соответствующее движение, как и невозмущенное, состоит из участков напряженных связей, перелетов и ударов.

На участке напряженных связей выполняются кинематические соотношения

$$\varphi_1=\varphi_2,\quad \psi=\pi/2,\quad x_G=-a\cos\varphi_1+b\cos\xi \tag{3.1}$$

где ξ — угол $A_2'A_1'G$ (равный углу $A_1'A_2'G$).

Вследствие (3.1) для описания конфигурации системы достаточно одной переменной $\eta=\delta x_G$. Уравнения (2.2) с учетом (3.1) выглядят так:

$$m\eta^{\cdot\cdot}=(\lambda_1+\lambda_2)\cos\varphi_1,\quad m(y_G^{\cdot\cdot}-y_{A_1}^{\cdot\cdot})=(\lambda_1+\lambda_2)\times$$
$$\times\sin\varphi_1-g(1-\varkappa\sin\nu t),\quad \lambda_1\sin(\varphi_1+\xi)=\lambda_2\sin(\varphi_1-\xi) \tag{3.2}$$

Вследствие третьего из уравнений (3.2) ослабление связей происходит одновременно (так как из $\lambda_1>0$ следует $\lambda_2>0$ и обратно) в момент, близкий к t_0. Поскольку при этом $\psi^{\cdot}=0$, то и в полете $\psi\equiv\pi/2$. Поэтому исследование устойчивости сводится к изучению поведения одной переменной η.

Как видно из третьего уравнения в (3.1), $\eta\cos\varphi_1\leqslant0$. Поэтому первое уравнение в (3.2) в первом приближении можно записать в виде

$$\eta^{\cdot\cdot}+p(t)\eta=0,\quad p(t)\geqslant0 \tag{3.3}$$

где $p(t)=g(1-\varkappa\sin\nu t)/a$ при напряженных связях, $p(t)=0$ при перелетах и $p(t)=m^{-1}(\Lambda_1+\Lambda_2)\delta(t-t_1)$ при двойном ударе (δ — дельта-функция Дирака). Применим к уравнению (3.3) критерий Ляпунова [8], согласно которому для устойчивости достаточно выполнения неравенств

$$p\geqslant0,\quad \tau\int_0^\tau p(t)\,dt<4,\quad \tau=2\pi/\nu \tag{3.4}$$

Если частота колебаний оси подвеса высока и $\tau\ll1$, но в то же время интенсивность возбуждения $\varkappa$ не превосходит нескольких единиц (что имеет место в реальных условиях), то неравенства (3.4) выполнены. Следовательно, периодические движения со стопорными ударами в первом приближении устойчивы.

Заметим, что эта устойчивость обусловлена неудерживающим характером подвеса: для жесткого крепления уравнение (3.3) может быть неустойчивым [1].

Для другого типа периодических движений — с ударами об ортогональные связи — период движения кратен $2\pi/\nu$ и не обязательно мал при $\nu \gg 1$.

Выражение (2.7) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\cos \alpha = (-1 + mb^2 J_{22}^{-1} \sin \varphi_3 \sin \varphi_4) |\mathbf{N}_1|^{-1} |\mathbf{N}_2|^{-1}$$

Если $1 = mb^2 J_{22}^{-1} \sin \varphi_3 \sin \varphi_4$, то $\cos \alpha = 0$. Можно проверить, что для малых отклонений нитей от вертикали разность $1 - mb^2 J_{22}^{-1} \sin \varphi_3 \sin \varphi_4$ имеет второй порядок малости. Поэтому поверхности $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$ ортогональны не только в положении равновесия, но (в первом приближении) и в некоторой его окрестности. Это свидетельствует в силу соотношений (2.5) о взаимной независимости ударных импульсов Λ_1 и Λ_2. Последние зависят, однако, от фазы возбуждающего колебания, в которой происходят соударения.

Вследствие асимптотической устойчивости соударений в фазе t_0 (фиг. 1) происходит такая самосинхронизация системы, что $\psi \to \pi/2$. Поэтому и в этом случае достаточно изучить поведение переменной η. Пусть η_0, $\eta_0^{\bullet}$ — значения в фазе t_0. Тогда на интервале $(t_0, t_0 + \tau)$ ослабления связей будем иметь $\eta = \eta_0 + t\eta_0^{\bullet}$, $\eta^{\bullet} = \eta_0^{\bullet}$. В момент $t_0 + \tau$ происходит двойной удар, и в соответствии с (2.4), (3.2) получаем $\Delta\eta_k^{\bullet} = -\Phi\eta_k$, где $\eta_k = \eta_0 + \tau\eta_0^{\bullet}$, $\Phi = (\Lambda_1 + \Lambda_2)/m$. Необходимое условие устойчивости будет $0 < \tau\Phi < 4$. Учитывая, что при ударе $y_G^{\bullet +} = -y_G^{\bullet -} = g\tau/2$ и что вследствие (1.5) $f_1^{\bullet -} = f_2^{\bullet -} = -\tau g(1+R)^{-1}$, получаем из (2.5) $\Phi = \tau g/a$. Условие устойчивости принимает вид

