МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1989

УДК 539.3

Г. А. МОРАРЬ

МЕТОД РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ ПЛАСТИН ТИМОШЕНКО

Построены решения от разрывных сосредоточенных скачков прогиба, угла поворота нормали и усилий для пластин, позволяющие сформулировать в виде интегральных уравнений разнообразные задачи о дефектах произвольной природы. В основу положены уравнения пластин, учитывающие деформации сдвига [1–3].

В отличие от метода построения разрывных решений, изложенного в [4] рассматриваются сосредоточенные в точке скачки соответствующих величин. Метод аналогичен методу дисторсий, применяемому в теории оболочек [5, 6].

1. Основные соотношения. Следуя [1—3] приведем основные соотношения теории изгиба пластин с учетом деформаций поперечного сдвига

$$\begin{gathered} D\Delta\Delta w=q-\mu^{-2}(2-\nu)(1-\nu)^{-1}\Delta q \\ \Delta\psi-\mu^2\psi=0 \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь w — прогиб плиты, ψ — функция напряжений, q — интенсивность внешней нагрузки, $\mu^2=10/h^2$, h — толщина пластины, D — цилиндрическая жесткость, ν — коэффициент Пуассона.

Усилия выражаются через функции w и ψ по формулам

$$\begin{gathered} M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{2}{\mu^2}\frac{\partial Q_x}{\partial x}-\frac{\nu q}{\mu^2(1-\nu)} \\ M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\frac{2}{\mu^2}\frac{\partial Q_y}{\partial y}-\frac{\nu q}{\mu^2(1-\nu)} \\ M_{xy}=M_{yx}=-(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{\partial Q_x}{\partial y}+\frac{\partial Q_y}{\partial x}\right) \\ Q_x=-D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w+\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{(2-\nu)}{\mu^2(1-\nu)}\frac{\partial q}{\partial x} \\ Q_y=-D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w-\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{(2-\nu)}{\mu^2(1-\nu)}\frac{\partial q}{\partial y} \end{gathered} \tag{1.2}$$

Вращения нормали к срединной плоскости (G' — модуль сдвига пластины):

$$\beta_x=-\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{6}{5G'h}Q_x,\qquad \beta_y=-\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{6}{5G'h}Q_y \tag{1.3}$$

Примем в дальнейшем $q\equiv0$. Введем для скачков функций следующие обозначения

$$\langle w_x\rangle=w(-0,y)-w(+0,y),\quad \langle\beta_x\rangle=\beta_x(-0,y)-\beta_x(+0,y)$$

$$\langle M_x\rangle=M_x(-0,y)-M_x(+0,y),\ldots$$

Предположим теперь, что при переходе через линию $x=0$ прогиб претерпевает сосредоточенный скачок вида $\langle w_x\rangle=[w_x]\delta(y)$, где $[w_x]$ — величина скачка, $\delta(y)$ — дельта-функция.

Применив к системе (1.1) интегральное преобразование Фурье по x (с параметром α) по схеме обобщенного метода [4] получим

$$\begin{gathered}\frac{d^4w_\alpha}{dy^4}-2\alpha^2\frac{d^2w_\alpha}{dy^2}+\alpha^4w_\alpha=-i\alpha^3\langle w_x\rangle+\alpha^2\left\langle\frac{\partial w}{\partial x}\right\rangle+\\+i\alpha\left\langle\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial^3w}{\partial x}\right\rangle+2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(i\alpha\langle w_x\rangle-\left\langle\frac{\partial w}{\partial x}\right\rangle\right)\\ d^2\psi_\alpha/dy^2-(\alpha^2+\mu^2)\psi_\alpha=i\alpha\langle\psi_x\rangle-\langle\partial\psi/\partial x\rangle\end{gathered}\tag{1.4}$$

$$w_\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}w(x,y)e^{i\alpha x}dx,\qquad \psi_\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,y)e^{i\alpha x}dx$$

