МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1989

УДК 539.3

С. А. НАЗАРОВ

ВЫВОД ВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ФОРМЫ МАЛОГО ПРИРАЩЕНИЯ ТРЕЩИНЫ ОТРЫВА

Вычисляется приращение коэффициента интенсивности напряжений при малой вариации поверхности трещины нормального отрыва. Ребро Γ трещины предполагается гладким. В асимптотическую формулу входит некоторый сингулярный интегральный оператор. Выводится содержащее упомянутый оператор вариационное неравенство, решение которого описывает возмущение контура Γ в том случае, если коэффициент интенсивности на некоторой части ребра превосходит критическое значение и трещина подрастает квазистатически. Отсутствие решения неравенства интерпретируется как локально неустойчивый рост трещины. Для трещины в виде полуплоскости все данные, входящие в вариационное неравенство, вычислены явно.

1. Постановка задачи. Пусть G — область на плоскости $\mathbf{R}^2$, ограниченная простым замкнутым гладким контуром ∂G. Положим $M=\{x\in\mathbf{R}^3: x_3=0,\ y=(x_1,\ x_2)\in G\}$, $\Gamma=\{x: x_3=0,\ y\in\partial G\}$, $\Omega=\mathbf{R}^3\setminus M$. Рассмотрим задачу о деформации упругого тела с трещиной M под действием гладкой нормальной симметричной нагрузки P, приложенной к берегам $M^\pm$ трещины. Известно [1], что задача сводится к отысканию гармонической в полупространстве $\mathbf{R}_+{}^3$ функции v, удовлетворяющей краевым условиям

$$(\partial v/\partial x_3)(y,\ 0)=p(y)\quad (y\in G),\quad v(y,\ 0)=0\quad (y\in\mathbf{R}^2\setminus G) \tag{1.1}$$

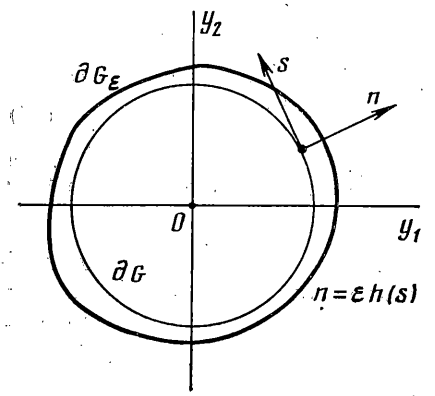
Здесь $p=-\mu^{-1}(1-\nu)P$, μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона. Обозначим через s координату на ребре Γ (длину дуги), а через $(r,\ \varphi)$ — полярные координаты в плоскостях, нормальных к Γ, такие, что берега $M^\pm$ локально задаются уравнениями $\varphi=\pm\pi$. Для функции v справедливо представление

$$v(x)=\mu^{-1}(1-\nu)\,(2r\pi^{-1})^{1/2}K(s)\sin{}^1/_2\varphi+O(r)\quad (r\to 0) \tag{1.2}$$

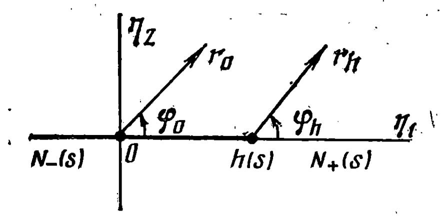
в котором $K(s)$ — коэффициент интенсивности напряжений. Известно [2, 3], что K — гладкая функция переменной $s\in\Gamma$.

Опишем возмущение G_ε области G. Пусть n — внешняя нормаль к ∂G, h — гладкая функция на Γ, а ε — малый положительный безразмерный параметр. (Считаем, что характерный размер области G и максимальное значение функции $|h|$ — величины одного порядка.) В окрестности U контура ∂G пара (n, s) определяет локальные координаты. Введем «мало отличающуюся» от G область $G_\varepsilon=(G\setminus U)\cup\{y\in U: n\leqslant\varepsilon h(s)\}$ (фиг. 1) и придадим обозначениям M_ε, Γ_ε, Ω_ε, v_ε, $K_\varepsilon(s)$ тот же смысл, что ранее объектам, отвечающим исходной области.