$$g\tau^2 < 4a \tag{3.5}$$

что совпадает с условием устойчивости периодических подскоков материальной точки, закрепленной на нити при неподвижном подвесе [9].

Пространственные переменные z_G, θ, φ в первом приближении не принимают участия в формировании реакций $\lambda_{1,2}$ и ударных импульсов. Кроме того, в силу третьего из уравнений (3.2) в нулевом приближении $\lambda_1 = \lambda_2$. Поэтому уравнения в вариациях $z = \delta z_G$, $\zeta = \delta\theta$, $\mu = \delta\varphi$ выглядят так

$$\begin{gathered} mz^{\bullet\bullet} = 2a^{-1}\lambda_1(t)(z + b\mu \sin \xi) \\ J_{11}\zeta^{\bullet\bullet} + J_{13}\mu^{\bullet\bullet} = -2a^{-1}\lambda_1(t) b^2 \zeta \cos^2 \xi \\ J_{13}\zeta^{\bullet\bullet} + J_{33}\mu^{\bullet\bullet} = -2a^{-1}\lambda_1(t) b \sin \xi (a\mu + z + b\mu \sin \xi) \end{gathered} \tag{3.6}$$

Систему (3.6) можно представить в виде

$$\mathbf{Q}^{\bullet\bullet} = \lambda_1(t) \mathbf{Q} S, \quad \mathbf{Q} = (z, \zeta, \mu) \tag{3.7}$$

где постоянная матрица S определена знакоотрицательно. В случае движения со стопорными ударами система (3.7) распадается на три скалярных уравнения, каждое из которых при достаточно малых значениях τ удовлетворяет условиям (3.4). Следовательно, в этом случае возмущение пространственных переменных не приводит к неустойчивости.

Для случая движения с ударами об ортогональные связи фундаментальная матрица решений для переменных $\mathbf{Q}_r$ записывается следующим образом

$$X(\tau) = \left\| \begin{matrix} E_3 & \tau E_3 \\ \Lambda_1 S & E_3 + \tau\Lambda_1 S \end{matrix} \right\|, \quad \Lambda_1 = \frac{mg\tau}{2a}$$

Помимо неравенства (3.5), для устойчивости необходимо, чтобы собственные значения матрицы $X(\tau)$ лежали на единичной окружности комплексной плоскости. Для проверки этого условия заметим, что характеристическое уравнение $\det\|X(\tau) - \rho E_6\| = 0$ эквивалентно уравнению

$$\det\|(1-\rho)^2 E_3 - \tau\Lambda_1 \rho S\| = 0 \tag{3.8}$$

Деля обе части уравнения (3.8) на ρ^3, получим равенство

$$\det\|\tau\Lambda_1 S-(\rho+\rho^{-1}-2)E_3\|=0$$

из которого следует, что величина $\rho+\rho^{-1}-2$ отрицательна, так как она является собственным значением отрицательно определенной матрицы $\tau\Lambda_1 S$. Для устойчивости необходимо, чтобы наибольшее собственное значение этой матрицы было больше чем -4. Данное условие выполняется при достаточно малых значениях τ.

Таким образом, при малых высокочастотных колебаниях оси подвеса положения равновесия тела, висящего на двух струнах, устойчивы в двух случаях: если в (2.7) $\cos\alpha=0$ или если угол α удовлетворяет неравенству (2.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588–597.
2. *Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А., Темченко М. Е.* О движении осесимметричного тела, подвешенного на струне // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 6. С. 3–16.
3. *Румянцев В. В.* К динамике твердого тела, подвешенного на струне // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 5–15.
4. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
5. *Кобринский А. А., Кобринский А. Е.* Двумерные виброударные системы. М.: Наука, 1981. 335 с.
6. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
7. *Иванов А. П.* Об ударах в системе с несколькими неудерживающими связями // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 559–566.
8. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
9. *Иванов А. П.* Об устойчивости перманентных вращений тела, подвешенного на струне, при наличии ударных взаимодействий // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 47–50.

Москва

Поступила в редакцию 24.IV.1987