МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1989

УДК 531.38

В. Б. ЛАРИН

СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Используя математический аппарат оптимальных матриц, описывающих линейные системы [1, 2], рассматриваются задача определения локальной ориентации [2] и задача оптимальной коррекции результатов интегрирования кинематических уравнений [3]. Для решения этих задач применяется стандартный вычислительный алгоритм метода наименьших квадратов – метод сингулярного разложения матрицы, что позволяет избавиться от вычислительных особенностей возникающих при других подходах. Подробно рассмотрены случаи определения ориентации по результатам измерения только двух векторов и уточнения уже имеющейся информации о положении тела. Показано, что отличие оптимизируемых функционалов в настоящей работе и в [3] не влияет на структуру оптимальной коррекции результатов интегрирования кинематических уравнений движения твердого тела.

1. Метод сингулярного разложения матрицы. Рассмотрим задачу [2] определения ориентации (матрицы перехода от абсолютной системы координат к связанной) твердого тела по результатам измерений в момент времени $t=t^*$ проекций на связанные оси системы неколлинеарных векторов $\mathbf{h}_i=[h_{i1}, h_{i2}, h_{i3}]^T$, положение которых в абсолютной системе координат $\mathbf{m}_i=[m_{i1}, m_{i2}, m_{i3}]^T$ $(i=1, 2,\ldots, n)$ известно в этот же момент времени (знак T означает операцию транспонирования). Задача состоит в выборе ортогональной матрицы A доставляющей минимум функционалу (μ_i^{-2} — весовые множители):

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-2}(A\mathbf{m}_i-\mathbf{h}_i)^T(A\mathbf{m}_i-\mathbf{h}_i)$$

В случае обратимости матрицы

$$G=\sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}\mathbf{h}_i\mathbf{m}_i^T$$

решение задачи имеет вид [2]:

$$A=P^{-1}G \tag{1.1}$$

где симметрическая матрица P удовлетворяющая уравнению

$$P^2=GG^T \tag{1.2}$$

должна иметь максимальный след и $\det A=1$. Дальнейшие исследования [4–6] были направлены, в частности, на создание вычислительных алгоритмов, которые позволили бы находить матрицу A и в случае вырожденной G, причем решения разыскивались как в виде матрицы перехода [6] так и в виде параметров Родрига – Гамильтона [4, 5]. В последнем случае получено аналитическое решение при измерении двух векторов.

Предполагая, что рассматриваемая задача имеет решение (необходимые и достаточные условия однозначного определения ориентации приведены в [2]), покажем возможность использования при ее решении стандартного вычислительного алгоритма метода наименьших квадратов —

метода сингулярного разложения [7, 8]. Этот подход позволяет избежать особенности, связанные с вырожденностью матрицы G.

Пусть матрица G имеет полный ранг. Сингулярное разложение матрицы G имеет вид [7]:

$$G=U\Sigma V^T, \quad UU^T=VV^T=E \tag{1.3}$$

где E — единичная матрица, а $\Sigma=\mathrm{diag}\|\sigma_1, \ \sigma_2, \ \sigma_3\|$, причем $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3>0$. Считая известным разложение (1.3), рассмотрим следующее представление матрицы G:

$$G=U_*\Sigma_*V_*^T \tag{1.4}$$

$$U_*=UD_u, \quad V_*^T=D_vV^T, \quad \Sigma_*=D_u\Sigma D_v$$

$$D_u=\mathrm{diag}\|1, \ 1, \ \det U\|, \quad D_v=\mathrm{diag}\|1, \ 1, \ \det V\|$$

Очевидно, $\det U_*=\det V_*=1$. В терминах этого представления $GG^T=U_*\Sigma^2U_*^T$ и решение матричного алгебраического уравнения Риккати (1.2) можно записать в виде

$$P=U_*(\Sigma^2)^{1/2}U_*^T \tag{1.5}$$

Среди решений (1.5) отметим два решения P_+ и P_-, имеющих максимальный след, если $\det P>0$ и $\det P<0$ соответственно:

$$P_+=U_*\Sigma U_*^T, \quad P_-=U_*\Sigma_-U_*^T$$

$$\Sigma_-=\mathrm{diag}\|\sigma_1, \ \sigma_2, \ -\sigma_3\|$$

Полученные соотношения позволяют преобразовать (1.1). Пусть $\det G>0$, $\Sigma_*=\Sigma$, тогда в соотношении (1.1) следует использовать P_+ и, принимая во внимание (1.4), найдем, что искомая матрица A имеет вид

