

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуков А. М. Разгрузка пластически деформированных металлов при фиксированных скоростях убывания напряжений // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 189–192.
2. Жуков А. М. Поведение металлов при разгрузке и повторной нагрузке // Инж. ж., 1961. Т. 1. Вып. 1. С. 124–133.

Москва

Поступила в редакцию
14.X.1986

УДК 539.375

Е. А. ГРИГОРЬЕВ, Д. Д. ИВЛЕВ, Л. Б. ШИТОВА

ОБ ОБРАЗОВАНИИ ШЕЙКИ ПРИ ТЕЧЕНИИ АНИЗОТРОПНОЙ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ

Линеаризованные уравнения теории идеального жесткопластического тела рассматривались для изучения образования шейки в растягиваемых плоских образцах в [1, 2]. Ниже рассматривается процесс образования шейки в полосе из идеального анизотропного жесткопластического тела.

Рассмотрим полосу, ослабленную двумя симметричными пологими выточками, уравнения которых $y = \pm(h + cx^2)$, $c/h \ll 1$, где h — наименьшая ширина образца (h и c — постоянные).

При квазистатическом нагружении имеют место уравнения равновесия

$$\partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau / \partial y = 0, \quad \partial \tau / \partial x + \partial \sigma_y / \partial y = 0 \quad (1)$$

где σ_x , σ_y — нормальные, $\tau_{xy} = \tau$ — касательная компоненты напряжений и следующие соотношения [3]:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = 4k^2(\theta), \quad \theta = 1/2 \arctg [2\tau / (\sigma_x - \sigma_y)] \quad (2)$$

$$\epsilon_x = \lambda [\sigma_x - \sigma_y + (\tau/k) dk/d\theta],$$

$$\epsilon_y = \lambda [\sigma_y - \sigma_x - (\tau/k) dk/d\theta]$$

$$\gamma = 2\lambda [2\tau^{-1/2} (dk/d\theta) (\sigma_x - \sigma_y) / k] \quad (3)$$

$$\epsilon_x = \partial u / \partial x, \quad \epsilon_y = \partial v / \partial y, \quad \gamma = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$$

где u , v — компоненты скорости перемещения. Решение запишем в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x', \quad \sigma_y = \sigma_y', \quad \tau = \tau' \quad (4)$$

Из (4), (2) следует $\theta^0 = 0$, откуда $\sigma_x = 2k(0) = 2k_0$. Получим также

$$\theta' = 1/2 \arctg \{2\tau' [\sigma_x^0 + (\sigma_x' - \sigma_y')^{-1}]\} \approx \tau' / 2k_0$$

$$k(0 + \theta') \approx k_0 + (\tau' / 2k_0) dk(0) / d\theta = k_0 + k_{01} \tau' / 2k_0 \quad (5)$$

$$k^2(0 + \theta') \approx k_0^2 + k_{01} \tau'$$

Линеаризируя условие пластичности (2), из (4), (5), получим

$$\sigma_x' - \sigma_y' = K\tau', \quad K = k_{01} / k_0 \quad (6)$$

Уравнения равновесия (1) для компонент возмущений сохраняют вид

$$\partial \sigma_x' / \partial x + \partial \tau' / \partial y = 0, \quad \partial \tau' / \partial x + \partial \sigma_y' / \partial y = 0 \quad (7)$$

Удовлетворяя уравнениям (7) при помощи функции Эри

$$\sigma_x' = \partial^2 U / \partial y^2, \quad \sigma_y' = \partial^2 U / \partial x^2, \quad \tau' = -\partial^2 U / \partial x \partial y \quad (8)$$

Из (6) получим

$$\partial^2 U / \partial y^2 - \partial^2 U / \partial x^2 + K \partial^2 U / \partial x \partial y = 0$$

