МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1989

УДК 531.383

А. В. МЕДВЕДЕВ

ДВИЖЕНИЕ БЫСТРО ЗАКРУЧЕННОГО ГИРОСКОПА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННОГО МОМЕНТА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Рассматривается задача о движении динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки под действием постоянного момента (в связанных с телом осях) и диссипативного, состоящего из суммы линейных и квадратичных составляющих угловой скорости. С помощью метода осреднения построены эволюционные уравнения, позволяющие оценить характер движения. Угловое движение тела в сопротивляющейся среде изучалось, в частности, в [1–8].

1. Вывод уравнений движения. Для описания углового движения тела используем фазовые переменные K, ρ, σ, ψ, ϑ, φ, определяющие величину модуля вектора кинетического момента $\mathbf{K}$, его положение (ρ, σ) относительно неподвижного трехгранника $O\xi_1\xi_2\xi_3$, и углы Эйлера ψ, ϑ, φ, задающие положение главных центральных осей $Ox_1x_2x_3$ относительно трехгранника $O\zeta_1\zeta_2\zeta_3$, связанного с вектором кинетического момента. Ось $O\zeta_3$ направлена вдоль $\mathbf{K}$; ρ — угол между $O\zeta_3$ и $O\xi_3$, σ — угол между плоскостями $O\xi_1\xi_3$ и $O\zeta_1\xi_3$.

Систему уравнений для динамически симметричного твердого тела запишем в виде [9]:

$$
\begin{gathered}
K d\rho/dt=M_1,\ K\sin\rho\, d\sigma/dt=M_2,\ dK/dt=M_3\\
d\psi/dt=K/I_1-K^{-1}\operatorname{ctg}\vartheta(M_2\sin\psi+M_1\cos\psi)-M_2K^{-1}\operatorname{ctg}\rho\\
d\vartheta/dt=K^{-1}(M_2\cos\psi-M_1\sin\psi)\\
d\varphi/dt=(K/I_3-K/I_1)\cos\vartheta+(K\sin\vartheta)^{-1}(M_2\sin\psi+M_1\cos\psi)
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где M_i — проекции моментов внешних сил на оси $O\zeta_i$ ($i=1, 2, 3$), I_1, I_3 — главные экваториальный и полярный моменты инерции тела.

Считаем, что момент внешних сил $\mathbf{M}$ в осях $Ox_1x_2x_3$ имеет вид

$$
\mathbf{M}=\begin{Vmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{Vmatrix}-B\begin{Vmatrix}P\\Q\\R\end{Vmatrix}-S\begin{Vmatrix}P|P|\\Q|Q|\\R|R|\end{Vmatrix}
\tag{1.2}
$$

где P, Q, R — проекции вектора абсолютной угловой скорости тела на оси $Ox_1x_2x_3$; A_i, $B=\|B_{ij}\|$ ($B_{ij}>0$), $S=\|S_{ij}\|$ ($S_{ij}>0$) ($i, j=1, 2, 3$) — постоянные величины в связанных с телом осях; элементы матриц B и S можно рассматривать как коэффициенты аэродинамического момента сопротивления вращению тела.

Нормализуем уравнения (1.1) для чего введем безразмерные переменные:

$$
\mathbf{K}=K_0\mathbf{k},\ t=T_0\tau,\ T_0=I_1K_0^{-1},\ I_3=I_1(1+\varkappa)
$$

$$
P=T_0^{-1}p,\ Q=T_0^{-1}q,\ R=T_0^{-1}r,\ \mathbf{M}=M_0\mathbf{m}
$$

где K_0, T_0, M_0 — характерные значения соответствующих величин, выбираемые таким образом, чтобы в рассматриваемом движении $|\mathbf{k}|$, r, $|\mathbf{m}|$

были порядка единицы. Обозначая

$$A_iM_0^{-1}=a_i,\ B_{ij}M_0^{-1}T_0^{-1}=b_{ij},\ S_{ij}M_0^{-1}T_0^{-2}=s_{ij},\ M_0I_1K_0^{-2}=\varepsilon$$