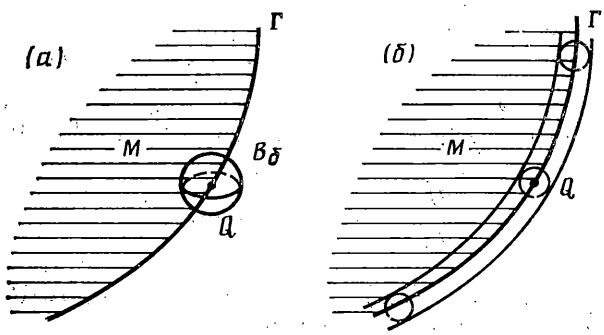
Исследуем асимптотику $K_\varepsilon(s)$ при $\varepsilon\to 0$. Задача для v_ε представляет собой регулярное возмущение задачи для v. Это получается, если заметить, что при помощи близкого к тождественному отображению область Ω_ε переводится в Ω, и воспользоваться приемом, указанным на с. 529 [4]. Однако применение методов классической теории возмущений непосредственно к цели не приводит; более удобно рассматривать область Ω_ε как сингулярно возмущенную и использовать методику [5—8]. В п. 2 статьи содержатся необходимые представления решения вблизи ребра; собственно асимптотические формулы для $K_\varepsilon(s)$ получены в п. 3. В пп. 3, 4 приведены некоторые их следствия и получено вариационное неравенство,



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

описывающее форму приращения поверхности трещины при квазистатическом росте. Отметим, что в [9] получена асимптотика $K_\varepsilon(s)$ при помощи другого метода, основанного на сведении исходной задачи к интегро-дифференциальному уравнению на G и исследовании вариации его решения при переходе к возмущенной области G_ε.

2. Асимптотические разложения вблизи ребра трещины. Функция v допускает представление

$$v(x)=\mu^{-1}(1-\nu)\,(2r\pi^{-1})^{1/2}\{K(s)\,(1+{}^1/_4\, r\varkappa(s))\,\sin{}^1/_2\varphi+$$
$$+{}^1/_3\, rk(s)\sin{}^3/_2\varphi\}+p(s)r\sin\varphi+O(r^2)\quad(r\to 0) \tag{2.1}$$

Здесь $\varkappa(s)$ — кривизна контура ∂G, $k(s)$ — множитель при младшем нерегулярном члене асимптотики напряжений, $p(s)$ — значение правой части в точке на ребре Г трещины M.

Приведены выкладки, необходимые согласно общим результатам [10, 2] для вывода разложения (2.1). В координатах (n, s, x_3) оператор Лапласа имеет вид

$$(1+n\varkappa(s))^{-1}\{\partial/\partial n(1+n\varkappa(s))\partial/\partial n+\partial/\partial s(1+n\varkappa(s))^{-1}\partial/\partial s\}+\partial^2/\partial x_3^2 \tag{2.2}$$

Запишем дифференциальное выражение (2.2) в координатах (r, φ, s) и расщепим полученный оператор L в формальный ряд по степеням r

$$L\left(r,\varphi,r\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial s}\right)\sim\sum_{k=0}^{\infty} r^{k-2}L_k\left(\varphi,r\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial s}\right) \tag{2.3}$$

$$L_0\left(r\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)=\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},\quad L_1\left(\varphi,r\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)=\varkappa(s)\left(\cos\varphi r\frac{\partial}{\partial r}-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