Решение этого уравнение может быть представлено в виде

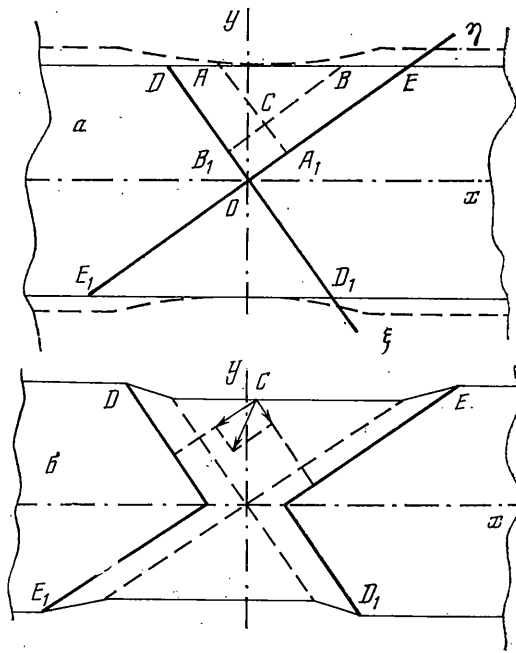
$$U = U_1(\xi) + U_2(\eta), \quad \xi = x + a_1 y, \quad \eta = x + a_2 y \quad (9)$$

$$a_{1,2} = 1/2 [-K \mp (K^2 + 4)^{1/2}]$$

Из (8), (9) получим

$$\sigma_x' = a_1^2 f_1(\xi) + a_2^2 f_2(\eta), \quad \sigma_y' = f_1(\xi) + f_2(\eta), \quad \tau' = -a_1 f_1(\xi) - a_2 f_2(\eta) \quad (10)$$

$$f_1 = d^2 U_1 / d\xi^2, \quad f_2 = d^2 U_2 / d\eta^2$$



Перейдем к линеаризации соотношений, определяющих кинематику течения. Предположим, что $u^0 = v^0 = \varepsilon_x^0 = \varepsilon_y^0 = \gamma = 0$ и течение происходит за счет возмущения границы $u'(x, y)$, $v'(x, y) \neq 0$. Линеаризация соотношений (3), с точностью до малых высшего порядка дает $\varepsilon_x' + \varepsilon_y' = 0$, $K\varepsilon_x' + \gamma' = 0$, откуда согласно (3) будем иметь

$$\partial u' / \partial x + \partial v' / \partial y = 0 \quad (11)$$

$$K \partial u' / \partial x + \partial u' / \partial y + \partial v' / \partial x = 0$$

Вводя величину $w' = Ku' + v'$, систему уравнений (11) можно записать в виде (6), (7), если величинам u' , v' , w' поставить в соответствие величины τ' , σ_y' , σ_x' . Поэтому согласно (10) будем иметь

$$u' = -a_1 \varphi_1(\xi) - a_2 \varphi_2(\eta), \quad v' = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta) \quad (12)$$

Линеаризируя граничные условия, вполне аналогично [1, 4], получим

$$\sigma_y' = 0, \quad \tau' = 4k_0 c x \quad (y = \pm h) \quad (13)$$

Направляя оси ξ , η как показано на фигуре, а, вдоль характеристик AC , BC согласно (9), (10) будем иметь

$$\tau_A' + a_1 \sigma_{yA}' = \tau_C' + a_1 \sigma_{yC}', \quad \tau_B' + a_2 \sigma_{yB}' = \tau_C' + a_2 \sigma_{yC}' \quad (14)$$

Из (13) следует

$$x_A + a_2 y_A = x_C + a_2 y_C, \quad x_B + a_1 y_B = x_C + a_1 y_C \quad (15)$$

Из (14), (15), принимая во внимание, что $y_A = y_B = h$, получим, опуская индекс C

$$\sigma_y = 4k_0 c (h - y), \quad \tau = 4k_0 c [x + K(h - y)] \quad (16)$$

Линии OD , OE (фигура, а) являются границами жесткого состояния материала, жесткие части материала будем считать движущимися со скоростями $u' = \pm 1$, $v' = 0$. Нормальные компоненты скорости на границе пластической зоны должны быть непрерывны. Согласно (12) получим $u_C + a_1 v_C = 1$, $u_C + a_2 v_C = -1$.

Из (16) будем иметь

$$u_C = (a_1 + a_2) / (a_2 - a_1), \quad (a_1 - a_2) v_C = 2 \quad (17)$$

Из (17), (9) окончательно найдем

$$u = -K(K^2 + 4)^{-1/2}, \quad v = -2(K^2 + 4)^{-1/2}$$

Следовательно, вся область DOE движется как твердое целое со скоростью $V = (u^2 + v^2)^{1/2}$ равной единице, наклонной к осям координат. Аналогично [1] можно построить конечные пластические деформации, соответствующая картина деформирования показана на фигуре, б.