перепишем (1.1) в виде

$$\begin{gathered}
k d\rho/d\tau=\varepsilon m_1,\ k\sin\rho d\sigma/d\tau=\varepsilon m_2,\ dk/d\tau=\varepsilon m_3\\
d\psi/d\tau=k-\varepsilon k^{-1}\operatorname{ctg}\vartheta(m_2\sin\psi+m_1\cos\psi)-\varepsilon m_2k^{-1}\operatorname{ctg}\rho\\
d\vartheta/d\tau=\varepsilon k^{-1}(m_2\cos\psi-m_1\sin\psi)\\
d\varphi/d\tau=-k\varkappa(1+\varkappa)^{-1}\cos\vartheta+\varepsilon(k\sin\vartheta)^{-1}(m_2\sin\psi+m_1\cos\psi)
\end{gathered}\tag{1.3}$$

Будем считать $\varepsilon\ll 1$. Это соответствует предположению о малости модуля возмущающего момента по сравнению с кинетической энергией вращательного движения тела.

Система (1.3), таким образом, представляет собой систему уравнений в стандартной форме, в которой k, ρ, σ, ϑ являются медленными, а ψ и φ — быстрыми переменными. Исследуем поведение решения (1.3) на большом интервале времени $\tau\sim\varepsilon^{-1}$

2. Исследование уравнений движения. Применим метод осреднения в форме [10]. Невозмущенное движение, когда $\varepsilon=0$ является регулярной прецессией в случае Эйлера — Пуансо (k_0, ρ_0, σ_0, ϑ_0, ψ_0, φ_0 — постоянные величины):

$$k=k_0,\ \rho=\rho_0,\ \sigma=\sigma_0,\ \vartheta=\vartheta_0,\ \psi=k\tau+\psi_0,\ \varphi=-k\varkappa(1+\varkappa)^{-1}\tau\cos\vartheta+\varphi_0\tag{2.1}$$

Осреднение уравнений для медленных переменных проведем по быстрым переменным ψ и φ вдоль траекторий невозмущенного движения (2.1).

Используя процедуру общей схемы осреднения и сохраняя для медленных осредненных переменных их прежние обозначения, после соответствующих вычислений получим

$$\begin{gathered}
k d\rho/d\tau=0,\ k\sin\rho d\sigma/d\tau=0\\
dk/d\tau=\varepsilon\{a_3\cos\vartheta-k[\alpha\sin^2\vartheta+\beta\cos^2\vartheta+k(\gamma\sin^2\vartheta|\sin\vartheta|+\\
+\delta\cos^2\vartheta|\cos\vartheta|)]\}\\
d\vartheta/d\tau=-\varepsilon\{a_3(k\cos\vartheta)^{-1}+[\alpha-\beta+k(\gamma|\sin\vartheta|-\delta|\cos\vartheta|)]\}\cos\vartheta\sin\vartheta\\
\alpha=(b_{11}+b_{22})/2,\ \beta=b_{33}/(1+\varkappa)\\
\gamma={}^4/_3\pi^{-1}(s_{11}+s_{22}),\ \delta=s_{33}(1+\varkappa)^{-2}
\end{gathered}\tag{2.2}$$

Из вида правых частей (2.2) следует, что в первом приближении на изменение медленных переменных оказывают влияние лишь диагональные коэффициенты b_{ii}, s_{ii} матриц B, S и a_3.

Из (2.2) заключаем, что $\rho=\mathrm{const}$, $\sigma=\mathrm{const}$, т. е. направление вектора кинетического момента остается неизменным в инерциальном пространстве. Таким образом, действие момента (1.2) приводит к изменению величин k и ϑ — угла между осью динамической симметрии Ox_3 и $\mathbf{k}$.