$$A=P_+^{-1}G=U_*V_*^T=UD_uD_vV^T \tag{1.6}$$

Если $\det G<0$, то, согласно (1.4) можно принять, что $\Sigma_*=\Sigma_-$. Так как в этом случае в качестве решения (1.2) следует выбирать P_-, то снова имеем

$$A=P_-^{-1}G=U_*V_*^T=UD_uD_vV^T \tag{1.7}$$

Выражения (1.6), (1.7) можно записать так

$$A=UI_\alpha V^T, \quad I_\alpha=\mathrm{diag}\|1, \ 1, \ \alpha\| \tag{1.8}$$

причем, выбором значения $\alpha=\pm1$ обеспечивается выполнение условия $\det A=1$.

Таким образом в случае $\det G\neq0$, алгоритм определения локальной ориентации сводится к построению сингулярного разложения (определению матриц U и V) матрицы G и последующему их перемножению в соответствии с (1.8). Существенно, что в (1.8) не фигурирует Σ^{-1}. Это дает возможность использовать (1.8) и в случае $\det G=0$, но, при этом, соотношение (1.8) следует понимать, как результат предельного перехода в соответствующей возмущенной задаче в которой $\det G\neq0$. Например, если ранг G равен двум (как показано в [2] решение задачи существует и единственно) то σ_1, $\sigma_2>0$, $\sigma_3=0$. Матрица Σ^{-1} не существует, поэтому (1.8) следует понимать как результат предельного перехода ($\sigma_3\to0$) возмущенной задачи ($\sigma_3>0$). Другими словами, алгоритм определения локальной ориентации, задаваемый соотношением (1.8), справедлив в общем случае. Отметим, что полученное в [6] решение уравнения Риккати (1.2) в приведенных здесь обозначениях соответствует P_+. Следовательно в [6] решена задача определения ориентации, только если $\det G\geqslant0$.

2. Случай $\det G\geqslant0$. Если $\det G>0$ (в соотношении (1.8) $I_\alpha=E$) для определения матрицы A можно использовать процедуру, аналогичную [9]:

$$A=\lim_{k\to\infty}A_k, \quad A_{k+1}={}^1/_2[A_k+(A_k^T)^{-1}] \tag{2.1}$$

$$(k=0, 1, 2, \ldots) \quad A_0=G$$

Действительно, в случае $\det G>0$ согласно (1.4) $\Sigma_*=\Sigma>0$. Поэтому $A_k=U_*\Sigma_k V_*^T$ причем матрицы Σ_k определяются следующей рекуррентной схемой

$$\Sigma_{k+1}={}^1/_2[\Sigma_k+\Sigma_k^{-1}],\quad \Sigma_0=\Sigma,\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots) \tag{2.2}$$

предел которой $\lim_{k\to\infty}\Sigma_k=\operatorname{sgn}\Sigma=E$ [9]. Следовательно $\lim_{k\to\infty}A_k=U_*V_*^T=A$ в случае $\det G>0$.

Для повышения скорости сходимости алгоритма (2.1) можно использовать известные варианты метода вычислений матричной sgn — функции. Например, вычислить $\operatorname{sgn}\Sigma$ следующим образом [10]:

$$\Sigma_{k+1}=\alpha_k\Sigma_k+\beta_k\Sigma_k^{-1},\quad \alpha_k=[(\det\Sigma_k)^{1/3}+1]^{-1}$$

$$\beta_k=1-\alpha_k,\quad \Sigma_0=\Sigma$$

что позволяет соответствующим образом изменить процедуру (2.1) вычисления A_k:

$$A_{k+1}=\alpha_kA_k+\beta_k(A_k^T)^{-1},\quad \alpha_k=[(\det A_k)^{1/3}+1]^{-1} \tag{2.3}$$

$$\beta_k=1-\alpha_k,\quad A_0=G$$

Отметим, что эта процедура (после соответствующей модификации) может быть использована и в случае $\det G=0$. Суть модификации состоит в замене задачи, для которой $\det G=0$, эквивалентной задачей, для которой $\det G>0$. Рассмотрим это на примере наблюдения двух векторов $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$, образами которых являются векторы $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$. В этом случае матрица G имеет вид

$$G=\mathbf{h}_1\mathbf{m}_1^T/\mu_1+\mathbf{h}_2\mathbf{m}_2^T/\mu_2,\qquad \det G=0$$

