МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1989

УДК 539.3

А. А. ИНФИМОВСКАЯ, Н. Н. РОГАЧЕВА, Г. Н. ЧЕРНЫШЕВ

ОБ ИЗМЕРЕНИИ МАЛЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ТОНКИМИ ПЬЕЗОТЕНЗОДАТЧИКАМИ

Представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований, выполненных с целью обоснования метода измерения малых динамических деформаций в упругих телах при помощи тонких пьезокерамических датчиков. На основе асимптотического анализа трехмерных уравнений электроупругости для пластинки получены формулы, связывающие динамические деформации исследуемого упругого тела и электрические сигналы, генерируемые пьезопластинками при прохождении гармонической волны по упругому телу. Экспериментально получены значения констант, входящих в пересчетные формулы. С помощью пьезотензодатчиков были осуществлены измерения деформаций круглой защемленной по контуру стальной пластины при возбуждении резонансных колебаний. Прогибы пластинки измерялись при помощи голографической интерферометрии [1]. По прогибам рассчитывались деформации в точках наклейки пьезопластинок и сопоставлялись с деформациями, полученными в результате пересчета электрического сигнала с датчиков.

Предложенный метод измерения динамических деформаций подтверждается хорошим совпадением теоретических и экспериментальных результатов.

1. Теория пьезодатчиков деформаций. Измерение динамических деформаций в упругом теле предлагается производить при помощи наклеенных тонких пьезокерамических пластинок. Пластинка предварительно поляризована в направлении толщины. Лицевые поверхности пластинки покрыты электродами; одной из лицевых поверхностей пластинка приклеена к исследуемому телу. При этом клеевая прослойка служит электроизоляцией. Для того, чтобы получить соотношения, связывающие динамические деформации в упругом теле с величинами электрических потенциалов на электродах пластинок, следует рассмотреть электроупругое состояние в пластинках, наведенное деформациями упругого тела.

Обозначим ширину пьезокерамической пластинки через $2a$, длину — $2b$, толщину — $2h$. Замкнем электроды этой пластинки внешним контуром с известной комплексной проводимостью $Y=Y_0+iY_1$. Тогда для генерируемого пластинкой потенциала V под действием гармонически меняющейся по временному закону $e^{-i\omega t}$ волны деформаций в упругом теле имеет место соотношение [2]:

$$2YV=-i\omega\int_S D_3\, dS \tag{1.1}$$

где S — поверхность одного из электродов, D_3 — компонента вектора электрической индукции в направлении нормальном к поверхности тела.

Пусть пьезопластинка имеет толщину много меньшую ширины и длины $h\ll\min(a, b)$. Полное электроупругое состояние пьезопластинки можно представить [3] в виде суммы внутреннего достаточно медленно меняющегося по координатам срединной поверхности пластинки электроупругого состояния и электроупругого погранслоя, локализованного вблизи краев пластинки. Для тонкой пластинки вклад погранслоя мал и им можно пренебречь. Если пластинка жестко склеена с упругим телом, как принято в данной работе, то из анализа задачи электроупругости следует, что деформации в плоскости пластинки равны деформациям исследуемого тела и в пределах пластинки являются постоянными, так как предполагается, что размеры ее малы по сравнению с размерами тела и длиной упругой волны.

Напряжениями σ_3 в тонкой пластинке в первом приближении можно пренебречь. Тогда из формулы (1.1) и соотношений электроупругости [4] следует

$$\sigma_i=(\varepsilon_i+\nu\varepsilon_j-d_{31}E_3)/s_{11}^E(1-\nu^2)\,(i\neq j=1,\ 2) \tag{1.2}$$

здесь σ_i, ε_i — напряжения и деформации тела по координатам x_i (i, $j=1, 2$), s_{11}^E — упругая податливость при нулевом электрическом поле, d_{31} — пьезоэлектрическая постоянная, ν — коэффициент Пуассона, E_3 — компонента напряженности электрического поля, которая для рассматриваемого случая тонкой пластинки в первом приближении, как следует из соотношений электроупругости, связана с потенциалом V соотношением $E_3=-V/h$. Приведем еще одну формулу из соотношений электроупругости

$$D_3=\varepsilon_{33}^T E_3+d_{31}(\sigma_1+\sigma_2)+d_{33}\sigma_3 \tag{1.3}$$

где ε_{33}^T — диэлектрическая проницаемость при нулевых напряжениях.