Систему уравнений (2.2) можно проинтегрировать в конечном виде. Вводя новые переменные W и V соотношениями $W=k\cos\vartheta$, $V=k\sin\vartheta$, получим

$$\begin{gathered}
dW/d\tau=\varepsilon(a_3-\beta W\mp\delta W^2)\\
dV/d\tau=-\varepsilon(\alpha V+\gamma V^2)
\end{gathered}\tag{2.3}$$

Здесь в первом уравнении знак «минус» перед W^2 соответствует движению при $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi/2$, а «плюс» при $\pi/2<\vartheta\leqslant\pi$. Из (2.3) получаем

$$k\sin\vartheta=\alpha k_0\sin\vartheta_0\exp(-\varepsilon\alpha\tau)\{\alpha+\gamma k_0\sin\vartheta_0[1-\exp(-\varepsilon\alpha\tau)]\}^{-1}\tag{2.4}$$

Для переменной $k\cos\vartheta$ в области $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi/2$ будем иметь

$$\begin{gathered}
k\cos\vartheta=[2\delta\nu_1-\beta+(2\delta\nu_1+\beta)c_1\exp(-2\varepsilon\delta\nu_1\tau)][1-c_1\exp(-2\varepsilon\delta\nu_1\tau)]^{-1}/2\delta\\
c_1=(2\delta k_0\cos\vartheta_0+\beta-2\delta\nu_1)(2\delta k_0\cos\vartheta_0+\beta+2\delta\nu_1)^{-1}
\end{gathered}\tag{2.5}$$

$$\nu_1=[(\beta/2\delta)^2+a_3/\delta]^{1/2}$$

при $a_3/\delta>-(\beta/2\delta)^2$ и

$$k\cos\vartheta=\{-\beta+2\delta\mu_1\operatorname{tg}\{\operatorname{arctg}[(2\delta k_0\cos\vartheta_0+\beta)/2\delta\mu_1]-\varepsilon\delta\mu_1\tau\}\}/2\delta$$
$$\mu_1=[-(\beta/2\delta)^2-a_3/\delta]^{1/2} \tag{2.6}$$

при $a_3/\delta<-(\beta/2\delta)^2$.

Для $\pi/2<\vartheta\leqslant\pi$ получаем

$$k\cos\vartheta=[2\delta\nu_2+\beta+(2\delta\nu_2-\beta)c_2\exp(2\varepsilon\delta\nu_2\tau)]\,[1-c_2\exp(2\varepsilon\delta\nu_2\tau)]^{-1}/2\delta$$
$$c_2=[2\delta(k_0\cos\vartheta_0-\nu_2)-\beta]\,[2\delta(k_0\cos\vartheta_0+\nu_2)-\beta]^{-1} \tag{2.7}$$
$$\nu_2=[(\beta/2\delta)^2-a_3/\delta]^{1/2}$$

при $a_3/\delta<(\beta/2\delta)^2$ и

$$k\cos\vartheta=\{\beta+2\delta\mu_2\operatorname{tg}\{\operatorname{arctg}[(2\delta k_0\cos\vartheta_0-\beta)/2\delta\mu_2]+\varepsilon\delta\mu_2\tau\}\}/2\delta$$
$$\mu_2=[a_3/\delta-(\beta/2\delta)^2]^{1/2} \tag{2.8}$$

при $a_3/\delta>(\beta/2\delta)^2$.

Можно показать, что если $a_3>0$, то угол ϑ уменьшается и стремится к нулю, а при $a_3<0$ угол ϑ увеличивается и стремится к π. Действительно, допустим, что в начальный момент времени $\pi/2<\vartheta_0<\pi$, а значение a_3 для определенности подчинено неравенству $a_3/\delta>(\beta/2\delta)^2$. Тогда при $\tau\to+\infty$ из (2.8) получаем $k\cos\vartheta\to{}^1/_2(\beta+\delta\mu_2\pi)/\delta>0$.

Так как $k\cos\vartheta<0$ при $\tau=0$ (в силу предположения), то из последнего неравенства заключаем, что наступит такой момент времени τ_1, когда ϑ станет равным $\pi/2$. При $\tau>\tau_1$ изменение $k\cos\vartheta$ будет происходить согласно (2.5), поэтому, при $\tau\to+\infty$ имеем $k\cos\vartheta\to{}^1/_2(2\delta\nu_1-\beta)/\delta>0$ и, стало быть, $\vartheta\to0$ в соответствии с (2.4). Аналогично рассматриваются и другие случаи.