Путем векторного перемножения $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$ пополним исходную систему векторов, т. е. рассмотрим задачу со следующей матрицей $G_0=G+(\mathbf{h}_1\times\mathbf{h}_2)(\mathbf{m}_1\times\mathbf{m}_2)^T$, определитель которой больше нуля если векторы $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$ не коллинеарны. Решение исходной задачи можно получить воспользовавшись рекуррентной схемой (2.1) или (2.3) (в качестве матрицы A_0 следует выбрать G_0) если матрицы G и G_0 диагонализируются одной и той же парой унитарных матриц U и V, а именно

$$U^TGV=\Sigma,\qquad U^TG_0V=\Sigma_1,\qquad UU^T=VV^T=E \tag{2.4}$$

Σ и Σ_1 диагональные матрицы, причем $\Sigma_1>0$. Для установления этого факта достаточно проверить коммутируемость матриц GG^T и $G_0G_0^T$, G^TG и $G_0^TG_0$, так как в этом случае [11] матрицы GG^T и $G_0G_0^T$ (G^TG и $G_0^TG_0$) диагонализируются одним и тем же унитарным преобразованием и, следовательно, справедливы соотношения (2.4). Покажем коммутируемость GG^T и $G_0G_0^T$ (коммутируемость матриц G^TG и $G_0^TG_0$ устанавливается аналогичным образом). Преобразим матрицу $(\mathbf{h}_1\times\mathbf{h}_2)(\mathbf{m}_1\times\mathbf{m}_2)^T$ воспользовавшись матричной записью векторного произведения [12]:

$$\Lambda=(\mathbf{h}_1\times\mathbf{h}_2)(\mathbf{m}_1\times\mathbf{m}_2)^T=\lambda(\mathbf{h}_1)\mathbf{h}_2\mathbf{m}_2^T\lambda^T(\mathbf{m}_1)=\lambda(\mathbf{h}_2)\mathbf{h}_1\mathbf{m}_1^T\lambda^T(\mathbf{m}_2)$$

$$\lambda(\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{b},\quad \lambda(\mathbf{a})=\begin{Vmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{Vmatrix},\quad \mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}$$

Соответственно, $G_0=G+\Lambda$, причем $G^T\Lambda=G\Lambda^T=0$ так как $\lambda(\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}=0$. Следовательно, $GG^TG_0G_0^T=G_0G_0^TGG^T=GG^TGG^T$. Таким образом, при соответствующей модификации (выборе в качестве A_0 матрицы G_0) алгоритм (2.3) дает решение задачи и в случае измерения только двух векторов.

В общем случае вычислительная процедура может быть существенно упрощена если известно приближенное решение задачи (ортогональная матрица A_* мало отличающаяся от истинной матрицы A). Представив матрицу G в виде

$$G=\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i^{-1}\mathbf{h}_i\mathbf{m}_i^TA_*^T\right)A_*=G_*A_*$$

решение уравнения (1.2) запишем так

$$P=G_*(E+\varepsilon T)$$

где εT — малая кососимметричная матрица. Действительно, пусть матрица A определяется (1.8), а матрица A_* имеет вид

$$A_*=(E+\varepsilon U_1)U_*I_\alpha V_*^{\mathrm{T}}(E+\varepsilon V_1)\simeq A+\varepsilon U_1 A+A\varepsilon V_1$$

где εU_1, и εV_1 малые кососимметрические матрицы. Принимая во внимание, что согласно (1.1) $PA=G$ имеем

$$G_*=GA_*^{\mathrm{T}}\simeq P(E-\varepsilon U_1-A\varepsilon V_1 A^{\mathrm{T}})=P(E-\varepsilon T)$$

Условие $P=P^{\mathrm{T}}$ приводит к уравнению Ляпунова относительно матрицы εT:

$$G_*\varepsilon T+\varepsilon T G_*^{\mathrm{T}}=G_*^{\mathrm{T}}-G_* \tag{2.5}$$

Если решение этого уравнения единственно то окончательное выражение для матрицы A имеет вид

$$A=(E-\varepsilon T)A_* \tag{2.6}$$

и для нахождения матрицы εT фактически необходимо решить систему трех линейных уравнений.

