где c, C_3 – постоянные, определяемые краевыми условиями. Циклоиды могут являться и линиями скольжения, поскольку выполнены уравнения (6) ($\varphi_1(\alpha)=\psi_1(\beta)={}^1/_4$), как, например, в известной задаче о сжатии слоя шероховатыми плитами [1, 2], но условия (4) и (5) не выполняются, поэтому частных решений этого типа нет.

3. Для логарифмических спиралей получаем решение, совпадающее с известным [3]. В этом случае $H_1=(\beta/2\alpha)^{1/2}$, $H_2=(\alpha/2\beta)^{1/2}$ и условие (4) выполнено при $\varphi(\alpha)=\psi(\beta)=1/\sqrt{2}$. Линии β могут быть и характеристиками (при $\varphi_1=(2\alpha)^{-1}$, $\psi_1=(2\beta)^{-1}$ в формулах (6)), но условие (5) не выполнено, поэтому решения, при котором и характеристики, и линии тока совпали бы с координатными линиями, нет.

4. Рассмотрим задачу о прессовании идеальной жесткопластической среды через матрицу, ограниченную гиперболами.

При этом используем систему криволинейных координат

$$\alpha={}^1/_2(x^2-y^2),\quad \beta=xy,\quad x=[(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}+\alpha]^{1/2}$$
$$y=[(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}-\alpha]^{1/2},\quad H_1=H_2=(\alpha^2+\beta^2)^{-1/4}/\sqrt{2}$$

Если кривые β являются линиями тока, то при $F_1=-\beta(\alpha^2+\beta^2)^{-1}$, $F_2=-\alpha(\alpha^2+\beta^2)^{-1}$ из условия, чтобы коэффициент Φ_1 в уравнении (3) был функцией только координаты β, определяем две функции, $f_1(\beta)=-1/\beta$, $f_2(\beta)=0$, которые удовлетворяют и (3). Это определяет два точных частных решения в координатах α, β (C_3 – постоянная интегрирования):

$$f_1(\beta)=-1/\beta:\ \tau_{\alpha\beta}=-k\alpha(\alpha^2+\beta^2)^{-1/2},\quad \sigma_\alpha=C_3+k\beta(\alpha^2+\beta^2)^{-1/2},\quad \sigma_\beta=C_3-k\beta(\alpha^2+\beta^2)^{-1/2}$$
$$f_2(\beta)=0:\ \tau_{\alpha\beta}=k\beta(\alpha^2+\beta^2)^{-1/2},\quad \sigma_\alpha=C_3+k\alpha(\alpha^2+\beta^2)^{-1/2},\quad \sigma_\beta=C_3-k\alpha(\alpha^2+\beta^2)^{-1/2}$$

На фиг. 2 показаны эпюры напряжений (в долях k) при прессовании заготовки, ограниченной цилиндрическими поверхностями $\beta_1=1$ и $\beta_2=-1$ и поверхностями $\alpha_1=0{,}125$; $\alpha_2=8{,}0$.

Постоянная C_3 определена из условия равенства нулю суммарной силы вдоль участка AB линии α_2. На фиг. 2 приведены также графики касательных напряжений $\tau_{\alpha\beta}$ на линиях $\beta=1{,}0$ (участок AC), $\alpha=2$, эпюры нормальных давлений σ_α на CD (при $\alpha=0{,}125$) и σ_β на BD (при $\beta=-1{,}0$). Частных решений, соответствующих условиям (4) или (5), в этой системе координат нет.

Для ряда координатных систем (биполярных, эллиптических) решений таким способом найти не удается (эти линии не могут являться и характеристиками).

Отметим, что для линейно вязкой среды можно получить уравнение, аналогичное (3):

$$d^2f(\beta)/d\beta^2+[3f(\beta)-\Phi_1]df(\beta)/d\beta+f^3(\beta)+\Phi_1f^2(\beta)+\Phi_2f(\beta)+\Phi_3=0$$

где $\Phi_3=0$ при $H_1=H_2=H$. Это уравнение, в отличие от (3), имеет хотя бы одно частное решение при $\Phi_3=0$, $f(\beta)=0$, что иллюстрирует различие между моделями пластической и линейно вязкой среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеориздат, 1956. 407 с.
2. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
3. *Бровман М. Я.* О движении пластической массы в криволинейном канале // Прикл. механика. 1983. Т. 19. № 8. С. 121–124.
4. *Гун Г. Я.* Об общем представлении кинематически возможных полей скоростей // Изв. вузов. Черная металлургия. 1979. № 9. С. 48–50.

