

Следовательно, поведение образца определяется локальными характеристиками: пределом текучести по направлению оси  $x$  и изменением предела текучести по углу  $\theta$  при  $\theta=0$  (величиной  $k_{01}$ ). Характер изменения анизотропии при других значениях  $\theta$  на поведение образца влияния не оказывает. При  $K=0$  имеют место результаты [1].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Онат Е., Прагер В.* Образование шейки при пластическом течении растягиваемого плоского образца // Механика, Сб. перев. и обзоров иностр. период. лит.-ры. № 4, 1955. С. 93–97.
2. *Ишлинский А. Ю.* Растяжение бесконечно длинной идеально пластической полосы переменного сечения // Докл. АН УССР. 1958. № 1. С. 12–15.
3. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
4. *Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.

Чебоксары

Поступила в редакцию  
22.VI.1987

УДК 539.374

М. Я. БРОВМАН

### О ЛИНИЯХ ТОКА ПРИ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Большинство точных решений задач теории пластичности находят полуобратными методами, принимая допущения о поле скоростей и определяя затем напряжения. Так, в задаче о течении среды в канале с прямолинейными стенками допущение о том, что линии тока – прямые, проходящие через начало координат, оправдывается и позволяет найти решение [1, 2]. В [3] найдено частное решение, в котором линиями тока являются логарифмические спирали.

В данной работе рассмотрен вопрос о проверке допущения о том, что кривые данного семейства являются линиями тока. При этом скорость и компоненты девиатора напряжений выражаются через функцию одной из криволинейных координат. Получено нелинейное дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять эта функция, если допущение оказывается правильным.

Пусть в некоторой области выбраны два семейства ортогональных кривых, описываемых дифференцируемыми функциями  $\alpha(x, y)$  и  $\beta(x, y)$ , и линиями тока являются кривые  $\beta(x, y)$ , фиг. 1.

Тогда из условия несжимаемости

$$v_{\alpha} = f_0(\beta) H_2^{-1} = H_2^{-1} \int \exp[f(\beta)] d\beta \quad (1)$$

где  $H_1, H_2$  – коэффициенты первой квадратичной формы,  $f_0(\beta)$  – произвольная функция.

Определив по известным формулам [1–4] компоненты тензора скорости деформации, находим компоненты девиатора напряжений

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} &= k[f(\beta) - F_1] \{ [f(\beta) - F_1]^2 + F_2^2 \}^{-1/2} \\ \sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta} &= 2kF_2 \{ [f(\beta) - F_1]^2 + F_2^2 \}^{-1/2} \\ F_1 &= \frac{\partial}{\partial\beta} [\ln(H_1 H_2)], \quad F_2 = \frac{2}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial\alpha} \end{aligned} \quad (2)$$

где  $k$  – предел текучести при сдвиге,  $\tau_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha}, \sigma_{\beta}$  – компоненты напряжений в координатах  $\alpha, \beta$ .

Подставляя  $\tau_{\alpha\beta}$  и  $(\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta})$  в уравнения равновесия с применением связи между коэффициентами  $H_1, H_2$  и их производными [2], получаем дифференциальное уравнение второго порядка для функции  $f(\beta)$ :

$$\begin{aligned} d^2 f(\beta) / d\beta^2 + \Phi_1 [df(\beta) / d\beta]^2 + \Phi_2 df(\beta) / d\beta + \Phi_3 &= 0 \\ \Phi_1 &= -3[f(\beta) - F_1] \{ [f(\beta) - F_1]^2 + F_2^2 \}^{-1/2} \end{aligned} \quad (3)$$

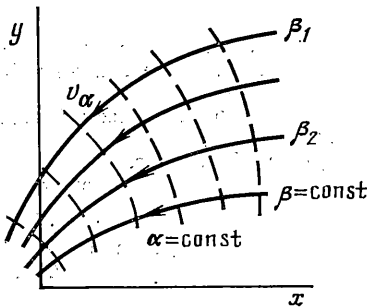
Коэффициенты  $\Phi_2, \Phi_3$  также являются алгебраическими функциями  $f(\beta)$ , величин  $H_1, H_2$  и их производных. В некоторых случаях уравнение (3) удобно использовать для проверки возможных точных решений.

Рассмотрим с учетом (2) случай, когда

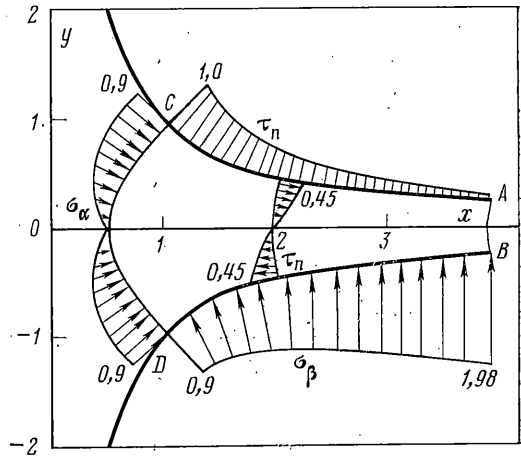
$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} &= 0, \quad v_{\alpha} = H_1 [\varphi(\alpha)]^{-1}, \quad f(\beta) = F_1, \quad \partial F_1 / \partial\alpha = \partial^2 [\ln(H_1 H_2)] / \partial\alpha \partial\beta = 0, \\ H_1 H_2 &= \varphi(\alpha) \psi(\beta). \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sigma_{\alpha} = 2k + 2k \ln [H_2^{-1} \psi(\beta)], \quad \sigma_{\beta} = 2k \ln [H_2^{-1} \psi(\beta)]$$

где  $\varphi(\alpha), \psi(\beta)$  – некоторые функции.