Отметим, что решение уравнения (2.5) может существовать и быть единственным если ранг матрицы G_* равен двум. Для проверки этого факта достаточно найти выражение для определителя системы уравнений определяющей элементы матрицы εT или подобной ей. Пусть унитарная матрица W приводит G_* к форме Шура

$$WG_*W^T=D=\begin{Vmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{Vmatrix}$$

Соответственно, подобная εT матрица θ имеет вид

$$W\varepsilon TW^T=\theta=\begin{Vmatrix} 0 & \theta_1 & \theta_2 \\ -\theta_1 & 0 & \theta_3 \\ -\theta_2 & -\theta_3 & 0 \end{Vmatrix}$$

Согласно (2.5) матрицы θ и D связаны уравнением $D\theta+\theta D^{\mathrm{T}}=D^{\mathrm{T}}-D$, поэтому

$$(d_{11}+d_{22})\theta_1=d_{21},\quad d_{32}\theta_1+(d_{11}+d_{33})\theta_2=d_{31}$$

$$d_{31}\theta_1+d_{21}\theta_2+(d_{22}+d_{33})\theta_3=d_{32}$$

Определитель этой системы равен $(d_{11}+d_{22})(d_{11}+d_{33})(d_{22}+d_{33})$, следовательно, он может отличаться от нуля если один из диагональных элементов матрицы D равен нулю (ранг матрицы G_* равен двум).

3. Коррекция результатов интегрирования кинематических уравнений. Рассмотренный выше алгоритм можно ипользовать при определении ориентации твердого тела по результатам интегрирования кинематических уравнений (известны проекции вектора угловой скорости на оси подвижной системы координат) и коррекции этих результатов по измерениям проекций на подвижные оси одного или нескольких векторов, положение которых известно в неподвижной системе координат. Кратко остановимся на простейшем варианте такого рода задач, а именно, будем предполагать, что коррекция результатов интегрирования осуществляется по данным измерения одного вектора, положение которого фиксировано в неподвижной системе координат [3]. Пусть в результате интегрирования кинематических уравнений известно, с некоторой погрешностью, положение твердого тела в момент времени t_i (ортогональная матрица A_{i*} определяющая переход от неподвижного ортонормированного базиса $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$, $\mathbf{m}_3$ к подвижному ортонормированному базису $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{h}_3$). В этот же момент доступна информация о направлении в подвижной системе координат вектора $\mathbf{h}_4$, положение которого известно в неподвижной системе координат (вектор $\mathbf{m}_4$). Необходимо определить матрицу A_i, минимизирующую следующий функционал:

$$J=\sum_{j=1}^{3}(A_i\mathbf{m}_j-\mathbf{h}_j)^T(A_i\mathbf{m}_j-\mathbf{h}_j)+\mu^{-2}(A_i\mathbf{m}_4-\mathbf{h}_4)^T(A_i\mathbf{m}_4-\mathbf{h}_4) \qquad (3.1)$$

Соответствующая этому функционалу матрица G имеет вид

$$G=A_{i*}+\mathbf{h}_4\mathbf{m}_4^T/\mu \qquad (3.2)$$

и для определения матрицы A_i можно использовать соотношение (1.8) или (2.3), если $\det G>0$ в случае слабой коррекции результатов интегрирования (матрица A_{i*} является достаточно хорошим приближением к A_i) эффективны соотношения (2.5), (2.6):

$$G_*\varepsilon T+\varepsilon TG_*^T=G_*^T-G_* \qquad (3.3)$$

$$G_*=E+\mu^{-1}h_4m_4^TA_{i*}, \quad A_i=(E-\varepsilon T)A_{i*}^T \qquad (3.4)$$

В этом случае решение уравнения (3.3), а следовательно, и выражение для матрицы A_i можно найти в явном виде. Покажем,

$$\varepsilon T=\gamma(G_*^T-G)=\gamma(\mathbf{h}_{4*}\mathbf{h}_4^T-\mathbf{h}_4\mathbf{h}_{4*}^T) \qquad (3.5)$$