Влияние анизотропии определяется величиной

$$K = k_{01} / k_0 \quad (k_0 = k(0), k_{01} = dk/d\theta|_{\theta=0})$$

Следовательно, поведение образца определяется локальными характеристиками: пределом текучести по направлению оси x и изменением предела текучести по углу θ при $\theta=0$ (величиной k_{01}). Характер изменения анизотропии при других значениях θ на поведение образца влияния не оказывает. При $K=0$ имеют место результаты [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Онат Е., Прагер В. Образование шейки при пластическом течении растягиваемого плоского образца // Механика, Сб. перев. и обзоров иностр. период. лит-ры. № 4, 1955. С. 93–97.
2. Ишлинский А. Ю. Растяжение бесконечно длинной идеально пластической полосы переменного сечения // Докл. АН УССР. 1958. № 1. С. 12–15.
3. Иелев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
4. Иелев Д. Д., Еришов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.

Чебоксары

Поступила в редакцию
22.VI.1987

УДК 539.374

М. Я. БРОВМАН

О ЛИНИЯХ ТОКА ПРИ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Большинство точных решений задач теории пластичности находят полуобратными методами, принимая допущения о поле скоростей и определяя затем напряжения. Так, в задаче о течении среды в канале с прямолинейными стенками допущение о том, что линии тока – прямые, проходящие через начало координат, оправдывается и позволяет найти решение [1, 2]. В [3] найдено частное решение, в котором линиями тока являются логарифмические спирали.

В данной работе рассмотрен вопрос о проверке допущения о том, что кривые данного семейства являются линиями тока. При этом скорость и компоненты девиатора напряжений выражаются через функцию одной из криволинейных координат. Получено нелинейное дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять эта функция, если допущение оказывается правильным.

Пусть в некоторой области выбраны два семейства ортогональных кривых, описываемых дифференцируемыми функциями $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$, и линиями тока являются кривые $\beta(x, y)$, фиг. 1.

Тогда из условия несжимаемости

$$v_{\alpha} = f_0(\beta) H_2^{-1} = H_2^{-1} \int \exp[f(\beta)] d\beta \quad (1)$$

где H_1, H_2 – коэффициенты первой квадратичной формы, $f_0(\beta)$ – произвольная функция.

Определив по известным формулам [1–4] компоненты тензора скорости деформации, находим компоненты девиатора напряжений

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} &= k[f(\beta) - F_1] \{ [f(\beta) - F_1]^2 + F_2^2 \}^{-1/2} \\ \sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta} &= 2kF_2 \{ [f(\beta) - F_1]^2 + F_2^2 \}^{-1/2} \\ F_1 &= \frac{\partial}{\partial\beta} [\ln(H_1 H_2)], \quad F_2 = \frac{2}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial\alpha} \end{aligned} \quad (2)$$

где k – предел текучести при сдвиге, $\tau_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha}, \sigma_{\beta}$ – компоненты напряжений в координатах α, β .

Подставляя $\tau_{\alpha\beta}$ и $(\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta})$ в уравнения равновесия с применением связи между коэффициентами H_1, H_2 и их производными [2], получаем дифференциальное уравнение второго порядка для функции $f(\beta)$:

$$\begin{aligned} d^2 f(\beta)/d\beta^2 + \Phi_1 [df(\beta)/d\beta]^2 + \Phi_2 df(\beta)/d\beta + \Phi_3 &= 0 \\ \Phi_1 &= -3[f(\beta) - F_1] \{ [f(\beta) - F_1]^2 + F_2^2 \}^{-1/2} \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициенты Φ_2, Φ_3 также являются алгебраическими функциями $f(\beta)$, величин H_1, H_2 и их производных. В некоторых случаях уравнение (3) удобно использовать для проверки возможных точных решений.

Рассмотрим с учетом (2) случай, когда

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} &= 0, \quad v_{\alpha} = H_1 [\varphi(\alpha)]^{-1}, \quad f(\beta) = F_1, \quad \partial F_1 / \partial\alpha = \partial^2 [\ln(H_1 H_2)] / \partial\alpha \partial\beta = 0, \\ H_1 H_2 &= \varphi(\alpha) \psi(\beta) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sigma_{\alpha} = 2k + 2k \ln [H_2^{-1} \psi(\beta)], \quad \sigma_{\beta} = 2k \ln [H_2^{-1} \psi(\beta)]$$

где $\varphi(\alpha), \psi(\beta)$ – некоторые функции.