Фиг. 1



Фиг. 2

Если  $\tau_{\alpha\beta}=k$ ,  $\sigma_\alpha=\sigma_\beta$ , то из (2) следует,

$$F_2 = \partial H_2 / \partial \alpha = 0, \quad \sigma_\alpha = \sigma_\beta = C_1 - 2k \int \varphi_1(\alpha) d\alpha \quad (5)$$

где  $\varphi_1(\alpha)$  — произвольная функция, определяемая из краевых условий,  $C_1$  — постоянная интегрирования. Это решение определяет класс линий тока (и скольжения), соответствующих деформации типа сдвига в координатах  $\alpha, \beta$ , например, при течениях в объеме, ограниченном цилиндрическими поверхностями  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , на которых силы трения равны по величине  $k$  и ориентированы в противоположных направлениях.

В общем случае, если ортогональные кривые  $\alpha, \beta$  являются характеристиками уравнений плоской задачи (но не обязательно линиями тока), из уравнений равновесия и соотношений между функциями  $H_1, H_2$  [2] следуют два необходимых условия

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left( H_2^{-1} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( H_1^{-1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \right) = 0 \quad (6)$$

Кривые  $\alpha, \beta$  могут быть линиями скольжения только в том случае, если выражения в скобках в формулах (6) являются, соответственно, функциями переменных  $\alpha$  и  $\beta$ :  $\varphi_1(\alpha)$  и  $\psi_1(\beta)$ .

При этом  $\tau_{\alpha\beta}=k$ ,  $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = C_2 - 2k \int \varphi_1(\alpha) d\alpha - 2k \int \psi_1(\beta) d\beta$ , где  $C_2$  — постоянная интегрирования. Условие (5) является частным случаем (6) при  $\psi_1(\beta) = H_1^{-1} \partial H_2 / \partial \alpha = 0$

Рассмотрим примеры использования уравнения (3).

1. В полярных координатах  $H_1=1$ ,  $H_2=\alpha$ ,  $F_1=0$ ,  $F_2=2$  и из (3) получаем известное уравнение для  $f(\beta)$  [2]. Условие (4) выполнено при  $\varphi(\alpha)=\alpha$ ,  $\psi(\beta)=1$  и получаем, также известное [1, 2], частное решение при  $\tau_{\alpha\beta}=0$ .

Координатные линии могут быть линиями скольжения, так как существуют функции  $\varphi_1(\alpha)=0$ ,  $\psi_1(\beta)=1$ , при которых уравнения (6) выполнены. Однако, поскольку уравнение (5) не выполнено, прямые, проходящие через начало координат, не могут быть одновременно и линиями тока, и линиями скольжения.

2. Криволинейные координаты (циклоиды) связаны с декартовыми формулами

$$\alpha = x - (1-y^2)^{1/2} - \arcsin y, \quad \beta = x - (1-y^2)^{1/2} + \arcsin y$$

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \right)^{1/2}, \quad H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 - \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \right)^{1/2}$$

Циклоиды могут быть линиями тока, например, при частном решении  $f(\beta)=0$ :

$$v_\alpha = c \left( 1 - \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \right)^{-1/2}, \quad \tau_{\alpha\beta} = k \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\sigma_\alpha = C_3 - k \cos \frac{\beta - \alpha}{2}, \quad \sigma_\beta = C_3 + k \cos \frac{\beta - \alpha}{2}$$

где  $c, C_3$  — постоянные, определяемые краевыми условиями. Циклоиды могут являться и линиями скольжения, поскольку выполнены уравнения (6) ( $\varphi_1(\alpha) = \psi_1(\beta) = 1/4$ ), как, например, в известной задаче о сжатии слоя шероховатыми плитами [1, 2], но условия (4) и (5) не выполняются, поэтому частных решений этого типа нет.

3. Для логарифмических спиралей получаем решение, совпадающее с известным [3]. В этом случае  $H_1 = (\beta/2\alpha)^{1/2}$ ,  $H_2 = (\alpha/2\beta)^{1/2}$  и условие (4) выполнено при  $\varphi(\alpha) = \psi(\beta) = 1/\sqrt{2}$ . Линии  $\beta$  могут быть и характеристиками (при  $\varphi_1 = (2\alpha)^{-1}$ ,  $\psi_1 = (2\beta)^{-1}$  в формулах (6)), но условие (5) не выполнено, поэтому решения, при которых и характеристики, и линии тока совпали бы с координатными линиями, нет.

