МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1989

УДК 624.04

Ю. М. ПОЧТМАН, М. М. ФРИДМАН

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ К ДВУХКРИТЕРИАЛЬНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ РЕБРИСТЫХ ОБОЛОЧЕК

Рассматриваются вопросы оптимизации замкнутых цилиндрических оболочек, подкрепленных системой перекрестных ребер и шарнирно опертых по торцам, при действии стохастической нагрузки типа внешнего равномерного давления $q(t)$, представляющего собой белый шум. Учитывается дискретный характер подкреплений, в соответствии с моделью оболочки [1]. Воздействию такой нагрузки часто подвергаются обшивки летательных аппаратов, находящихся в поле акустического давления [2].

1. При решении задачи оптимального проектирования в качестве критериев оптимизации оболочки будем принимать ее долговечность T и вес V. Под долговечностью T принимается время, в течение которого система находится в прощелкнутом состоянии, т. е. не выходит за допустимую область, охватывающую ее устойчивое положение равновесия. При проектировании естественно следует отыскивать решение, которое максимально позволяет приблизиться к субоптимальным значениям выбранных критериев. Для решения поставленной двухкритериальной задачи применим аппарат теории нечетких множеств [3—5], который позволяет эффективно определять степень принадлежности множества состояний конструкции K допустимым множествам (в данном случае — долговечности T и объему V). Для количественного определения степени принадлежности используем характеристические функции [3], значения которых изменяются в интервале [0, 1]:

$$\mu(K, T)=0\ (T\leqslant T_{\text{opt}});\ \mu(K, T)=1\ (T\geqslant T_{\text{opt}})$$

$$\mu(K, T)={}^1/_2+{}^1/_2\sin[\pi/(T_{\text{opt}}-T_{\min}][T-{}^1/_2(T_{\text{opt}}+T_{\min})]\ (T_{\min}<T<T_{\text{opt}}) \tag{1.1}$$

где $T_{\min}$ — минимальное допустимое и T_{opt} — субоптимальное значение долговечности оболочки, принимаемые проектировщиком, T — текущее значение долговечности.

Аналогично характеристическую функцию, выражающую отношение множеств K и V, будем определять:

$$\mu(K, V)=1\ (V\leqslant V_{\text{opt}}),\ \mu(K, V)=0\ (V\geqslant V_{\text{opt}})$$

$$\mu(K, V)={}^1/_2-{}^1/_2\sin[\pi/(V_{\max}-V_{\text{opt}}][V-{}^1/_2(V_{\text{opt}}+V_{\max})]\ (V_{\max}<V<V_{\text{opt}}) \tag{1.2}$$

где V_{opt}, $V_{\max}$ — субоптимальное и предельное значения объема, также задаваемые проектировщиком, а V — текущее значение объема оболочки в процессе поиска.

Цель задачи оптимизации теперь состоит в том, чтобы найти $\max_K[\min(\mu(K, T), \mu(K, V))]$, т. е. такое значение вектора параметров конструкции X_{opt} (из множества K), при котором минимальное значение функций принадлежности (1.1) и (1.2) будет максимальным [4].

2. Определим текущие значения долговечности T и объема V оболочки, входящие в (1.1) и (1.2).

Дифференциальное уравнение движения ребристой оболочки имеет вид [1.1]:

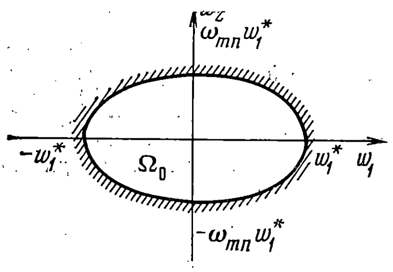
$$w^{\cdot\cdot}+\omega_{mn}^2[1-q(t)/q_*]w=0 \tag{2.1}$$

где $q=q_{mn}E/(1-\nu^2)$ — параметр критического значения статистического внешнего давления, E — модуль упругости оболочки, ω_{mn} — собственная частота колебаний ненагруженной системы, m, n — значения параметров волнообразования в продольном и окружном направлениях соответственно, ν — коэффициент Пуассона материала оболочки.

Несмотря на то, что уравнение (2.1) линейно относительно функции перемещений $w(t)$, сама система нелинейна по отношению к воздействию $q(t)$. Учитывая, что это воздействие представляет собой белый шум, для определения долговечности целесообразно использовать теорию марковских процессов [6].