Потребуем, чтобы функции M_x, M_{xy}, Q_x и β_x были непрерывными при $x=0$. Записывая соотношения (1.2) и (1.3) в скачках, найдем

$$\begin{gathered}\langle\partial w/\partial x\rangle=0,\quad \langle\partial^2w/\partial x^2\rangle=-\nu[w_x]\delta''(y)\\ \langle\partial^3w/\partial x^3\rangle=0,\quad \langle\psi_x\rangle=0,\quad \langle\partial\psi/\partial x\rangle=-(1-\nu)D[w_x]\delta'''(y)\end{gathered}\tag{1.5}$$

Подставим выражения (1.5) в (1.4) и решим полученное уравнение. Применение формулы обращения для преобразования Фурье дает ($K_0(x)$ — функция Макдональда):

$$\begin{gathered}w=-(4\pi)^{-1}[w_x]xr^{-4}[(3-\nu)x^2+(1+\nu)y^2]\\ \psi=-(2\pi)^{-1}(1-\nu)D[w_x]\partial^3K_0(\mu r)/\partial y^3,\quad r=(x^2+y^2)^{1/2}\end{gathered}\tag{1.6}$$

Используя теперь формулы (1.2), (1.3) можно определить усилия и углы поворота нормали.

Аналогично можно рассмотреть скачки угла поворота β_x и усилий M_x, M_{xy} и Q_x вдоль оси x (при $x=0$), сосредоточенных в точке $y=0$, а также сосредоточенные скачки функций w, β_y, M_y, M_{yx}, Q_y вдоль y при $y=0$. Для того, чтобы компактнее записать результаты, воспользуемся матричной записью. Введем в рассмотрение вектор скачков $\{S\}$:

$$\{S\}^T=\{[w_x],[w_y],[\beta_x],[\beta_y],[M_x],[M_y],[M_{xy}],[M_{yx}],[Q_x],[Q_y]\}$$

Зависимость прогиба и углов поворота нормали от вектора скачков запишем в виде

$$\{W\}=\|G\|\{S\},\quad \{W\}^T=\{w,\beta_x,\beta_y\}\tag{1.7}$$

Матрица $\|G\|$ имеет размеры 3×10. Повторяя аналогичные выкладки, можно получить все элементы матрицы $\|G\|$. Приводим окончательные результаты ($g_{ik}\equiv g_{ik}(x,y)$):

$$\begin{gathered}g_{11}=-{}^1/_4x[(3-\nu)x^2+(1+\nu)y^2]/\pi r^4\\ g_{13}={}^1/_4[(1+\nu)\ln r+(1-\nu)x^2/r^2]/\pi\\ g_{15}=x\ln r/4\pi D,\quad g_{17}=y\ln r/4\pi D\\ g_{19}=\frac{1}{8\pi(1-\nu)\mu^2D}[-8\ln r+\mu^2(1-\nu)r^2\ln r]\\ g_{21}=\frac{1}{4\pi r^6}[-(3-\nu)x^4+6(1-\nu)x^2y^2+(1+\nu)y^4]+\\+\frac{1}{\pi\mu^2}\left[\frac{6}{r^{10}}(x^6-5x^2y^2r^2+y^6)-\frac{\partial^4K_0(\mu r)}{\partial y^4}\right]\end{gathered}\tag{1.8}$$

$$g_{22}=-\frac{xy}{2\pi r^6}[(1+\nu)x^2+(5-3\nu)y^2]+\frac{1}{\pi\mu^2}\left[\frac{24xy}{r^{10}}(y^4-x^4)+\frac{\partial^4 K_0(\mu r)}{\partial x^3\,\partial y}\right]$$

$$g_{23}=-\frac{x}{4\pi r^4}[(1+\nu)x^2+(3-\nu)y^2]+\frac{1}{\pi\mu^2}\left[\frac{2x}{r^8}(3y^4+2x^2y^2-x^4)+\frac{\partial^3 K_0(\mu r)}{\partial x\,\partial y^2}\right]$$

$$g_{24}=-\frac{x}{4\pi r^4}[(1+\nu)x^2-(1-3\nu)y^2]+\frac{1}{\pi\mu^2}\left[\frac{2x}{r^8}(x^4-2x^2y^2-3y^4)-\frac{\partial^3 K_0(\mu r)}{\partial x\,\partial y^2}\right]$$