Краматорск

Поступила в редакцию
16.XII.1985

А. Г. БАГДОЕВ, А. А. ВАНЦЯН

ПРОНИКАНИЕ ТОНКОГО ТЕЛА В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНУЮ СРЕДУ С ВРАЩЕНИЕМ

Дается решение задачи проникания тел в упругую трансверсально-изотропную среду при наличии вращения тела с постоянной угловой скоростью. В предположении одномерности задачи (из-за тонкости проникающего тела) получены формулы для радиальных напряжений и для размеров области пластичности. Показано, что анизотропия среды и вращения тела влияют как на размеры области пластичности, так и на величину радиальных напряжений.

Задача проникания твердого тонкого тела в среду при наличии анизотропных свойств решена в [1]. Проникание тонких тел в сплошные среды рассматривались в [2–8]. Влияние магнитного поля на глубину проникания учтено в [9–13], где показано, что для относительно небольших значений энергии конденсатора импульсный ток приводит к сильной пластической деформации индентора и уменьшению глубины проникания в дюралюмин на 40–60%.

В настоящей работе исследуется проникание тел в упругую трансверсально изотропную среду при наличии вращения тела с постоянной заданной угловой скоростью ω. Вводится система координат r, θ, x, где x отсчитывается вдоль оси проникающего тела, r – радиальная, θ – угловая координаты. Поскольку сечение тела плоскостью $x=\mathrm{const}$ – круговое, задача имеет симметрию по θ, следовательно, решение не зависит от θ. Из-за тонкости проникающего тела нетрудно показать, что решение слабо зависит от x, t. В силу принятого допущения уравнения среды в проекции на оси r, θ будут

$$\partial\sigma_r/\partial r+(\sigma_r-\sigma_\theta)/r=0, \quad \partial\tau_{r\theta}/\partial r+\tau_{r\theta}/r=0 \tag{1}$$

Поскольку принято, что $\varepsilon_x \approx 0$ из уравнения течения среды вблизи тела можно найти [1]:

$$\sigma_x=\frac{G\sigma_r+F\sigma_\theta}{G+F}, \quad \sigma_r-\sigma_x=\frac{F(\sigma_r-\sigma_\theta)}{G+F}, \quad \sigma_\theta-\sigma_x=\frac{G(\sigma_\theta-\sigma_r)}{G+F} \tag{2}$$

$$F=G=1/(2\tau_{sx}^2), \quad H={}^1/_2(2/\tau_{sr}^2-1/\tau_{sx}^2) \tag{3}$$

где постоянные F, G, H выражены через пределы текучести τ_{sx} и τ_{sr}.

Кроме того имеет место для связи сдвиговых компонент скорости деформации $\varepsilon_{r\theta}$ и радиальной компоненты ε_r ($\tau_{r\theta}$ – касательное напряжение)

$$2\varepsilon_{r\theta}=\partial v_\theta/\partial r-v_\theta/r, \quad \varepsilon_r=\partial v_r/\partial r \tag{4}$$

$$\varepsilon_{r\theta}/\varepsilon_r=K\tau_{r\theta}(\sigma_r-\sigma_\theta)^{-1}(G+F)(FG+FH+GH)^{-1} \tag{5}$$

Условие текучести Мизеса записывается в виде

$$D(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+K\tau_{r\theta}^2=1, \quad D=\tau_{sr}^{-2}-{}^1/_4\tau_{sx}^{-2} \tag{6}$$

Уравнение несжимаемости пластической среды имеет вид

$$\partial v_r/\partial r+v_r/r=0 \tag{7}$$

Поскольку на конической части проникающего тела $r=r_k(x,t)$ и имеем $v_r=\partial r_k/\partial t$, то для скорости в пластической области можно записать [6]:

$$v_r=(r_k/r)\,\partial r_k/\partial t \tag{8}$$

Из уравнений (1) следует

$$\tau_{r\theta}=c/r^2 \tag{9}$$

Учитывая (9) и (6), можно получить $\sigma_r-\sigma_\theta=-(1-Kc^2/r^4)^{1/2}/(rD^{1/2})$. Первое уравнение (1) после подстановки полученных величин примет вид

$$\partial\sigma_r/\partial r-(1-Kc^2/r^4)^{1/2}/(rD^{1/2})=0$$

решение которого записывается в виде

$$\sigma_r=D^{-1/2}\{{}^1/_2\ln[(r^4-Kc^2)^{1/2}+r^2]-(r^4-Kc^2)^{1/2}/2r^2\}+c_1 \tag{10}$$