Внешнее воздействие $q(t)$ можно представить в виде (s — интенсивность белого шума): $\langle q(t)\rangle=0$, $\langle q(t_1)\,q(t_2)\rangle=s\delta(t_2-t_1)$.

Пространством качества здесь служит фазовая плоскость (фигура) $w_1=w$, $w_2=\dot{w}$. При $q(t)=0$, уравнение траекторий на фазовой плоскости имеет вид: $w_2^2/2+\omega_{mn}^2 w_1^2/2=C$, из которого видно, что система имеет единственное устойчивое нулевое положение равновесия. При $t=0$, $w_1=w_1^*$, $w_2=0$, тогда $C=\omega_{mn}^2(w_1^*)^2/2$. При заданном значении w_1^* имеем траекторию эллипса, за которую не может выходить система за время T: $w_2^2/(\omega_{mn}w_1^*)^2+w_1^2/(w_1^*)^2=1$, где w_1^* — предельное значение начального прогиба, при котором еще происходит прощелкивание оболочки.



Нетрудно вычислить теперь интенсивности двухмерного марковского процесса: $\chi_1=w_2$, $\chi_2=-\omega_{mn}^2 w_1$, $\chi_{11}=\chi_{12}=\chi_{21}=0$, $\chi_{22}=w_1^2\omega_{mn}^4 s/q_*^2$. Уравнение Понтрягина применительно к данным значениям интенсивностей принимает следующий вид:

$$w_2\partial T_1/\partial w_1-\omega_{mn}^2 w_1\partial T_1/\partial w_2+w_1^2\omega_{mn}^4 s/q_*^{-2}\partial^2 T_1/\partial w_2^2=-1 \qquad (2.2)$$

где T_1 — условная долговечность, связанная с долговечностью зависимостью

$$T=\int\limits_{\Omega_0} T_1(v_0)\,p(v_0)\,dv_0 \qquad (v_0\in\Omega_0)$$

а Ω_0 — допустимая область в пространстве качества (фигура).

Дальнейшее исследование ведется в соответствии с алгоритмом [7]. Введем новые переменные: $\xi_1=w_1/w_1^*$, $\tau=\omega_{mn}t$, $\xi_2=w_2/\omega_{mn}w_1^*$, $\Theta=\omega_{mn}T_1$; уравнение (2.2) принимает вид

$$(2\mu)^{-1}\xi_1^2\partial^2\Theta/\partial\xi_2^2+\xi_2\partial\Theta/\partial\xi_1-\xi_1\partial\Theta/\partial\xi_2=-1$$

$$\mu=q_*^2/s\omega_{mn}$$

После этих преобразований, эллипс превращается в окружность единичного радиуса и удобнее перейти к полярным координатам $\xi_1=r\cos\psi$, $\xi_2=r\sin\psi$. Получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned}&(2\mu)^{-1}(^1/_4 r^2\sin^2 2\psi\partial^2\Theta/\partial r^2+\cos^4\psi\partial^2\Theta/\partial\psi^2+\\&+r\cos^2\psi\sin 2\psi\partial^2\Theta/\partial r\partial\psi)-((2\mu)^{-1}\cos^2\psi\times\\&\times\sin 2\psi+1)\partial\Theta/\partial\psi+(2\mu)^{-1}\cos^4\psi\partial\Theta/\partial r=-1\end{aligned} \qquad (2.3)$$

Решение уравнения (2.3) должно удовлетворять граничному условию $\Theta(1,\psi)=0$, а также условиям непрерывности и двукратной дифференцируемости внутри области. Этим условиям удовлетворяет разложение

$$\Theta(r,\psi)=\sum_j\sum_k\Theta_{jk}\varphi_{jk}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{jk}=&{}^1/_2(1-r^2)r^{2(j-1)}\{[1+(-1)^k]r^k\sin(k\psi/2)+\\&+[1+(-1)^{k-1}]r^{k-1}\cos[(k-1)\psi/2]\end{aligned} \qquad (2.4)$$

Ограничиваясь первыми четырьмя членами ряда (2.4), получим

$$\Theta=\Theta_{11}(1-r^2)+\Theta_{12}(1-r^2)r^2\sin\psi+\Theta_{21}(1-r^2)r^2+\Theta_{22}(1-r^2)r^4\sin\psi \quad (2.5)$$