$$g_{25}=g_{28}=\frac{1}{\pi D}\left\{-\frac{1}{4}\left(\ln r+\frac{x^2}{r^2}\right)+\frac{\mu^{-2}}{(1-\nu)}\left[\frac{(x^2-y^2)}{r^4}+\frac{\partial^2 K_0(\mu r)}{\partial y^2}\right]\right\}$$

$$g_{26}=g_{27}=\frac{1}{\pi D}\left\{-\frac{xy}{4r^2}+\frac{\mu^{-2}}{(1-\nu)}\left[\frac{2xy}{r^4}-\frac{\partial^2 K_0(\mu r)}{\partial x\,\partial y}\right]\right\}$$

$$g_{29}=g_{2,\,10}=-x\ln r/4\pi D$$

Остальные коэффициенты получаются путем замены $(x\leftrightarrow y)$ в правых частях равенств: $g_{1,\,k+1}=g_{1,\,k}$, $g_{3,\,k+1}=g_{2,\,k}$, $g_{3,\,k}=g_{2,\,k+1}$ $(k=1, 3, 5, 7, 9)$.

Вектор усилий связан с вектором скачков зависимостью

$$\{N\}=\|T\|\{S\},\quad \{N\}^T=\{M_x,\ M_y,\ M_{xy},\ Q_x,\ Q_y\} \tag{1.9}$$

Матрица $\|T\|$ имеет размеры 5×10. Ее элементы равны

$$t_{11}=\frac{(1-\nu)D}{\pi}\left[\frac{3(1-\nu)}{2r^8}x(x^4-6x^2y^2+y^4)-\right.$$
$$\left.-\frac{24x}{\mu^2 r^{12}}(x^6-9x^4y^2-5x^2y^4+5y^6)-\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^5 K_0(\mu r)}{\partial x\,\partial y^4}\right]$$

$$t_{12}=\frac{(1-\nu)D}{\pi}\left\{\frac{y}{2r^8}[3(1+3\nu)x^4+2(11-7\nu)x^2y^2-(5-\nu)y^4]+\right.$$
$$\left.+\frac{24y}{\mu^2 r^{12}}(y^6-9x^2y^4-5x^4y^2+5x^6)+\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^5 K_0(\mu r)}{\partial x^4\,\partial y}\right\}$$

$$t_{13}=\frac{(1-\nu)D}{\pi}\left\{\frac{1}{4r^6}[(1+3\nu)x^4+6(1-\nu)x^2y^2-(3+\nu)y^4]+\right.$$
$$\left.+\frac{6}{\mu^2 r^{10}}(x^6-5x^2y^2r^2+y^6)+\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^4 K_0(\mu r)}{\partial x^2\,\partial y^2}\right\}$$

$$t_{14}=\frac{(1-\nu)D}{\pi\mu^2}\left\{\frac{(r^4-8x^2y^2)}{4r^8}[(1-\nu)\mu^2r^2-24]-\frac{\partial^4 K_0(\mu r)}{\partial x^2\,\partial y^2}\right\}$$

$$t_{15}=t_{18}=-\frac{1}{\pi}\left\{\frac{x}{4r^4}[(1+\nu)x^2+(3-\nu)y^2]+\frac{2x}{\mu^2r^6}(x^2-3y^2)-\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^3 K_0(\mu r)}{\partial x\,\partial y^2}\right\}$$

$$t_{16}=t_{17}=-\frac{1}{\pi}\left\{\frac{y}{4r^4}[(1+\nu)y^2+(3\nu-1)x^2]+\frac{2y}{\mu^2r^6}(3x^2-y^2)+\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^3 K_0(\mu r)}{\partial x^2\,\partial y}\right\}$$

$$t_{19}=t_{1,10}=-\frac{1}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln r+(1-\nu)\frac{x^2}{r^2}+\frac{3\nu+1}{2}\right]$$