Согласно принятой схемы в [1] вводится пластическая волна $r=r_k\xi_0$, $\xi_0=\xi_0(x,t)$, впереди которой среда упругая. В упругой области имеют место уравнения несжимаемости и связь напряжений и деформаций [1]:

$$\partial u_{r_1}/\partial r+u_{r_1}/r=0, \quad u_{r_1}=A/r \tag{11}$$

$$\sigma_{r_1}=-2\mu A/r^2, \quad \sigma_{\theta_1}=-\sigma_{r_1}, \quad \sigma_{x_1}=0 \tag{12}$$

Используя непрерывность компонент скоростей и напряжений на волне $v_r=v_{r_1}$, $v_\theta=v_{\theta_1}$, $\sigma_r=\sigma_{r_1}$, $\sigma_\theta=\sigma_{\theta_1}$ получим $A=r_k^2/2$.

Из (5), (8), (9) для компоненты скорости v_θ следует выражение

$$v_\theta=\omega r-(\zeta/c)r_k(\partial r_k/\partial t)[(1-Kc^2/r^4)^{1/2}-(1-Kc^2/r_k^4)^{1/2}]r \tag{13}$$

где учтено, что на теле $v_\theta=\omega r_k$, $\zeta=D^{-1/2}$. Из уравнения (9), которое верно и в упругой области, следует ($a_{44}\sim\mu$ – модуль упругости):

$$\varepsilon_{r\theta_1}=\frac{\tau_{r\theta}}{a_{44}}, \quad \varepsilon_{r\theta}=\frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_{\theta_1}}{r}\right), \quad u_{\theta_1}=-\frac{c}{a_{44}r}, \quad v_{\theta_1}=-\frac{1}{a_{44}r}\frac{\partial c}{\partial t} \tag{14}$$

Используя непрерывность скорости и напряжений на фронте пластической волны $r=r_k\xi_0$ и подставляя (12) в условие Мизеса $H(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+G(\sigma_r-\sigma_x)^2+F(\sigma_\theta-\sigma_x)^2+K\tau_{r\theta}^2=1$ для определения ξ_0, c, c_1 получим соотношения

$$\begin{gathered}
-(1/(a_{44}r_k\xi_0))(\partial c/\partial t)=\omega r_k\xi_0-(\zeta/c)r_k^2(\partial r_k/\partial t)[(1-Kc^2/r_k^4)^{1/2}-(1-Kc^2/r_k^4)^{1/2}]\xi_0 \\
-\mu/\xi_0^2=D^{-1/2}[{}^1/_2\ln[(r_k^4\xi_0^4-Kc^2)^{1/2}+r_k^2\xi_0^2-(r_k^4\xi_0^4-Kc^2)^{1/2}/(2r_k^2\xi_0^2)+c_1 \\
\xi_0^4=\mu^2(2/\tau_{sx}^2+1/\tau_{sr}^2)+Km^2
\end{gathered} \tag{15}$$

Вводя величину $-c/r_k^2=m$, учитывая $m\ll\mu$ и приравнивая правую часть (15) нулю, получим

$$1/m=\omega r_k(2\zeta\partial r_k/\partial t)^{-1}+K\zeta(2\omega r_k)^{-1}\partial r_k/\partial t$$

$$\xi_0^2=[\mu^2(2\tau_{sx}^{-2}+\tau_{sr}^{-2})+Km^2]^{1/2}$$

Подставляя в (10) значение c_1, для σ_r получим выражение

$$\sigma_r={}^1/_2D^{-1/2}\{\ln[((r^4-Kc^2)^{1/2}+r^2)/((r_k^4\xi_0^4-Kc^2)^{1/2}+r_k^2\xi_0^2)]-$$
$$-(r^4-Kc^2)^{1/2}/r^2+(r_k^4\xi_0^4-Kc^2)^{1/2}/r_k^2\xi_0^2\}-\mu/\xi_0^2$$

Подставив $r=r_k$, можно найти радиальное напряжение на теле

$$\sigma_r={}^1/_2D^{-1/2}\{\ln[((1-Km^2)^{1/2}+1)/((\xi_0^4-Km^2)^{1/2}+\xi_0)]-$$
$$-(1+Km^2)^{1/2}+(\xi_0^4-Km^2)^{1/2}/\xi_0^2\}-\mu/\xi_0^2 \qquad (16)$$

Полученная формула обобщает решение [1] на случай учета вращения тела. Для $m=0$ из (16) получится указанное решение. Очевидно следует требовать $Km^2<1$.