Подставляя формулу $v(x)\sim T(s)r^{1/2}\sin{}^1/_2\varphi+r^{3/2}f(\varphi,s)$ в уравнение Лапласа и в однородные краевые условия (1.1), с учетом (2.3) приходим к следующей задаче для определения неизвестной функции f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}(\varphi,s)+\frac{9}{4}f(\varphi,s)=\frac{1}{2}\varkappa(s)T(s)\sin\frac{\varphi}{2}\quad(\varphi\in(0,\pi)),\quad \frac{\partial f}{\partial\varphi}(\pi,s)=0,\quad f(0,s)=0 \tag{2.4}$$

Решением обыкновенного дифференциального уравнения (2.4) служит сумма $^1/_4\varkappa(s)T(s)\sin{}^1/_2\varphi+t(s)\sin{}^3/_2\varphi$ с произвольным множителем $t(s)$, что и отражено в (2.1).

Далее понадобится специальное неэнергетическое решение смешанной однородной задачи в $\mathbf{R}_+^3$, то есть гармоническая в $\mathbf{R}_+^3$ функция $x\to\to V(H;\ x)$, удовлетворяющая однородным ($p=0$) краевым условиям (1.1) и имеющая асимптотику

$$V(H;\ x)=(2\pi r)^{-1/2}H(s)\sin{}^1/_2\varphi+O(r^{1/2})\quad(r\to0) \tag{2.5}$$

Здесь весовой множитель H — произвольная гладкая функция на Г. Уточним формулу (2.5). Поступая, как и ранее, получаем для функции f, входящий в представление $V(H;\ x)\sim T(s)r^{-1/2}\sin{}^1/_2\varphi+r^{1/2}f(\varphi,s)$, задачу

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}(\varphi,s)+\frac{1}{4}f(\varphi,s)=\frac{1}{2}\varkappa(s)T(s)\sin\frac{3}{2}\varphi\quad(\varphi\in(0,\pi)),$$
$$\frac{\partial f}{\partial\varphi}(\pi,s)=0,\qquad f(0,s)=0 \tag{2.6}$$

Решением уравнений (2.6) является сумма $-^1/_4\varkappa(s)T(s)\sin{}^3/_2\varphi+$ $+t(s)\sin{}^1/_2\varphi$, и значит, верно разложение

$$V(H;\ x)=(2\pi r)^{-1/2}H(s)(\sin{}^1/_2\varphi-{}^1/_4\varkappa(s)r\sin{}^3/_2\varphi+$$
$$+\mu^{-1}(1-\nu)(2r\pi^{-1})^{1/2}C_\Omega(H;\ s)\sin{}^1/_2\varphi+O(r^{3/2}|\ln r|),\ r\to0 \tag{2.7}$$

Здесь $H\to C_\Omega(H)$ — некоторый зависящий от области Ω линейный оператор. Для того чтобы изучить его свойства, воспользуемся результатами [2, 1]. Отметим сначала, что справедлива формула

$$\int_{\partial G}K(s)H(s)ds=-2\mu(1-\nu)^{-1}\int_G p(y)V(H;y,0)dy=2\int_G P(y)V(H;y,0)dy. \tag{2.8}$$

Она получается так же, как и интегральные представления K в плоской задаче (см. [11] и [12], с. 318). Таким образом, при помощи решений (2.5) с различными плотностями H можно определить взвешенные средние $K(s)$ по контуру ∂G. Для того, чтобы вычислить $K(\tau)$ в точке $Q\in\Gamma$ с координатой $s=\tau$, необходимо согласно [2] найти специальное решение с особенностью порядка $|x-Q|^{-3/2}$. Фиксируем точку Q и обозначим через (ρ,θ,φ) сферические координаты, отвечающие $\eta=(n,x_3,s)$; $s=\rho\cos\theta$, $(n,x_3)=\rho\sin\theta(\cos\varphi,\sin\varphi)$. Функция $\rho^{-3/2}(\sin\theta)^{1/2}\sin{}^1/_2\varphi$ является гармонической в $\mathbf{R}^3\backslash\Pi$ и удовлетворяет однородным условиям Неймана на полуплоскости $\Pi=\{\eta:\eta_2=0,\ \eta_1<0\}$ (всюду, кроме начала координат $\eta=0$). Поэтому согласно [2] существует гармоническая в $\mathbf{R}_+^3$ функция $x\to\zeta(\tau;\ x)$, удовлетворяющая однородным краевым условиям (1.1) и имеющая особенность в точке Q:

$$\zeta(\tau;\ x)=2(2\pi\rho)^{-3/2}(\sin\theta)^{1/2}\sin{}^1/_2\varphi+O(\rho^{-1/2})\quad(\rho\to0) \tag{2.9}$$