$$t_{31}=\frac{(1-\nu)D}{\pi}\left\{\frac{y}{2r^8}[3(5-3\nu)x^4-2(5-7\nu)x^2y^2-(1+\nu)y^4]-\right.$$
$$\left.-\frac{24y}{\mu^2r^{12}}(5x^6-5x^4y^2-9x^2y^4+y^6)+\frac{1}{2\mu^2}\left[\frac{\partial^5 K_0(\mu r)}{\partial x^2\,\partial y^3}-\frac{\partial^5 K_0(\mu r)}{\partial y^5}\right]\right\} \tag{1.10}$$

$$t_{33}=\frac{(1-\nu)D}{\pi}\left\{\frac{xy}{2r^6}[(3-\nu)y^2-(1-3\nu)x^2]-\frac{24xy}{\mu^2r^{10}}(y^4-x^4)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\mu^2}\left[\frac{\partial^4K_0(\mu r)}{\partial x\,\partial y^3}-\frac{\partial^4K_0(\mu r)}{\partial x^3\,\partial y}\right]\right\}$$
$$t_{35}=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{(1-\nu)y}{4r^4}(x^2-y^2)-\frac{2y}{\mu^2r^6}(3x^2-y^2)+\frac{1}{2\mu^2}\left[\frac{\partial^3K_0(\mu r)}{\partial y^3}-\frac{\partial^3K_0(\mu r)}{\partial x^2\,\partial y}\right]\right\}$$
$$t_{37}=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{(1-\nu)x}{4r^4}(y^2-x^2)-\frac{2x}{\mu^2r^6}(3y^2-x^2)+\frac{1}{2\mu^2}\left[\frac{\partial^3K_0(\mu r)}{\partial x^3}-\frac{\partial^3K_0(\mu r)}{\partial x\,\partial y^2}\right]\right\}$$
$$t_{39}=-{}^1/_4(1-\nu)xy/\pi r^2$$
$$t_{41}=\frac{(1-\nu)D}{2\pi}\left[\frac{6}{r^8}(r^4-8x^2y^2)-\frac{\partial^4K_0(\mu r)}{\partial y^4}\right]$$
$$t_{42}=\frac{(1-\nu)D}{2\pi}\left[\frac{24xy}{r^{10}}(y^4-x^4)+\frac{\partial^4K_0(\mu r)}{\partial x^3\,\partial y}\right]$$
$$t_{43}=-t_{44}=\frac{(1-\nu)D}{2\pi}\left[\frac{2x}{r^8}(3y^4+2x^2y^2-x^4)+\frac{\partial^3K_0(\mu r)}{\partial x\,\partial y^2}\right]$$
$$t_{45}=t_{48}=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{(x^2-y^2)}{r^4}+\frac{\partial^2K_0(\mu r)}{\partial y^2}\right]$$
$$t_{46}=t_{47}=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2xy}{r^4}-\frac{\partial^2K_0(\mu r)}{\partial x\,\partial y}\right],\qquad t_{49}=t_{4,10}=-\frac{x}{2\pi r^2}$$

Остальные коэффициенты могут быть получены заменой ($x\leftrightarrow y$) в правых частях равенств: $t_{2,k}=t_{1,k-1}$, $t_{2,k-1}=t_{1,k}$, $t_{3,k}=t_{3,k-1}$, $t_{5,k}=t_{4,k-1}$, $t_{5,k-1}=t_{4,k}$ ($k=2, 4, 6, 8, 10$).

Полученные соотношения позволяют сформулировать разнообразные задачи теории пластин непрямым методом граничных элементов, например, в форме метода компенсирующих нагрузок [7—9].