Для суммы деформаций ($\varepsilon_1+\varepsilon_2$) при помощи выше выписанных формул и соотношений электроупругости после некоторых преобразований получим:

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2=\mathrm{Re}\left[i\frac{2Y}{\omega S}\frac{s_{11}^E(1-\nu)}{d_{31}}-\frac{d_{31}}{h}\left(2-\frac{1-\nu}{k^2}\right)\right]V$$

$$k^2=d_{31}^2(\varepsilon_{11}^T s_{11}^E)^{-1} \tag{1.4}$$

В полученную формулу входят физические постоянные пьезокерамики, проводимость цепи и измеряемый потенциал. Таким образом, потенциал определяется суммой главных деформаций тела (и напряжений согласно закону Гука). По отдельности определить компоненты ε_1, ε_2 широкой пластинкой не удается.

Измерения каждой из компонент деформаций оказалось возможным при помощи пьезопластинки, у которой толщина соизмерима с шириной, т. е. пластинкой типа стержня. В этом случае погранслой у длинных граней пластинки, которым раньше пренебрегали, становится соизмеримым с внутренним электроупругим состоянием, вносит свой вклад в наведенный электрический потенциал и тем самым, как далее показано, выделяет направление измерения.

Полное электроупругое состояние пьезостержня представим в виде суммы внутреннего электроупругого состояния, описанного выше, и погранслоя. Учитываем только погранслои, возникающие у длинных сторон стержня $x_1=\pm a$ и для определенности, считаем, что стержень наклеен вдоль оси x_2.

Перепишем формулу (1.1) на поверхности $x_3=h$:

$$D_3=D_3^{(0)}+D_3^{(1)},\qquad SD_3^{(0)}+2b\int_{-a}^{+a}D_3^{(1)}\,dx_2=i\frac{2YV}{\omega} \tag{1.5}$$

где верхние индексы 0 и 1 в скобках означают принадлежность величины внутреннему электроупругому состоянию или погранслою соответственно. Для определения $D_3^{(1)}$ надо решать, вообще говоря, соответствующую задачу плоского электроупругого погранслоя [3]. В конце данной статьи эта задача сформулирована.

Погранслой должен снимать невязки в граничных условиях на свободных краях $x_1=\pm a$, появившиеся после расчета внутреннего электроупругого состояния (напряжения внутреннего электроупругого состояния постоянные по всей пластинке). Так как на краю датчика $\sigma_1^{(0)}=\mathrm{const}$, то имеет место пропорциональность

$$\int_S D_3^{(1)}\,dS=pd_{31}\sigma_1^{(0)} \tag{1.6}$$

Коэффициент пропорциональности p определяется из решения задачи для погранслоя, но он может быть определен и экспериментально, как это сделано в данной работе.

Используя формулы (1.2)—(1.6) для внутреннего электроупругого состояния и погранслоя можно получить следующую формулу

$$c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2=B$$
$$c_1=\nu+1-p,\ c_2=1+\nu(1-p) \tag{1.7}$$
$$B=\frac{s_{11}{}^E(1-\nu^2)}{d_{31}}\left[\frac{\varepsilon_{33}{}^T}{h}\left(1+\frac{(p-2)k^2}{1-\nu}\right)+i\frac{Y}{\omega S}\right]$$

Для пьезостержня, ориентированного вдоль оси x_1, имеет место аналогичная формула

$$c_2\varepsilon_1+c_1\varepsilon_2=BV_1 \tag{1.8}$$

Разрешив эти формулы относительно ε_1, ε_2 получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_1&=B(c_1V_2-c_2V_1)/(c_1^2-c_2^2)\\ \varepsilon_2&=B(c_1V_1-c_2V_2)/(c_1^2-c_2^2)\end{aligned} \tag{1.9}$$

где V_1, V_2 — измеряемые потенциалы, с датчиков наклеенных вдоль осей x_1, x_2 соответственно.