Таким образом, для быстро вращающегося вокруг неподвижной точки тела в сопротивляющейся среде, момент которой содержит линейные и квадратичные составляющие угловой скорости при наличии постоянного момента (в связанных осях) его динамическая ось симметрии стремится либо совпасть с направлением вектора кинетического момента ($a_3>0$), либо занять положение ему прямо противоположное ($a_3<0$). При этом, характер изменения модуля вектора кинетического момента k определяется из формул (2.4)—(2.8) с учетом значений ϑ_0, параметров тела и аэродинамических коэффициентов сопротивления среды.

Рассмотрим случай $a_3=0$. Из (2.4), (2.5) и неравенства $a_3/\delta<(\beta/2\delta)^2$ получаем

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{tg}\vartheta_0\frac{\beta+\delta k_0\cos\vartheta_0[1-\exp(-\varepsilon\beta\tau)]}{\alpha+\gamma k_0\sin\vartheta_0[1-\exp(-\varepsilon\alpha\tau)]}\exp[\varepsilon(\beta-\alpha)\tau]$$
$$(0\leqslant\vartheta<\pi/2) \tag{2.9}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{tg}\vartheta_0\frac{\delta k_0\cos\vartheta_0-(\delta k_0\cos\vartheta_0-\beta)\exp(\varepsilon\beta\tau)}{\alpha+\gamma k_0\sin\vartheta_0[1-\exp(-\varepsilon\alpha\tau)]}\exp(-\varepsilon\alpha\tau)$$
$$(\pi/2<\vartheta\leqslant\pi) \tag{2.10}$$

Из (2.9), (2.10) заключаем, что при $\beta>\alpha$ угол ϑ стремится к $\pi/2$, а при $\beta<\alpha$ – нулю, если $0\leqslant\vartheta_0<\pi/2$ или к π, если $\pi/2<\vartheta_0\leqslant\pi$. Отметим, что такой же вывод справедлив и для движения в сопротивляющейся среде, момент которой линейно зависит от угловой скорости тела [6].

В заключение исследуем движение в среде, момент сопротивления которой квадратично зависит от угловой скорости тела [11]. Для этого в уравнениях (2.3) следует положить $a_3=\alpha=\beta=0$. Интегрируя систему (2.3), например, в предположении $0\leqslant\vartheta<\pi/2$ получим следующее выражение для переменной $\operatorname{tg}\vartheta$:

$$\operatorname{tg}\vartheta=\operatorname{tg}\vartheta_0(1+\varepsilon\delta k_0\tau\cos\vartheta_0)(1+\varepsilon\gamma k_0\tau\sin\vartheta_0)^{-1}$$

откуда следует, что $\operatorname{tg}\vartheta\to\delta/\gamma$ при $\tau\to+\infty$, т. е. ось динамической симметрии тела стремится занять единственное новое положение относительно вектора кинетического момента отличное от $\vartheta=0$, $\vartheta=\pi/2$ и $\vartheta=\pi$, если $\delta\neq0$, $\gamma\neq0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.* Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 5–13.
2. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР, МТТ, 1986. № 5. С. 3–10.
3. *Булгаков Б. В.* Прикладная теория гироскопов. // М.; Л.: Гостехиздат, 1955. 355 с.
4. *Кудин С. Ф., Мартыненко Ю. Г.* Раскрутка неконтактного гироскопа в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 14–22.
5. *Куряков В. А.* О вращении вокруг неподвижной точки симметричного твердого тела в среде с квадратичным законом сопротивления // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 1. С. 123–126.
6. *Лещенко Д. Д.* О движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в слабо сопротивляющейся среде // Прикл. механика. 1975. Т. 11. № 3. С. 89–94.
7. *Нейштадт А. И.* Об эволюции вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 30–36.
8. *Пивоваров М. Л.* О движении гироскопа с малым самовозбуждением // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 23–27.
9. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. // М.: Наука, 1965. 416 с.
10. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. // М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
11. Вибрации в технике./Под ред. И. И. Блехмана // М.: Машиностроение, 1979. Т. 2, 351 с.

Тамбов

Поступила в редакцию
17.XI.1987