

УДК 531.383

А. Д. ВАЛЬКО, В. А. ГАРАНКИН, В. А. ИСАЕВ,  
С. Е. КУХТЕВИЧ

### ДВИЖЕНИЕ ТРЕХСТЕПЕННОГО ГИРОСКОПА С ДИНАМИЧЕСКИ НЕСБАЛАНСИРОВАННЫМ РОТОРОМ ПРИ КОНТАКТЕ ВНУТРЕННЕЙ РАМКИ С УПРУГИМ ОГРАНИЧИТЕЛЕМ

Рассматривается движение установленного на неподвижном основании трехстепенного гироскопа с динамически несбалансированным ротором и упругими главными опорами. Углы поворота рамок ограничены закрепленным на основании упругим кольцом, в которое входит стержень, установленный на внутренней рамке. Движение описывается системой нелинейных уравнений восьмого порядка. Численным интегрированием найден стационарный режим движения гироскопа, представляющий собой суперпозицию равномерного скольжения стержня по поверхности кольца и высокочастотных конических колебаний, вызванных динамическим небалансом.

**1. Постановка задачи и уравнения движения.** Рассматривается трехстепенной гироскоп в кардановом подвесе, установленный на неподвижном основании. Углы поворота внутренней рамки гироскопа относительно основания ограничены закрепленным на нем упругим кольцом, в которое входит тонкий стержень, установленный на внутренней рамке. Упругой податливостью обладают также опоры осесимметричного ротора гироскопа. Введем следующие системы координат:  $\xi\eta\zeta$  — связана с основанием, причем ось  $\zeta$  ортогональна плоскости кольца;  $x_1y_1z_1$  — связана с внутренней рамкой так, что ось  $z_1$  направлена по оси стержня;  $xuz$  — связана с ротором, но не участвует в его собственном вращении вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega$ .

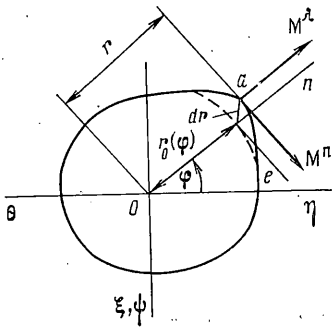
Оси  $x_1y_1z_1$  совпадают с главными центральными осями инерции внутренней рамки, ось  $z_1$  является ее осью динамической симметрии. Главные центральные оси инерции ротора повернуты относительно осей  $x, y, z$  на малый угол  $\varepsilon$ , т. е. ротор обладает динамическим небалансом. Положение систем координат  $xuz$  и  $x_1y_1z_1$  относительно системы  $\xi\eta\zeta$  определяется углами  $\alpha, \beta$  и  $\theta, \psi$  соответственно.

При  $\omega = \text{const}$ , малых углах  $\alpha, \beta, \theta, \psi$  и безинерционной внешней рамке подвеса движение ротора и внутренней рамки описывается уравнениями [1]:

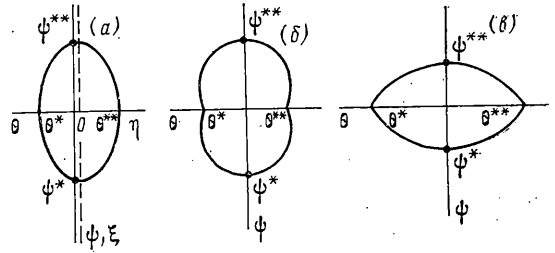
$$\begin{aligned} A\alpha'' + C\omega\beta' + k(\alpha - \theta) &= (C - A)\omega^2\varepsilon \sin \omega t \\ A\beta'' - C\omega\alpha' + k(\beta - \psi) &= -(C - A)\omega^2\varepsilon \cos \omega t \\ A_1\theta'' + k(\theta - \alpha) + \sigma\theta' &= M_{x_1} \\ A_1\psi'' + \sigma\psi' + k(\psi - \beta) &= M_{y_1} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $A, C$  — экваториальный и полярный моменты инерции ротора,  $A_1$  — экваториальный момент инерции внутренней рамки,  $k$  — угловая жесткость опор ротора,  $M_{x_1}^n, M_{y_1}^n$  — проекции моментов, возникающих при контакте внутренней рамки с кольцом, на оси  $x_1, y_1$ ;  $\sigma$  — коэффициент вязкого трения в опорах подвеса.