4. Рассмотрим задачу о прессовании идеальной жесткопластической среды через матрицу, ограниченную гиперболами.

При этом используем систему криволинейных координат

$$\alpha = 1/2(x^2 - y^2), \quad \beta = xy, \quad x = [(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} + \alpha]^{1/2} \\ y = [(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} - \alpha]^{1/2}, \quad H_1 = H_2 = (\alpha^2 + \beta^2)^{-1/4} \sqrt{2}$$

Если кривые  $\beta$  являются линиями тока, то при  $F_1 = -\beta(\alpha^2 + \beta^2)^{-1}$ ,  $F_2 = -\alpha(\alpha^2 + \beta^2)^{-1}$  из условия, чтобы коэффициент  $\Phi_1$  в уравнении (3) был функцией только координаты  $\beta$ , определяем две функции,  $f_1(\beta) = -1/\beta$ ,  $f_2(\beta) = 0$ , которые удовлетворяют и (3). Это определяет два точных частных решения в координатах  $\alpha, \beta$  ( $C_3$  — постоянная интегрирования):

$$f_1(\beta) = -1/\beta: \tau_{\alpha\beta} = -k\alpha(\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2}, \quad \sigma_\alpha = C_3 + k\beta(\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2}, \quad \sigma_\beta = C_3 - k\beta(\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2} \\ f_2(\beta) = 0: \tau_{\alpha\beta} = k\beta(\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2}, \quad \sigma_\alpha = C_3 + k\alpha(\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2}, \quad \sigma_\beta = C_3 - k\alpha(\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2}$$

На фиг. 2 показаны эпюры напряжений (в долях  $k$ ) при прессовании заготовки, ограниченной цилиндрическими поверхностями  $\beta_1 = 1$  и  $\beta_2 = -1$  и поверхностями  $\alpha_1 = 0,125$ ;  $\alpha_2 = 8,0$ .

Постоянная  $C_3$  определена из условия равенства нулю суммарной силы вдоль участка  $AB$  линии  $\alpha_2$ . На фиг. 2 приведены также графики касательных напряжений  $\tau_{\alpha\beta}$  на линиях  $\beta = 1, 0$  (участок  $AC$ ),  $\alpha = 2$ , эпюры нормальных давлений  $\sigma_\alpha$  на  $CD$  (при  $\alpha = 0,125$ ) и  $\sigma_\beta$  на  $BD$  (при  $\beta = -1, 0$ ). Частных решений, соответствующих условиям (4) или (5), в этой системе координат нет.

Для ряда координатных систем (биполярных, эллиптических) решений таким способом найти не удается (эти линии не могут являться и характеристиками).

Отметим, что для линейно вязкой среды можно получить уравнение, аналогичное (3):

$$d^2 f(\beta)/d\beta^2 + [3f(\beta) - \Phi_1]df(\beta)/d\beta + f^3(\beta) + \Phi_1 f^2(\beta) + \Phi_2 f(\beta) + \Phi_3 = 0$$

где  $\Phi_3 = 0$  при  $H_1 = H_2 = H$ . Это уравнение, в отличие от (3), имеет хотя бы одно частное решение при  $\Phi_3 = 0$ ,  $f(\beta) = 0$ , что иллюстрирует различие между моделями пластической и линейно вязкой среды.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеориздат, 1956. 407 с.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
3. Бровман М. Я. О движении пластической массы в криволинейном канале // Прикл. механика. 1983. Т. 19. № 8. С. 121—124.
4. Гун Г. Я. Об общем представлении кинематически возможных полей скоростей // Изв. вузов. Черная металлургия. 1979. № 9. С. 48—50.

Краматорск

Поступила в редакцию  
16.XII.1985

А. Г. БАГДОВЕВ, А. А. ВАНЦЯН

## ПРОНИКАНИЕ ТОНКОГО ТЕЛА В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНУЮ СРЕДУ С ВРАЩЕНИЕМ

Дается решение задачи проникания тел в упругую трансверсально-изотропную среду при наличии вращения тела с постоянной угловой скоростью. В предположении одномерности задачи (из-за тонкости проникающего тела) получены формулы для радиальных напряжений и для размеров области пластичности. Показано, что анизотропия среды и вращения тела влияют как на размеры области пластичности, так и на величину радиальных напряжений.

Задача проникания твердого тонкого тела в среду при наличии анизотропных свойств решена в [1]. Проникание тонких тел в сплошные среды рассматривались в [2—8]. Влияние магнитного поля на глубину проникания учтено в [9—13], где показано, что для относительно небольших значений энергии конденсатора импульсный ток приводит к сильной пластической деформации индентора и уменьшению глубины проникания в дюралюмин на 40—60%.

В настоящей работе исследуется проникание тел в упругую трансверсально-изотропную среду при наличии вращения тела с постоянной заданной угловой ско-