Таким образом, формулы (1.9) связывают величины электрических потенциалов V_1, V_2 с двух пьезодатчиков с динамическими деформациями в упругом теле.

2. Сопоставление теоретических и экспериментальных результатов. Для завершения метода пересчета измеряемого потенциала в деформации необходимо знание констант, входящих в формулы (1.7), (1.8) — упругой податливости $s_{11}{}^E$, пьезоупругих модулей диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{33}{}^T$, пьезоэлектрической постоянной d_{31}, формирующих константу k, коэффициента Пуассона ν — это стандартные характеристики пьезокерамики, и наконец, новой характерной для предлагаемого датчика константа p. Константу p, как было отмечено выше, можно вычислить, решив соответствующую плоскую задачу электроупругости. Здесь будем определять ее экспериментально.

Экспериментальное определение характеристик пьезодатчиков и проверка точности измерения осуществлялись следующим образом. Датчики изготовлялись из пьезоматериала ЦТС-19. Исследовались датчики различной формы: квадратные ($b=a=10^{-2}$ м, $h=2\cdot10^{-4}$ м), прямоугольные ($a=1{,}6\cdot10^{-3}$ м, $b=10^{-2}$ м, $h=2\cdot10^{-4}$ м), датчики в виде стержня ($a=0{,}65\cdot10^{-3}$ м, $b=10^{-2}$ м, $h=2\cdot10^{-4}$ м). Электроупругие константы материала $s_{11}{}^E$, d_{31}, ν определялись методом резонанса — антирезонанса, описанным в [4]. Погрешность измерения при использовании стандартного оборудования не превышала 3%. Для указанных датчиков получены следующие постоянные $s_{11}{}^E=12\cdot10^{-12}$ м^2/Н, $d_{31}=125\cdot10^{-12}$ кл/Н, $\nu=0{,}3$, $\varepsilon_{33}{}^T/\varepsilon_0=1630$. Для прямоугольных датчиков из другой партии того же пьезоматериала размерами $b=0{,}65\cdot10^{-2}$ м, $a=0{,}9\cdot10^{-3}$ м, $h=0{,}75\cdot10^{-3}$ м, электроупругие физические постоянные равны: $s_{11}{}^E=14{,}03\cdot10^{-12}$ м^2/Н, $d_{31}=131\cdot10^{-12}$ кл/Н, $\varepsilon_{33}{}^T/\varepsilon_0=1400$, $\nu=0{,}3$.

Измерение динамических деформаций осуществлялось на круглой стальной пластинке толщиной $1{,}8\cdot10^{-3}$ м, радиусом $8\cdot10^{-2}$ м, соединенной по границе с массивным стальным кольцом. Такое соединение, как показало сравнение экспериментально и теоретически полученных значений резонансных частот, хорошо аппроксимирует жесткую заделку.

В основу эксперимента по определению прогиба была положена голографическая интерферометрия, позволяющая получить усредненные по времени голографические интерферограммы пластины, совершающей установившиеся гармонические колебания. При помощи таких интерферограмм можно определить форму колебаний, найти распределение амплитуды прогиба по поверхности пластины.

Для получения голограмм применялась оптическая схема, измененная применительно к условиям эксперимента. Голограммы регистрировались в свете гелий-неонового лазера ЛГ-38 с длиной когерентности, позволяющей записывать голограммы объектов размерами $0{,}2\times0{,}2\times0{,}2$ м, на высокоразрешающих фотопластинках типа ВРЛ. Для улучшения отражательной способности на фотографируемую поверхность пластины было нанесено белое диффузно-отражающее покрытие. Жесткость конструкции крепления пластины практически обеспечивала выполнение требований голографического метода. В качестве виброзащиты использовалась упругая подвеска с демпфированием в виде системы пневмокамер низкого давления.