При контакте стержня с ограничительным кольцом на внутреннюю рамку действуют моменты от сил нормальной реакции  $M^n$  и кулонова трения  $M^\lambda$ . Будем считать, что деформации кольца  $d\gamma$  малы по сравнению с



Фиг. 1



Фиг. 2

его размерами, а моменты  $M^n$  и  $M^\lambda$  направлены соответственно по касательной  $l$  и нормали  $n$  к недеформированной поверхности. Оба момента лежат в плоскости кольца, параллельной плоскости  $\xi\eta$  и являющейся картинной плоскостью  $\theta\psi$ , представленной на фиг. 1, где  $o, a$  — точки пересечения с картинной плоскостью осей  $\xi$  и  $z_1$  соответственно. Таким образом, величины  $|oa| = (\theta^2 + \psi^2)^{1/2} \equiv r$  и  $\varphi = \text{arctg}(\psi/\theta)$  представляют собой полярные координаты точки  $a$  на плоскости  $\theta\psi$ , функция  $r_0[\varphi(\theta, \psi)]$  задает форму недеформированного кольца, а разность  $r - r_0 \equiv dr$  определяет при  $r > r_0$  деформацию кольца.

Считаем, что модули моментов от сил нормальной реакции и сухого трения, возникающие при контакте стержня с кольцом, пропорциональны  $dr$ :

$$\begin{aligned} |M^n| &= 1/2 N dr (1 + \text{sgn } dr), \\ |M^\lambda| &= \lambda |M^n| \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $N, \lambda$  — соответственно жесткость кольца и коэффициент сухого трения. Момент  $M^\lambda$  направлен либо по внешней, либо по внутренней нормали к поверхности кольца в зависимости от  $\text{sgn } \psi = \text{sgn}(\theta\psi - \psi\theta^*)$  (фиг. 1). Проекции моментов  $M^n, M^\lambda$  на оси  $x_1, y_1$  —  $M_{x_1}^n, M_{y_1}^n, M_{x_1}^\lambda, M_{y_1}^\lambda$  — выражаются через текущие значения углов  $\theta, \psi$  и параметры, определяющие форму недеформированного кольца. Так, если кольцо имеет изображенную на фиг. 2 форму эллипса с главными осями, параллельными осям  $\xi, \eta$  (осям  $\theta, \psi$  на картинной плоскости), то

$$\begin{aligned} M_{x_1}^n &= -M^n v (u^2 + v^2)^{-1/2}, \quad M_{y_1}^n = -M^n u (u^2 + v^2)^{-1/2} \\ M_{x_1}^\lambda &= \lambda M_{y_1}^n \text{sgn}(\psi^* \theta - \theta^* \psi) \\ M_{y_1}^\lambda &= -\lambda M_{x_1}^n \text{sgn}(\psi^* \theta - \theta^* \psi) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$M^n = 1/4 N E r (1 + \text{sgn } E) (\theta u + \psi v)^{-1}$$

$$u = \theta^{-1/2} (\theta^* + \theta^{**})$$

$$v = \theta^* \theta^{**} (\psi^* \psi^{**})^{-1} [\psi^{-1/2} (\psi^* + \psi^{**})]$$

$$E = \theta^2 + \theta^* \theta^{**} (\psi^* \psi^{**})^{-1} \psi^2 - (\theta^* + \theta^{**}) \theta - \theta^* \theta^{**} (\psi^* \psi^{**})^{-1} (\psi^* + \psi^{**}) \beta + \theta^* \theta^{**}$$

где  $\theta^*, \theta^{**}, \psi^*, \psi^{**}$  — координаты пересечения эллипса с осями картинной плоскости (фиг. 2).

Таким образом, рассматриваемый гироскоп представляет собой гиromаятник с упругими опорами динамически несбалансированного ротора и зоной нечувствительности, размеры и форма которой определяются размерами и формой недеформированного ограничительного кольца.