При $D\approx 0$ напряжение σ_r велико, что означает значительное уменьшение глубины проникающего тела за счет анизотропии.

Опыт по изучению проникания в композит, составленный из слоев дюралюминия и более мягких металлов, позволит проверить правильность выводов, которые получены по одномерной теории по r в задаче проникания.

В частности для изотропной среды, для которой предел текучести $\tau_s=\tau_{sr}/3^{1/2}$, $\tau_{sx}=\tau_{sr}$, можно получить

$$\xi_0^4=Km^2+\mu^2/\tau_s^2,\quad D=(4\tau_s^2)^{-1}$$
$$\sigma_r=-\tau_s\{\ln[((\xi_0^4-Km^2)^{1/2}+\xi_0)/((1-Km^2)+1)]-(\xi_0^4-Km^2)^{1/2}/\xi_0^2+(1-Km^2)^{1/2}\}-\mu/\xi_0^2$$

При $m=0$, соответствующей задаче проникания без вращения, для ξ_0 и σ_r получатся формулы $\xi_0^2=\mu/\tau_s$, $\sigma_r=-\tau_s[\ln(\mu/\tau_s)+1]$, которые совпадают со значениями, найденными в [6].

В частности, при $m=K^{-1/2}$, $\xi_0^4=1+\mu^2/\tau_s^2$, откуда получится, что вращение тела не влияет сильно на размеры области пластичности. При $m=K^{-1/2}$ для σ_r получится выражение

$$\sigma_r=-\tau_s\{\ln[(\xi_0^4-1)^{1/2}+\xi_0^2]+(\xi_0^4-1)^{1/2}/\xi_0^2\}-\mu(1+\mu^2/\tau_s^2)^{-1/2}$$

Оценивая последнее решение, нетрудно видеть, что $\sigma_r\sim 4\tau_s$, а в задаче без вращения $\sigma_r\sim 5{,}5\tau_s$, следовательно вращение проникающего тела приводит к увеличению глубины проникания.

Для опытных данных, приведенных в [6], $\omega\sim 400$ с$^{-1}$, $t\sim 10^{-4}$ с, $K\sim 1/\tau_s^2$, тогда получится $Km^2\sim 10^{-2}$, т. е. эффект вращения тел и им можно пренебречь. Для получения эффекта вращения следует увеличить ωt.

Авторы благодарны Л. М. Флитману за ценное замечание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Проникание тонкого тела в упругие анизотропные среды // Изв. АН АрмССР. Механика. 1983. Т. 36. № 6. С. 23–30.
2. *Ишлинский А. Ю.* Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля // ПММ. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 201–224.
3. *Кукуджанов В. Н.* Численное интегрирование уравнений динамики упругопластических сред при больших деформациях // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1984. С. 334.
4. *Григорян С. С.* Некоторые вопросы газодинамики тонких тел.– Кандидатская диссертация, МГУ, 1956.
5. *Сагомонян А. Я.* Пробивание плиты тонким твердым снарядом // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1975. № 5. С. 104–111.
6. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Проникание тонкого тела в металлы и грунты // Изв. АН АрмССР. Механика. 1981. Т. 34. № 3. С. 25–38.
7. *Колесников В. А., Флитман Л. М.* Автомодельная задача о расширяющемся и движущемся вдоль своей оси цилиндре, окруженном упруго-пластической средой // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Изд-во АН АрмССР. 1984. С. 175–176.
8. *Задоян М. А.* Вдавливание жесткого конуса в идеальное жесткопластическое полупространство // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1984. С. 110–121.
9. *Багдоев А. Г., Гургенян А. А.* Проникание тонких тел вращения в магнитоупругую среду // II Всесоюзный симпозиум по теории магнитоупругости. Цахкадзор, 1978.
10. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Влияние импульсных токов на механические явления // Современные вопросы физики и приложения. М.: Ин-т общей физики АН СССР, 1984. С. 55.
11. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Влияние разрядных токов на динамические процессы в металлических образцах // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Изд-во АН АрмССР. 1984. С. 59–63.
12. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Влияние разрядных токов конденсаторов на механические явления в образцах // 3-й Всесоюз. симпоз. «Теоретические вопросы магнитоупругости». Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1984. С. 26–29.

Ереван

Поступила в редакцию
22.VII.1985