Особенно полезны эти решения для формулировки различных задач при наличии дефектов общей природы (например, отслоившиеся включения). Пусть, например, такой дефект расположен на отрезке $|x|\leqslant a$, $y=0$. При переходе через дефект могут претерпевать скачки прогиб, угол поворота нормали β_y, моменты M_y, M_{yx} и поперечная сила Q_y. Напряженное состояние пластины представим в виде суммы основного напряженного состояния, вызванного внешней нагрузкой, и возмущенного, вызванного наличием дефекта. С помощью соотношений (1.7), (1.9) запишем, например

$$w=w^*+\int_{-a}^{a}g_{12}(x-t,y)\langle w_y\rangle(t)\,dt+\int_{-a}^{a}g_{14}(x-t,y)\langle\beta_y\rangle(t)\,dt+$$
$$+\int_{-a}^{a}g_{16}(x-t,y)\langle M_y\rangle(t)\,dt+\int_{-a}^{a}g_{18}(x-t,y)\langle M_{yx}\rangle(t)\,dt+\int_{-a}^{a}g_{1,10}(x-t,y)\langle Q_y\rangle(t)\,dt \qquad (1.11)$$

где w^* — прогиб основного напряженного состояния.

Аналогичные выражения могут быть записаны и для величин β_y, M_y, M_{yx}, Q_y. В (1.11) часть скачков может быть известна. Для определения остальных скачков используются те или иные условия при $y=\pm0$, которые приводят к интегральным уравнениям относительно неизвестных скачков. Распространение техники метода разрывных решений на произвольный контур может быть выполнено, например, по методике [9].

2. Приложение основных соотношений. Проиллюстрируем технику применения разрывных решений на двух задачах. 1°. Рассмотрим бесконечную пластину, ослабленную на участке $y=0$, $|x|\leqslant a$ трещиной (разрезом), берега которой не контактируют и свободны от напряжений. Напряженное состояние пластины представим в виде суммы основного состояния, вызванного внешней нагрузкой в пластине без разреза, и возмущенного, вызванного наличием разреза. Для простоты выкладок рассмотрим чистый изгиб пластинки постоянными моментами на бесконечности. В этом случае основное состояние описывается функциями

$$w^*(x, y) = -[2(1+\nu)D]^{-1}M_0(x^2+y^2)$$
$$M_x^* = M_y^* = M_0, \quad M_{xy}^* = 0, \quad Q_x^* = Q_y^* = 0 \tag{2.1}$$

При переходе через линию $y=0$ угол поворота β_y претерпевает скачок, а прогиб и усилия M_y, M_{yx} и Q_y непрерывны. С помощью соотношений (1.7) и (1.9) запишем

$$w = w^* + \int_{-a}^{a} g_{14}(x-t, y)\langle\beta_y\rangle(t)\,dt$$
$$M_y = M_y^* + \int_{-a}^{a} t_{24}(x-t, y)\langle\beta_y\rangle(t)\,dt \tag{2.2}$$

Аналогичные выражения можно записать и для остальных усилий. Если бы в (2.2) скачок $\langle\beta_y\rangle$ был известен, то задача была бы решена. Получим интегральное уравнение для определения $\langle\beta_y\rangle$.

Если берега трещины свободны от напряжений, то при $y=\pm 0$:

$$M_y = 0, \quad M_{yx} = 0, \quad Q_y = 0 \tag{2.3}$$

Второе и третье условие в (2.3) выполняются тождественно, а первое **приводит к интегральному уравнению относительно скачка** $\langle\beta_y\rangle$

$$\int_{-a}^{a} t_{24}(x-t, \pm 0)\langle\beta_y\rangle(t)\,dt = -M_0 \quad (|x| \leqslant a) \tag{2.4}$$

где перечеркнутый знак интеграла означает, что последний понимается в регуляризованном смысле [10].

С помощью формулы для t_{24} из (1.10) найдем

$$t_{24}(x-t, \pm 0) = (1-\nu)\pi^{-1}D[-{}^1/_4(3+\nu)(x-t)^{-2} + 6\mu^{-2}(x-t)^{-4} -$$
$$-\mu|x-t|^{-1}K_1(\mu|x-t|) - 3(x-t)^{-2}K_2(\mu|x-t|)) \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (2.4) и перейдя к безразмерным переменным $x' = x/a$, $t' = t/a$, получим

$$\int_{-a}^{a} K(x'-t')\varphi(t')\,dt' = -\frac{\pi a M_0}{(1-\nu)D} \quad (|x'| \leqslant 1) \tag{2.6}$$

$$K(z') = -{}^1/_4(3+\nu)(z')^{-2} + 6\mu_0^{-2}(z')^{-4} -$$
$$-\mu_0|z'|^{-1}K_1(\mu_0|z'|) - 3(z')^{-2}K_2(\mu_0|z'|) \tag{2.7}$$
$$\varphi(x') = \langle\beta_y\rangle(ax'), \quad z' = x'-t', \quad \mu_0 = \mu a$$