**2. Результаты численного интегрирования.** Введя безразмерное время  $\tau = \omega t$ , приведем уравнения (1.1) к нормированному виду

$$\alpha'' + H\beta' + K(\alpha - \theta) = \varepsilon(H - 1) \sin \tau$$

$$\beta'' - H\alpha' + K(\beta - \psi) = -\varepsilon(H - 1) \cos \tau$$

$$\theta'' + \delta\theta' + K_1(\theta - \alpha) = m_{x_1} \quad (2.1)$$

$$\psi'' + \delta\psi' + K_1(\psi - \beta) = m_{y_1}$$

$$H = C/A, \quad K = k/A\omega^2, \quad K_1 = k/A_1\omega^2$$

$$\delta = \sigma/A_1\omega, \quad m_{x_1} = M_{x_1}/A_1\omega^2, \quad m_{y_1} = M_{y_1}/A_1\omega^2$$

$$M_{x_1} = M_{x_1}^n + M_{x_1}^\lambda, \quad M_{y_1} = M_{y_1}^n + M_{y_1}^\lambda$$

где  $M_{x_1}^n$ ,  $M_{y_1}^n$ ,  $M_{x_1}^\lambda$ ,  $M_{y_1}^\lambda$  определяются, например, выражениями (1.3), а точки обозначают дифференцирование по  $\tau$ .

В случае абсолютно жестких опор ротора ( $K, K_1 \rightarrow \infty$ ) последний обладает лишь одной степенью свободы относительно внутренней рамки ( $\alpha = \theta$ ,  $\beta = \psi$ ), и уравнения движения гироскопа имеют вид:

$$\theta'' + H_1\psi' + \delta_1\theta' = \varepsilon(H_1 - 1)\sin \tau + b_{x_1}^1$$

$$\psi'' - H_1\theta' + \delta_1\psi' = -\varepsilon(H_1 - 1)\cos \tau + m_{y_1}^1$$

$$H_1 = C/(A + A_1), \quad \delta_1 = \sigma(A + A_1)^{-1}\omega^{-1} \quad (2.2)$$

$$m_{x_1}^1 = M_{x_1}(A + A_1)^{-1}\omega^{-2}, \quad m_{y_1}^1 = M_{y_1}(A + A_1)^{-1}\omega^{-2}$$

Численное интегрирование уравнений (2.1) и (2.2) показало, что при контакте стержня с ограничительным кольцом возникает стационарный режим движения гироскопа, при котором стержень скользит вдоль поверхности кольца так, что гироскоп совершает конические колебания с постоянной частотой  $f$  и амплитудой, определяемой размерами кольца, в направлении, противоположном направлению собственного вращения ротора.

Значения безразмерных частоты колебаний  $F = f/\omega$  и средней за период угловой скорости внутренней рамки  $\Omega = (\theta'^2 + \psi'^2)^{1/2}$  при упругих и абсолютно жестких опорах ротора приведены в таблицах 1 и 2 соответственно. Размерность  $\Omega - 1/c$ . Параметры  $\nu = N/A_1\omega^2$  и  $\nu_1 = N/(A_1 + A)\omega^2$  характеризуют жесткость кольца.

Результаты, приведенные в первых трех строках таблицы 1 и в таблице 2, получены для кольца, представляющего собой в недеформированном виде окружность с центром в точке  $o$  радиусом  $4,36 \cdot 10^{-3}$  рад. В четвертой и пятой строках таблицы 1 представлены данные для случаев, когда недеформированное кольцо является эллипсом с главными осями, совпадающими с осями картинной плоскости (см. фиг. 2, а). Форма кольца, принятая при расчетах, результаты которых даны в последних двух строках таблицы 1 — фигура, ограниченная дугами двух одинаковых окружностей (см. фиг. 2, б, в). Прочерки в таблице 2 означают отсутствие скольжения и прекращение контакта стержня с кольцом. Углы  $\theta^*$ ,  $\theta^{**}$ ,  $\psi^*$ ,  $\psi^{**}$  являются координатами пересечения указанных фигур с осями картинной плоскости (см. фиг. 2) и в таблице 1 даны в радианах. Численные значения остальных параметров были приняты следующими:  $\varepsilon = 1,6 \cdot 10^{-5}$ ;  $H = 1,45$ ;  $H_1 = 0,7$ ;  $\delta = 1,9 \cdot 10^{-2}$ .