Колебания пластины возбуждались с помощью безконтактного электромагнитного вибратора, управляемого звуковым генератором и усилителем мощности. Частота возбуждаемого сигнала измерялась цифровым частотометром с точностью ±1 Гц. Экспериментально измерялись деформации колеблющейся на резонансных частотах пластины с помощью выше описанных датчиков. Сигналы с датчиков подавались на однолучевые запоминающие осциллографы. Голографический метод в совокупности с расчетом применялся в качестве контроля измерений. По полученным интерферограммам определялся максимальный прогиб на резонансной частоте и приравнивался теоретическому значению прогиба. Это позволило определить неизвестный амплитудный коэффициент теоретически найденной резонансной формы. После этого по формулам $\varepsilon_r=hw_{rr}$, $\varepsilon_\varphi=h(r^{-1}w_r+r^{-2}w_{\varphi\varphi})$ вычислялись деформации в местах наклейки пьезодатчиков.

По экспериментальным значениям электрического потенциала и деформациям, полученным методом голографической интерферометрии на одной из резонансных форм в соответствии с формулами (1.4), (1.8), вычислялась постоянная p. На других частотах найденное значение p использовалось для расчета деформаций по измеренному электрическому потенциалу.

Экспериментальные исследования привели к следующим результатам. С помощью квадратного пьезодатчика вышеуказанных размеров можно, согласно теории, измерив электрический сигнал, вычислить сумму главных динамических деформаций по формуле (1.4). Измерения осуществлялись в центральной точке круглой пластинки на первой осесимметричной форме колебаний, частота которой составляла 598 Гц. Результаты приведены ниже

$V[mv]$	260	475	542
$\varepsilon_r{}^{(t)}\cdot10^{-6}$	0,53	0,98	1,144
$\varepsilon_r^{(e)}\cdot10^{-6}$	0,547	1,00	1,144

Проводимость цепи при этой частоте составила $Y=(1+i0{,}133)\cdot\cdot10^{-6}$ Ом$^{-1}$. В центральной точке в этом случае имеет место равенство $\varepsilon_r=\varepsilon_\varphi$. В первой строке приведены значения измеряемого потенциала, генерируемого датчиком на каждом из трех уровней резонансной раскачки пластины, во второй строке приведены полученные по формуле (1.4) значения деформаций ε_r, в третьей строке приведены эти же деформации, полученные экспериментально. Как видно из приведенных данных на наибольшей раскачке значения теоретических и экспериментальных измерений деформаций совпали, на более низких уровнях имеется различие порядка 2%. Таким образом сумма динамических деформаций тонким пьезодатчиком-пластинкой измеряется достаточно точно.

На этой же форме колебаний в точке с радиусом $r=0{,}045$ м измерялись деформации ε_r, ε_φ стержневым пьезодатчиком размером $0{,}013\times\times0{,}0018\times0{,}0015$ м. Для этого пьезодатчика была измерена постоянная p, которая получилась равной $-2{,}5$. Измерение ее осуществлялось следующим образом. На одной из указанных раскачек определялись описанным способом экспериментально прогиб w расчетным путем деформации ε_r, ε_φ измерялись также сигналы с пьезодатчиков V_1, V_2; затем эти значения подставлялись в формулу (1.7), что давало линейное уравнение для определения искомой величины p. На другой раскачке этой же резонансной формы при известной величине p осуществлялись измерения деформаций ε_r, ε_φ при помощи формулы (1.8) и значений измеренных потенциалов V_1, V_2. Например, значения измеряемых потенциалов были равны $140\cdot10^{-3}$ В, $1{,}6\cdot10^{-3}$ В. Экспериментальное значение деформации ε_φ при этом получилось равным $0{,}53\cdot10^{-6}$, теоретическое $0{,}49\cdot10^{-6}$. Значение деформации ε_r было близко к нулю, поэтому вычисление ε_r не выполнялось. Рассматривались и другие уровни раскачки резонансной формы. Этим способом контролировалась линейная зависимость экспериментально измеряемых деформаций от амплитуды колебаний пластинки. Этими же пьезодатчиками измерялись деформации на резонансной частоте 1340 Гц, форма колебаний которой имеет две полуволны по угловой координате. Путем подбора места воздействия электромагнитного вибратора форма колебаний располагалась так, чтобы на пьезодатчик, ответственный за измерение наибольшей деформации ε_φ, приходилось максимальное значение этой деформации в соответствии с расчетными данными. Точного совпадения достичь не удалось. Одна из причин состояла в том, что пучность формы не плавно перемещалась в соответствии с перемещениями вибратора, она перемещалась дискретно. Были и другие трудности, связанные с регистрацией форм методами голографии. Все это сказывалось на точности измерений. Значения потенциалов были $V_1=-460\cdot10^{-3}$ В, $V_2=-610\cdot10^{-3}$ В. Экспериментально определенные в соответствии с формулами (1.8) деформации были $\varepsilon_\varphi=3{,}17\cdot10^{-6}$, $\varepsilon_r=1{,}8\cdot10^{-6}$, теоретические значения $\varepsilon_\varphi=3{,}2\cdot10^{-6}$, $\varepsilon_r=1{,}2\cdot10^{-6}$. Линейная зависимость от амплитуды колебаний в этом случае контролировалась.