В дальнейшем штрихи опустим. Воспользовавшись разложениями функций Макдональда в степенной ряд, найдем $K(z) = -{}^1/_4(1+\nu)z^{-2} - {}^1/_8\mu_0^2 \ln|z| - \Phi(z)$, где регулярная часть ядра $\Phi(z)$ имеет вид (C — постоянная Эйлера)

$$\Phi(z) = {}^1/_2 z^{-2} - 6\mu_0^{-2}z^{-4} - {}^1/_8\mu_0^2 \ln|z| + \mu_0|z|^{-1}K_1(\mu_0|z|) + 3z^{-2}K_2(\mu_0|z|)$$
$$\lim \Phi(z) = \mu_0^2[{}^1/_8 \ln\mu_0 + {}^1/_{32}(1+4C-4\ln 2)] \quad \text{при } z \to 0$$

Точное решение уравнения (2.6) неизвестно. Приближенное решение можно получить, например, методом ортогональных многочленов [4].

Представим функцию $\Phi(x-t)$, непрерывную по обеим переменным в квадрате $\{|x|\leqslant 1,\ |t|\leqslant 1\}$, в виде отрезка ряда Фурье по многочленам Чебышева второго рода

$$\Phi(x-t)\cong\sum_{i=1}^{2N-1}\sum_{j=1}^{2N-1}\Phi_{ij}U_{i-1}(x)U_{j-1}(t)$$

Коэффициенты Φ_{ij} представляются в виде [11]:

$$\Phi_{ij}=\frac{1}{N^2}\sum_{p=1}^{2N-1}\sum_{q=1}^{2N-1}s_p s_q\Phi(\lambda_p-\lambda_q)U_{i-1}(\lambda_p)U_{j-1}(\lambda_q)$$

$$(x_p=\pi p/2N,\ \lambda_p=\cos x_p,\ s_p=\sin^2 x_p)$$

Решение уравнения (2.6) разыскиваем в виде ряда

$$\varphi(x)=(1-x^2)^{1/2}\sum_{m=1}^{\infty}X_m U_{2m-2}(x)$$

Пользуясь схемой метода ортогональных многочленов [4], с помощью спектрального соотношения

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^{-1/2}U_m(t)\,dt}{(x-t)^2}=-\pi(m+1)U_m(x)\quad(|x|\leqslant 1)\tag{2.8}$$

и формул [4] сведем задачу к следующей системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов X_m ($T_m(x)$ — полином Чебышева первого рода):

$$(2k-1)X_k+\sum_{m=1}^{\infty}(a_{km}-b_{km})X_m=c_k\quad(k=1,2,\ldots,)$$

$$a_{km}={}^1/{}_2\mu_0{}^2\pi^{-1}(1+\nu)^{-1}(\alpha_{2k-1,\,2m-2}-\alpha_{2k-1,\,2m})\quad(k,\ m=1,\ 2,\ldots,)$$

$$\alpha_{km}=\frac{1}{m}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{1/2}U_k(x)T_m(x)\,dx$$

$$b_{km}=2(1+\nu)^{-1}\Phi_{2k-1,\,2m-1}\ (k,\ m=1,\ 2,\ldots,\ N)$$

$$b_{km}=0\quad(k,\ m=N+1,\ N+2,\ldots,)$$

$$c_1=-4aM_0/[(1-\nu^2)D],\ c_k=0\ (k=2,\ 3,\ldots,)$$

Соотношение (2.8) следует из формулы А 10.3 из [4]. Коэффициенты α_{km} вычисляются с помощью замены $x=\cos\theta$.