Таким образом, поведение рассматриваемой механической системы аналогично поведению периметрического гироскопа [2] с той разницей, что в контакте с направляющей (кольцом) находится не шейка вращающегося вокруг своей оси  $z$  ротора, а внутренняя рамка, не имеющая степени свободы вокруг оси  $z_1$ . В случае периметрического гироскопа шейка ротора без проскальзывания катится по направляющей, так что момент от силы трения в точке контакта прижимает ротор к лекалу [2]. В рассматриваемом случае легко показать, что равномерное скольжение стержня по кольцу в указанном направлении вызовет момент от силы сухого трения, отводящий гироскоп от кольца. Действительно, описанное движение соответствует вращению отрезка  $oa$  на картинной плоскости  $\theta\psi$  (фиг. 1) по часовой стрелке. При этом  $\dot{\varphi} < 0$ , а момент  $M^\lambda$  направлен по внутренней нормали к поверхности кольца.

Найденное движение оказывается возможным лишь из-за наличия динамического небаланса ротора, вызывающего колебания гироскопа с частотой вращения ротора  $\omega \gg f$ . Траектории движения оси стержня (точки  $a$

Таблица 1

№	K	K <sub>1</sub>	θ*,  θ**	ψ*,  ψ**	F	Ω
1	1,48	1,38	4,36·10 <sup>-3</sup>	4,36·10 <sup>-3</sup>	1,9225·10 <sup>-3</sup>	0,84·10 <sup>-5</sup>
2	14,8	13,8	4,36·10 <sup>-3</sup>	4,36·10 <sup>-3</sup>	4,678·10 <sup>-3</sup>	2,05·10 <sup>-5</sup>
3	148	138	4,36·10 <sup>-3</sup>	4,36·10 <sup>-3</sup>	4,893·10 <sup>-3</sup>	2,14·10 <sup>-5</sup>
4	14,8	13,8	2,9·10 <sup>-3</sup>	5,81·10 <sup>-3</sup>	5,65·10 <sup>-3</sup>	2,27·10 <sup>-5</sup>
5	14,8	13,8	5,81·10 <sup>-3</sup>	4,36·10 <sup>-3</sup>	4,1675·10 <sup>-3</sup>	2,10·10 <sup>-5</sup>
6	14,8	13,8	4,36·10 <sup>-3</sup>	2,9·10 <sup>-3</sup>	6,525·10 <sup>-3</sup>	2,32·10 <sup>-5</sup>
7	14,8	13,8	2,9·10 <sup>-3</sup>	5,81·10 <sup>-3</sup>	4,7875·10 <sup>-3</sup>	2,47·10 <sup>-5</sup>

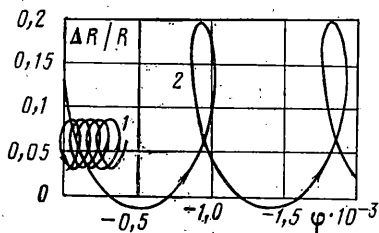
Таблица 2

δ <sub>1</sub>	λ	v	F	Ω
10 <sup>-2</sup>	0,05	3,96·10 <sup>-2</sup>	—	—
		3,96·10 <sup>-1</sup>	—	—
		3,96	—	—
	0,1	3,96·10 <sup>-2</sup>	—	—
		3,96·10 <sup>-1</sup>	5·10 <sup>-3</sup>	1,37·10 <sup>-4</sup>
		3,96	3·10 <sup>-3</sup>	0,82·10 <sup>-4</sup>
	0,2	3,96·10 <sup>-2</sup>	5·10 <sup>-4</sup>	1,37·10 <sup>-5</sup>
		3,96·10 <sup>-1</sup>	5·10 <sup>-3</sup>	1,37·10 <sup>-4</sup>
		3,96	3·10 <sup>-3</sup>	0,82·10 <sup>-4</sup>
2·10 <sup>-2</sup>	0,05	3,96·10 <sup>-2</sup>	—	—
		3,96·10 <sup>-1</sup>	—	—
		3,96	1,11·10 <sup>-3</sup>	0,3·10 <sup>-4</sup>
	0,1	3,96·10 <sup>-2</sup>	5·10 <sup>-4</sup>	1,37·10 <sup>-5</sup>
		3,96·10 <sup>-1</sup>	2,5·10 <sup>-3</sup>	0,68·10 <sup>-4</sup>
		3,96	1,125·10 <sup>-3</sup>	0,31·10 <sup>-4</sup>
	0,2	3,96·10 <sup>-2</sup>	6,25·10 <sup>-4</sup>	1,71·10 <sup>-5</sup>
		3,96·10 <sup>-1</sup>	3,125·10 <sup>-3</sup>	0,86·10 <sup>-4</sup>
		3,96	1,125·10 <sup>-3</sup>	0,31·10 <sup>-4</sup>