Согласно [2] именно такая функция входит в интегральное представление величины $K(\tau)$:

$$K(\tau)=2\int_G\zeta(\tau;y,0)P(y)dy \tag{2.10}$$

Поясним вывод соотношения (2.10). Пусть $B_{\delta,\tau}$ — шар с радиусом δ и с центром Q. Применим формулу Грина в области $\Omega\setminus B_{\delta,\tau}$ (фиг. 2, а). Имеем

$$\frac{1-\nu}{\mu}\int\limits_{M\setminus B_{\delta,\tau}} P(y)\zeta(\tau;y,0)\,dy=\int\limits_{\partial B_{\delta,\tau}\cap\Omega}\zeta(\tau;x)\frac{\partial v}{\partial\rho}(x)-v(x)\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}(\tau;x)\,d\Sigma \quad (2.11)$$

Подставляя в правую часть (2.11) асимптотики (2.1) и (2.9), вычисляя интегралы на сфере и переходя к пределу при $\delta\to0$, получаем равенство (2.10). Подчеркнем, что различие формул (2.8) и (2.10) вызвано разными («реберной» и «конической») особенностями функций (2.7) и (2.9) соответственно, и разными способами перехода к пределу при $\delta\to0$ (в первом случае из Ω вырезалась трубчатая окрестность контура Γ; фиг. 2, а, б).

Установим формулу

$$V(H;x)=\int_\Gamma H(\tau)\zeta(\tau;x)\,d\tau \quad (2.12)$$

Обозначим через λ срезающую функцию из $C_0^\infty(\mathbf{R})$ с малым носителем, равную единице в окрестности нуля. Имеем

$$\int_\Gamma H(\tau)\zeta(\tau;x)\,d\tau=\int_\Gamma (H(\tau)-H(s))\zeta(\tau;x)\,d\tau+$$
$$+H(s)(2\pi^3)^{-1/2}r^{1/2}\sin^{1/2}\varphi\int_\Gamma\lambda(\tau-s)(r^2+(s-\tau)^2)^{-1}\,d\tau+$$
$$+H(s)\int_\Gamma(\zeta(\tau;x)-(2\pi^3)^{-1/2}r^{1/2}\sin^{1/2}\varphi\lambda(s-\tau)(r^2+(s-\tau)^2)^{-1})\,d\tau \quad (2.13)$$

Интегралы из правой части (2.13) обозначим I_1, I_2 и I_3. Ясно, что $I_2=H(s)(2\pi r)^{-1/2}\sin{}^1/_2\varphi+O(1)$ при $r\to0$. Кроме того, из представления (2.9) следует, что интеграл I_3, а для гладкой функции и интеграл I_1, есть $O(|\ln r|)$. Поэтому асимптотики выражений слева и справа в (2.12) совпадают с точностью $O(|\ln r|)$. Теперь, принимая во внимание единственность решения с фиксированной особенностью [2, 3, 10], заканчиваем проверку (2.12).

Полагая в (2.7) $\varphi={}^2/_3\pi$, приходим к соотношению

$$C_\Omega(H;s)=\mu[(1-\nu)\sin{}^1/_3\pi]^{-1}\lim_{r\to0}\{(2r\pi^{-1})^{-1/2}(V(H;x)-$$
$$-(2\pi r)^{-1/2}H(s)\sin{}^1/_2\varphi)\}|_{\varphi=2/3\pi} \quad (2.14)$$

Обратимся еще раз к формуле (2.13). Для того чтобы в (2.14) воспользоваться этим представлением, необходимо уточнить разложение (2.9) и найти асимптотику функции ζ с точностью $O(r^{1/2}\rho^{-1/2})$ (величины r и ρ эквивалентны расстоянием до контура Γ и до точки Q соответственно).