Коэффициенты разложения (2.5) могут быть определены методом Галеркина [7]. В результате вычислений получены следующие значения коэффициентов: $\Theta_{11}=3{,}5\mu$, $\Theta_{12}=\Theta_{22}=0$, $\Theta_{21}=1{,}75\mu$. Подставив эти значения в (2.5), получим $\Theta=3{,}5\mu(1-r^2)+1{,}75\mu(1-r^2)r^2$. При переходе к первоначальным обозначениям это уравнение принимает вид

$$T_1(w_0, w_0^{\cdot})=1{,}75q_*^2/s\omega_{mn}^2\,[2-w_0^2/(w_1^*)^2-$$
$$-w_0^{\cdot 2}/\omega_{mn}^2(w_1^*)^2-2w_0^2w_0^{\cdot 2}/\omega_{mn}^2(w_1^*)^4-w_0^{\cdot 4}/\omega_{mn}^4(w_1^*)^4]$$

Совместная плотность вероятности $p(v_0)$ для стохастически несвязных и нормально распределенных случайных величин w_0 и $w_0^{\cdot}$ имеет вид:

$$p(v_0)=p(w_0)=p(w_0^{\cdot})=(2\pi)^{-1/2}/\sigma_{w_0}\exp[-(w_0-$$
$$-\langle w_0\rangle)^2/2\sigma_{w_0}^2]\,(2\pi)^{-1/2}/\sigma_{w_0^{\cdot}}\exp[-w_0^2/2\sigma^2_{w_0^{\cdot}}]$$

где $\langle w_0\rangle$ — математическое ожидание величины начального прогиба, $\sigma_{w_0}^2$, $\sigma_{w_0^{\cdot}}^2$ — дисперсии прогиба и его производной, соответственно; $\langle w_0^{\cdot}\rangle=0$. Окончательно, для математического ожидания полной долговечности получим

$$T=1{,}75q_*^2/s\omega_{mn}^2\Big[2-(2\pi)^{-1/2}/(w_1^*)^2\sigma_{w_0}\int_{-\infty}^{\infty}w_0^2\exp[-(w_0-\langle w_0\rangle)^2/2\sigma_{w_0}^2]dw_0-$$
$$-(2\pi)^{-1/2}/\omega_{mn}^2(w_1^*)^2\sigma_{w_0^{\cdot}}\int_{-\infty}^{\infty}w_0^2\exp(-w_0^2/2\sigma_{w_0^{\cdot}}^2)\,dw_0^{\cdot}-(2\pi)^{-1/2}/(w_1^*)^4\sigma_{w_0}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}w_0^4\exp[-(w_0-\langle w_0\rangle)^2/2\sigma_{w_0}^2]\,dw_0-$$
$$-1/\pi\omega_{mn}^2(w_1^*)^4\sigma_{w_0}\sigma_{w_0^{\cdot}}\int_{-\infty}^{\infty}w_0^2\exp[-(w_0-\langle w_0\rangle)^2/2\sigma_{w_0}^2]\,dw_0\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}w_0^{\cdot 2}\exp(-w_0^{\cdot 2}/2\sigma_{w_0^{\cdot}}^2)\,dw_0^{\cdot}-1/(w_1^*)^4\sqrt{2\pi}\sigma_{w_0^{\cdot}}\omega_{mn}^4\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}w_0^{\cdot 4}\exp(-w_0^2/2\sigma_{w_0^{\cdot}}^2)\,dw_0^{\cdot}\Big] \quad (2.6)$$

Значения величин ω_{mn}, q_{mn}, входящих в уравнение (2.6) и выраженных через характеристики геометрических параметров оболочки и ребер, приведены в [1].

3. При оптимальном проектировании оболочек, если шпангоуты и стрингеры, подкрепляющие оболочку, принять из уголкового сечения (с размерами $h_1\times h_1\times b_1$ и $h_2\times h_2\times b_2$ соответственно), то вектор варьируемых параметров и объем оболочки примут вид: $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}^T=\{h_1, b_1, h_2, b_2, k_1, k_2, h\}^T$, $V=2\pi rL_1h+4h_1b_1\cdot\pi rk_2+2h_2b_2L_1k_1$.