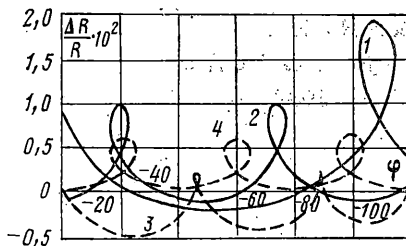
на картинной плоскости) при его контакте с кольцом для различных значений параметров  $v$ ,  $v_1$ ,  $K$ ,  $K_1$ ,  $\varepsilon$  представлены на фиг. 3, 4. Форма кольца — окружность радиусом  $r_0 = 4,36 \cdot 10^{-3}$  рад.

На фиг. 3 представлены траектории движения апекса ротора в случае абсолютно жестких опор ротора ( $K, K_1 \rightarrow \infty$ ),  $\lambda = 0,1$  и  $\varepsilon = 1,6 \cdot 10^{-4}$ . При этом кривой 1 соответствует значение  $v_1 = 3,96 \cdot 10^{-2}$ , а кривой 2 —  $v_1 = 3,96 \cdot 10^{-1}$ . На фиг. 4 кривые 1–3 построены для случая абсолютно жестких опор ротора ( $K, K_1 \rightarrow \infty$ ),  $\lambda = 0,1$ , при этом кривой 1 соответствует значение  $\varepsilon = 1,6 \cdot 10^{-5}$ , а кривой 2  $\varepsilon = 0,8 \cdot 10^{-5}$ . Кроме того, варьировалось значение жесткости кольца. Так, для кривых 1 и 2 —  $v_1 = 3,96 \cdot 10^{-1}$ , для кривой 3 —  $v_1 = 3,96$ . Кривая 4 построена для случая конечной жесткости опоры ротора ( $K = 14,8$ ;  $K_1 = 13,8$ ) при  $\varepsilon = 1,6 \cdot 10^{-5}$  и  $v = 0,76$ .

Колебания гироскопа с частотой вращения ротора приводят к периодическим изменениям угловой скорости обкатки  $\varphi'$  относительно среднего за оборот отрезка  $oa$  значения  $\langle \varphi' \rangle$ . В зависимости от соотношения жесткостных параметров опоры ротора  $K$ ,  $K_1$  и кольца  $v$ ,  $v_1$ , а также величины динамического небаланса  $\varepsilon$  гироскоп может либо отрываться от кольца на части периода высокочастотных колебаний, либо все время оставаться в контакте с кольцом.



Фиг. 3



Фиг. 4

Поскольку на участках траектории, на которых  $\dot{\varphi} > 0$ , деформация кольца, а, следовательно, и модуль момента  $M^*$  существенно больше, чем при  $\dot{\varphi} < 0$ , то средний момент от сил сухого трения  $\langle M^* \rangle$  равен нулю, несмотря на то, что  $\langle \dot{\varphi} \rangle < 0$ . Поэтому среднее значение координаты  $r = (\theta^2 + \psi^2)^{1/2}$  близко к  $r_0(\varphi)$ , и стержень постоянно приходит в соприкосновение с упором. Средний же момент от сил нормальной реакции, не зависящий от  $\dot{\varphi}$  и направленный по касательной  $l$ , отличен от нуля и обуславливает суммарное движение гироскопа вдоль поверхности кольца.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Климов Д. М., Харламов С. А. Динамика гироскопа в кардановом подвесе. М.: Наука, 1978. 208 с.
2. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.

Москва

Поступила в редакцию  
14.XII.1987