где $\mathbf{h}_{4*}=A_{i*}\mathbf{m}_4$, γ — скаляр, подлежащий определению. Подставив (3.5) в (3.3) найдем, что $\gamma=(2\mu+\mathbf{h}_4^T\mathbf{h}_{4*})^{-1}$. Окончательно

$$A_i=[E+(2\mu+\mathbf{h}_4^T\mathbf{h}_{4*})^{-1}(\mathbf{h}_4\mathbf{h}_{4*}^T-\mathbf{h}_{4*}\mathbf{h}_4^T)]A_{i*} \qquad (3.6)$$

Отметим, что вектор $\mathbf{h}_4\times\mathbf{h}_{4*}$ является собственным вектором матрицы $E+\varepsilon T$, т. е. алгоритм коррекции (3.6), состоит в повороте базиса $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{h}_3$ относительно оси, перпендикулярной векторам $\mathbf{h}_4$ и $\mathbf{h}_{4*}$. Этот принцип коррекции остается справедливым и в случае значительного отличия матриц A_{i*} и A_i. Действительно, пусть $G=G_*A_{i*}$, где G_* определяется соотношением (3.4). Тогда, согласно (1.1), (1.2), $A_i=P^{-1}G_*A_{i*}$, $P^2=G_*G_*^T$. Так как вектор $\mathbf{h}_4\times\mathbf{h}_{4*}=\lambda^T(\mathbf{h}_{4*})\mathbf{h}_4=\lambda(\mathbf{h}_4)\mathbf{h}_{4*}$ является собственным вектором матриц G_* и P^2:

$$G_*\lambda^T(\mathbf{h}_{4*})\mathbf{h}_4=\lambda^T(h_{4*})h_4, \quad G_*G_*^T\lambda(\mathbf{h}_4)\mathbf{h}_{4*}=\lambda(\mathbf{h}_4)\mathbf{h}_{4*}$$

то он является собственным вектором ортогональной матрицы $P^{-1}G_*$ и, следовательно, определяет ось поворота исходного базиса. Таким образом, отличие функционала (3.1) от соответствующего функционала [3] не оказывает влияние на характер оптимальной коррекции [5].

В заключение отметим, что базирующийся на теории оптимальных матриц подход к задачам коррекции может оказаться эффективным, если для коррекции результатов интегрирования кинематических уравнений используется измерение двух и более векторов или когда положение наблюдаемого вектора меняется в неподвижной системе координат. Однако в этих случаях приходится рассматривать более сложную чем (3.2) матрицу G, что, в частности, сделает менее обозримым решение соответствующего аналога уравнения (3.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брок Д. И.* Оптимальные матрицы, описывающие линейные системы.— Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 7, с. 88–92.
2. *Голубков В. В.* Определение локальной ориентации космических аппаратов.— Космич. исслед., 1970, т. 8, № 6, с. 811–822.
3. *Ларин В. Б., Науменко К. И.* Об определении ориентации твердого тела.— Изв. АН СССР, МТТ, 1983, № 3, с. 24–32.
4. *Науменко К. И.* Локальный метод определения ориентации твердого тела.— В кн.: Навигация и управление. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982, с. 121–128.
5. *Науменко К. И.* Наблюдение и управление движением динамических систем. Киев: Наукова думка, 1984,— 206 с.
6. *Катаргин М. Ю.* Алгоритм среднеквадратичной оценки ориентации космических аппаратов и его погрешности.— Космич. исслед., 1986, т. 14, № 6, с. 826.

7. *Лоусон Ч., Хенсон Р.* Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986,— 230 с.
8. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980,— 279 с.
9. *Roberts J. D.* Linear model reduction and solution of the algebraic Riccati equation by use of the Sing — function.— Internat. J. Control, 1980, Vol. 32, N 4, p. 677—687.
10. *Balzer L. A.* Accelerated convergence of the matrix Sing — function method of solving Lyapunov, Riccati and other matrix equation.— Internat. J. Control, 1980, Vol. 32, N 6, p. 1057—1078.
11. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 576 с.
12. *Медведев В. С., Лесков А. Г., Ющенко А. С.* Системы управления манипуляционных роботов. М.: Наука, 1978,— 416 с.

Киев

Поступила в редакцию
26.III.1987