После вычисления текущих значений T и V можно перейти непосредственно к оптимизации оболочки с помощью, например, метода случайного поиска [8]. Так как долговечность оболочки, определяемая по формуле (2.6), зависит от значений параметров волнообразования m и n, то на каждом шаге поиска методом перебора по сетке $m\times n$ дополнительно необходимо определять минимальное значение T.

В качестве численной иллюстрации рассмотрим оболочку с такими исходными данными: $r=160$ мм; $L_1=800$ мм; $E=E_1=E_2=6{,}67\times10^9$ Н/м²; $\rho_0=\rho_1=\rho_2=0{,}26\times10^4$ Н·с²/м⁴; $\nu=0{,}3$; $\langle w_0\rangle=h$; $\sigma_{w_0}-0{,}01h$; $\sigma_{w_0^{\cdot}}=0{,}01$ мм/с; $w_1^*=5h$; $V_{\text{opt}}=5\times10^5$ мм³; $V_{\max}=2\times10^6$ мм³; $T_{\min}=876$ час; $T_{\text{opt}}=8760$ час. Рассматривались 3 варианта нагрузки; $s_1=100$ Н²·с/м⁴; $s_2=200$ Н²·с/м⁴; $s_3=300$ Н²·с/м⁴. Принимались следующие конструктивные ограничения: $O_1=15$ $b_1-h_1\geqslant0$; $O_2=15$ $b_2-h_2\geqslant0$; $O_3=h-0{,}7\times b_1\geqslant0$; $O_4=h-0{,}7\times b_2\geqslant0$;

Результаты оптимальных расчетов приведены в таблице (размеры даны в мм, а объем в мм³). Как видно, с увеличением интенсивности белого шума s значение

s	h_1	b_1	h_2	b_2	k_1	k_2	h	T	$\mu(K, T)$	V	$\mu(K, V)$
100	11,59	0,773	4,013	0,522	2	23	0,541	11 910	1	$5{,}48\times10^5$	0,997
200	12,93	0,862	4,0	0,332	2	27	0,604	8298	0,991	$5{,}88\times10^5$	0,991
300	13,89	0,926	4,0	0,575	2	32	0,648	7759	0,960	$6{,}91\times10^5$	0,960

долговечности уменьшается, а объем оболочки наоборот возрастает, что приводит к плавному снижению степени принадлежности по каждому критерию.

Что касается изменения параметров оптимального вектора конструкции, то наиболее стабильными являются высота стрингеров h_2 и оптимальное количество шпангоутов k_1; в то время, как остальные оптимальные параметры (за исключением b_c) увеличиваются с возрастанием уровня белого шума в среднем от 7 до 16%. Отметим также, что в двух последних вариантах значения функций принадлежности $\mu(K, T)$, $\mu(K, V)$ практически совпадают. Это говорит о том, что применение теории нечетких множеств позволяет успешно решать основную задачу многокритериальной оптимизации [9] — как можно ближе подойти к множеству Парето, причем одинаково близко по каждому критерию.

В заключение заметим, что выбор характеристических функций зависит о значимости критериев оптимизации для каждой конкретной задачи. При равнозначных критериях (как это имело место в данной задаче) функции принадлежности выбираются аналогичными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Методы расчета оболочек. Т. 2./Амиро И. Я., Заруцкий В. А. Киев: Наук. думка, 1980. 367 с.
2. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
3. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь. 1982. 432 с.
4. *Малов В. Ю., Почтман Ю. М.* Многофакторные задачи оптимального проектирования и теория нечетких множеств // Проблемы прочности. 1985. № 11. С. 91—96.
5. *Малов В. Ю., Почтман Ю. М.* Об одном подходе к формированию моделей задач оптимального проектирования конструкций в условиях неопределенности // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1986. С. 117—124.
6. *Казаков В. А.* Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. М.: Сов. радио. 1973. 231 с.
7. *Болотин В. В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат. 1982. 351 с.
8. *Гурвич И. Б., Захарченко В. Г., Почтман Ю. М.* Рандомизированный алгоритм для решения задач нелинейного программирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1975. № 5. С. 15—17.
9. *Герасимов Е. Н., Почтман Ю. М., Скалозуб В. В.* Многокритериальная оптимизация конструкций. Киев; Донецк: Вища шк., 1985. 134 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию 21.IV.1987