Была проведена такая же работа по определению постоянной p и деформаций ε_r, ε_φ на указанных резонансных частотах датчиками с размерами $2\cdot10^{-2}\times4\cdot10^{-4}\times1{,}3\cdot10^{-3}$ м, изготовленных из пьезоматериала с постоянным $\varepsilon_{33}^T/\varepsilon_0=1630$, $s_{11}^E=12\cdot10^{-12}$ м^2/Н, $d_{31}=125\cdot10^{-12}$ кл/Н, наклеенных в центральной точке пластины и на окружности $r=4\cdot10^{-2}$ м. На первой частоте указанным способом была определена константа $p=1{,}15$, для рассматриваемых пьезодатчиков.

Постоянные p, вычисленные для различных пьезодатчиков, оказались разных знаков. Этот факт объясняется тем, что при наклеивании не учитывалось направления предварительной поляризации: для одного датчика направление поляризации совпадает с направлением нормали к стальной пластине, для другого датчика направление поляризации противоположно направлению нормали.

Результаты экспериментально определенных деформаций на втором резонансе приведены ниже.

$V_1[mv]$	90	155	200
$V_2[mv]$	200,00	340,00	420,00
$\varepsilon_r\cdot10^{-6}$	1,25	1,87	2,50
	1,25	2,10	2,60
$\varepsilon_\varphi\cdot10^{-6}$	0,54	0,80	1,10
	0,40	0,68	0,90

В верхней строчке даны экспериментальные данные, в нижней — теоретические. Учитывая, что уровень измеряемых деформаций очень мал $O(10^{-6})$, можно отметить, что точность измерения неплохая.

Аналогичная работа была выполнена на других более высоких резонансных частотах; при этом расхождение между теоретическими и экспериментальными результатами увеличивалось отмеченными выше экспериментальными трудностями и быстрой изменяемостью напряженно-деформированного состояния по координатам. В целом изменение динамических деформаций при помощи пьезодатчиков представляется перспективным.

3. Область применимости пьезодатчика. Анализ уравнений электроупругости с учетом асимптотических представлений искомых величин исследуемого упругого тела, привел к следующей оценке погрешности формул (1.9) при вычислении деформации: $\varepsilon=O(\eta^{2+2\mu}+\eta^{1+2\mu+\varkappa}+\eta^{\sigma})$, где η — отношение толщины пьезопластинки к длине, $\eta^{2\mu}=4\rho_0\omega^2 b^2 s_{11}{}^E$, $\eta^{-\varkappa}=v_3/v_i$, $\eta^{\sigma}=a/b$, ρ_0 — плотность материала исследуемого тела, $2a$ и $2b$ — ширина и длина пьезопластины, ω — круговая частота колебаний, v_3 — прогиб тела, v_i — касательные перемещения тела в точке замеров.

Например, если перемещения v_3 и v_i одного порядка, то область применимости пьезодатчика по частоте $\omega^2 \ll b\cdot(h\rho_0 s_{11}{}^E 4l^2)^{-1}$. Считая, что исследуемое тело стальное, а пьезодатчик имеет размеры $2\cdot 10^{-2}\times 4\cdot 10^{-4}\times\times 1{,}3\cdot 10^{-3}$ м получим следующую оценку для допустимых значений круговой частоты колебаний: $\omega \ll 2\cdot 10^5$ Гц.