Определим коэффициент интенсивности напряжений из выражения

$$K_{\rm I}=\lim[2\pi(x-a)]^{1/2}\sigma_y(x,\ 0)\quad(x\to a+0)\tag{2.9}$$

$$\sigma_y=12zh^{-3}M_y(x,\ 0)$$

Если перейти в (2.9) к безразмерным переменным и воспользоваться выражением для M_y из (2.2) и соотношением

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^{1/2}U_m(t)\,dt}{(\zeta-t)^2}=\pi(m+1)\frac{[\zeta-(\zeta^2-1)^{1/2}]^{m+1}}{(\zeta^2-1)^{1/2}}$$

$$(\zeta=x+iy,\quad |\zeta|>1,\quad m=0,\ 1,\ldots,)$$

получим при $z=h/2$:

$$K_I=(\pi a)^{1/2}\sigma_0\sum_{m=1}^{\infty}(2m-1)X_m^\circ,\quad X_m^\circ=-\frac{(1-\nu^2)DX_m}{4aM_0},\quad \sigma_0=\frac{6M_0}{h^2}\tag{2.10}$$

Ниже приведены значения $K_I^*=K_I/(\pi a)^{1/2}\sigma_0$ в зависимости от μ_0 при $\nu=0{,}3$:

μ_0	0,5	1,0	2,0	3,0	5,0	10,0	∞
K_I^*	0,940	0,873	0,793	0,753	0,716	0,687	0,394

С уменьшением толщины пластины h коэффициент K_I убывает. В предельном случае, когда $h\to 0$ ($\mu_0\to\infty$) из (2.7) следует $K(z)=-{}^1/_4(3+\nu)z^{-2}$ и интегральное уравнение допускает точное решение. Для этого случая $X_1=-4aM_0/(3+\nu)(1-\nu)D$, $X_m=0$ ($m=2, 3,\ldots,$) и коэффициент интенсивности напряжений согласно (2.10) равен $K_I=(1+\nu)(3+\nu)^{-1}(\pi a)^{1/2}\sigma_0$. Для классической теории пластин $K_I=(\pi a)^{1/2}\sigma_0$. Приведенная задача другими методами решена в [12—14].

2°. В качестве второго примера рассмотрим изгиб бесконечной пластины, подкрепленной на участке $y=0$, $|x|\leqslant a$ тонким ребром, свободным от нагрузки. Толщину ребра не учитываем, считая что контакт осуществляется по линии. При переходе через ребро претерпевает скачок крутящий момент M_{yx}. Как и в первой задаче, представим решение в виде

$$w=w^*+\int_{-a}^{a}g_{18}(x-t,y)\langle M_{yx}\rangle(t)\,dt$$

где w^* дается выражением (2.1). Ребро изгибается моментами $\langle M_{yx}\rangle$. Прогиб ребра может быть представлен в виде (c_0 — постоянная)

$$v(x)=-\frac{1}{E_0I_0}\int_{-a}^{a}\frac{\partial G_0(x,t)}{\partial t}\langle M_{yx}\rangle(t)\,dt+c_0$$

где E_0I_0 — жесткость ребра, $G_0(x,\ t)$ — обобщенная функция Грина [15] одномерной краевой задачи $d^4v/dx^4=0$ с условиями $v''=v'''=0$ при $x=\pm a$.

$$G_0(x,\ t)={}^1/_{12}|x-t|^3-{}^1/_{80}a^{-3}xt(x^4+t^4)-{}^1/_{48}a^{-1}(x^4+t^4)+$$
$$+{}^1/_8a^{-1}xt(x^2+t^2)-{}^1/_8a(x^2+t^2)+{}^{33}/_{280}axt+{}^1/_{40}a^3$$

Из условия контакта ребра и пластины $v(x)=w(x,\ 0)$ получим интегральное уравнение для определения скачка $\langle M_{yx}\rangle$. После дифференцирования и приведения к интервалу $[-1,1]$ оно примет вид

$$\int_{-1}^{1}[\ln|x-t|+4\pi\lambda K(x,t)]\varphi(t)\,dt=\frac{4\pi M_0}{1+\nu}x\qquad(|x|\leqslant 1)\tag{2.11}$$

$$\varphi(x)=\langle M_{yx}\rangle(ax),\qquad \lambda=aD/E_0I_0$$
$$K(x,\ t)=a^{-3}\partial^2G_0(ax,\ at)/\partial x\partial t$$

Условия равновесия ребра в безразмерных переменных имеет вид

$$\int_{-1}^{1}\varphi(x)\,dx=0\tag{2.12}$$

Решения уравнения (2.11), удовлетворяющие условию (2.12), разыскиваем в виде

$$\varphi(x)=(1-x^2)^{-1/2}\sum_{m=1}^{\infty}X_mT_{2m-1}(x)$$

Воспользовавшись соответствующим спектральным соотношением из [4], сведем задачу к решению следующей системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов X_m:

$$\frac{X_k}{2k-1} - 2\pi\lambda\sum_{m=1}^{N} a_{2k,2m}X_m = -\frac{4M_0}{(1+\nu)}\delta_{1k} \quad (k=1,2,\ldots,)$$

где $a_{2k,\,2m}$ представляют собой коэффициенты в представлении регулярной части ядра в виде

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{2N}\sum_{j=1}^{2N} a_{ij}T_{i-1}(x)\,T_{j-1}(t)$$

и равны [11]:

$$a_{ij} = \frac{1}{N^2(1+\delta_{1i})\,(1+\delta_{1j})}\sum_{p=1}^{2N}\sum_{q=1}^{2N} K(\lambda_p,\lambda_q)\,T_{i-1}(\lambda_p)\,T_{j-1}(\lambda_q)$$

$$(\lambda_n=\cos[\,(2n-1)\,\pi/4N\,])$$

Вычисляя, как и в случае трещины, коэффициент интенсивности напряжений получим

$$K_{\mathrm{I}} = (\pi a)^{1/2}\sigma_0 K_{\mathrm{I}}^*, \qquad K_{\mathrm{I}}^* = \frac{1}{1+\nu}\sum_{m=1}^{N} X_m^*, \qquad X_m^* = \frac{(1+\nu)}{4M_0}X_m$$

Ниже приведены значения K_{I}^* при различных λ:

λ	0,0	0,1	0,3	0,5	1,0	2,0	5,0	∞
K_{I}^*	0,769	0,622	0,471	0,391	0,291	0,212	0,136	0

С увеличением E_0I_0 коэффициент K_{I} возрастает, достигая наибольшего значения в случае жесткого ребра ($\lambda=0$). При $\lambda=0$ уравнение (2.11) имеет точное решение $\varphi(x)=4(1+\nu)^{-1}M_0x(1-x^2)^{-1/2}$.

Автор выражает благодарность Г. Я. Попову за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 266 с.
3. *Пелех Б. Л.* Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. Киев: Наук. думка, 1977. 182 с.
4. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
5. *Осадчук В. А.* Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. Киев: Наук. думка, 1985. 221 с.
6. *Осадчук В. А., Подстригач Я. С.* Напряженное состояние и предельное равновесие оболочек с трещинами // Итоги науки и техники СССР. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 18. С. 3–52.
7. *Коренев Б. Г.* Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. М.: Физматгиз, 1960. 458 с.
8. *Безухов Н. И., Лужин О. В.* Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. М.: Высш. шк., 1974. 200 с.
9. *Крауч С., Старфилд С.* Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987. 328 с.
10. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Изд-во МГУ, 1984. 207 с.
11. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматгиз, 1967. 500 с.
12. *Knowles J. K., Wang N. M.* On the bending of an elastic plate containing a crack // J. Math. Phys. 1960. V. 39. № 3. P. 223–236.
13. *Wang N. M.* Effects of plate thickness on the bending of an elastic plate containing a crack // J. Math. Phys. 1968. V. 47. N 4. P. 371–390.
14. *Hartranft R. J., Sih G. S.* Effect of plate thickness on the bending stress distribution around through cracks // J. Math. Phys. 1968. V. 47. № 3. P. 276–291.
15. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз, 1961. 703 с.

Кишинев

Поступила в редакцию
29.VI.1987