Постоянная p, вычисленная с помощью эксперимента, может быть определена из решения контактной задачи для плоского электроупругого погранслоя и исследуемого тела.

На свободных краях пьезодатчика имеют место следующие условия:

$$\sigma_1^{(1)}=-1/d_{31},\qquad \sigma_{13}^{(1)}=0,\qquad D_1^{(1)}=0\qquad (x_1=\pm a)$$

$$\sigma_{13}^{(1)}=\sigma_3^{(1)}=0,\qquad \psi^{(1)}=0\qquad (z=\pm h)$$

На поверхности $z=-h$ должны выполняться условия контакта пьезодатчика с упругим телом

$$\sigma_{13}^{(1)}=\tau_{13},\qquad \sigma_3^{(1)}=\tau_3,\qquad v_1^{(1)}=v_1,\qquad v_3^{(1)}=v_3,\qquad \psi^{(1)}=0 \tag{3.1}$$

где τ_{13}, τ_3 — напряжения упругого тела. Уравнения упругого тела не будем выписывать, отметим только, что для упругого тела в рамках принятой погрешности точную задачу можно заменить приближенной для полупространства $z<-h$ с условиями (3.1). Выпишем уравнения для плоского электроупругого погранслоя

$$\partial\sigma_1^{(1)}/\partial x_1+\partial\sigma_{13}^{(1)}/\partial x_3=0,\qquad \partial\sigma_{31}^{(1)}/\partial x_1+\partial\sigma_3^{(1)}/\partial x_3=0$$

$$\partial v_1^{(1)}/\partial x_1=s_{11}{}^E\sigma_1^{(1)}+s_{12}{}^E\sigma_2^{(1)}+s_{13}{}^E\sigma_3^{(1)}+d_{31}E_3^{(1)}$$

$$s_{12}{}^E\sigma_1^{(1)}+s_{11}{}^E\sigma_2^{(1)}+s_{13}{}^E\sigma_3^{(1)}-d_{31}E_3^{(1)}=0$$

$$\partial v_3^{(1)}/\partial z=s_{13}{}^E\sigma_1^{(1)}+s_{13}{}^E\sigma_2^{(1)}+s_{33}{}^E\sigma_3^{(1)}+d_{33}E_3^{(1)}$$

$$D_1^{(1)}=\varepsilon_{11}{}^T E_1^{(1)}+d_{15}\sigma_{13}^{(1)}$$

$$D_3^{(1)}=\varepsilon_{33}{}^T E_3^{(1)}+d_{31}(\sigma_1^{(1)}+\sigma_2^{(1)})+d_{33}\sigma_3^{(1)}$$

где $v_1{}^{(1)}$, $v_3{}^{(1)}$ — перемещения по осям x_1, x_3, $\sigma_{13}^{(1)}$ — напряжение сдвига, $s_{11}{}^E$, $s_{12}{}^E$, $s_{13}{}^E$ — упругие податливости, d_{15}, d_{31} — пьезоэлектрические постоянные.

Сформулированная задача может быть решена либо аналитическим методом, например, при помощи интегрального преобразования Лапласа, либо численно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pawell R. L., Stetson K. A.* Interferometric vibration analysis by wavefront reconstruction. // J. Opt. Soc. Amer. 1965. V. 55. № 12. P. 1593–1598.
2. *Улитко А. Ф.* К теории колебаний пьезокерамических тел // Тепловые напряжения в элементах конструкций. Киев: Наук. думка, 1975. Вып. 15. С. 90–99.
3. *Рогачева Н. Н.* Граничные условия в теории пьезокерамических оболочек // Изв. АН АрмССР. Механика. 1983. Т. 36. № 6. С. 50–60.
4. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика./Под ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1966. Т. 1. Ч. А. С. 204–326.
5. *Leith E. N., Upatnieks J.* Reconstructed wavefronts and communication theory. // Journal of Optical Society of America. 1962. V. 52. P. 1123–1130.
6. *Малов В. В.* Пьезорезонансные датчики. М.: Энергия, 1978. 248 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.VI.1987