Вблизи точки Q оператор (2.2) в координатах η допускает расщепление в следующий формальный ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty}N_k\left(\eta,\frac{\partial}{\partial\eta}\right),\qquad N_k\left(t\eta,\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)=t^{k-2}N_k\left(\eta,\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\qquad(t>0)$$
$$N_0(\partial/\partial\eta)=\Delta_\eta,\ N_1(\eta_1,\partial/\partial\eta)=\varkappa(s)\{\partial/\partial\eta_1-2\eta_1\partial^2/\partial\eta_2^2\} \quad (2.15)$$

Применяя известную процедуру построения асимптотики решения в конической точке [13], находим, что $\zeta(\tau;x)=\rho^{-3/2}\Phi(\theta,\varphi)+\rho^{-1/2}\Phi^1(\theta,\varphi)+O(\rho^{1/2}|\ln\rho|)$. Функция Φ^1 определяется из уравнения $N_0(\rho^{-1/2}\Phi^1)=N_1(\rho^{-3/2}\Phi)$ в пространстве $\mathbf{R}^3$ с вырезанной полуплоскостью $\Pi=\{\eta\colon\eta_2=0,\ \eta_1\leqslant0\}$; на Π поставлены однородные условия Неймана. Эта задача сводится к задаче Неймана для положительно определенного оператора $-\Delta+{}^1/_4$ в области $\omega=S^2\setminus\Pi$ на единичной сфере S^2 (Δ — оператор Лапласа — Бельтрами). Используя (2.15), непосредственными вычислениями устанавливаем, что правая часть упомянутого уравнения в ω равна

$$F(\theta,\varphi)=\varkappa(\tau)(\sin\theta)^{-1/2}\{\sin{}^3/_2\varphi\sin^2\theta(7-8\sin^2\theta)+$$
$$+\sin{}^1/_2\varphi({}^1/_2-7\sin^2\theta+8\sin^4\theta)\} \quad (2.16)$$

Указанную задачу можно не решать, так как далее понадобится лишь следующая формула:

$$\Phi^1(\theta,\ \varphi)=O((\sin\theta)^{3/2}|\ln\sin\theta|)\quad(\theta\to 0,\ \pi) \tag{2.17}$$

Проверим (2.17). Вблизи северного и южного полюсов область ω близка к углу с раствором 2π, и значит [13], справедливо разложение $\Phi^1(\theta,\ \varphi)=C_\Phi(\sin\theta)^{1/2}\sin{}^1/_2\varphi+O((\sin\theta)^{3/2}\ |\ln\sin\theta|)$. (Подчеркнем, что в силу четности функции (2.16) относительно экватора множители при $(\sin\theta)^{1/2}$ одинаковые и для $\theta\to 0$, и для $\theta\to\pi$.) Имеется неэнергетическое решение $X(\theta,\ \varphi)=(\sin\theta)^{-1/2}\sin{}^1/_2\varphi$ задачи Неймана в ω для оператора $-\Delta+{}^1/_4$. Согласно [11] величина

$$\frac{1}{2\pi}\int_\omega F(\theta,\varphi)X(\theta,\varphi)\,d\Sigma=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}F(\theta,\varphi)X(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\varphi\,d\theta \tag{2.18}$$

совпадает с коэффициентом C_Φ. Подставляя (2.16) в (2.18), находим, что интеграл равен нулю, и значит, оценка (2.17) верна.

Принимая во внимание (2.17), из результатов [2, 10] выводим, что справедливы соотношения

$$\zeta(\tau;\ x)\,|_{\varphi=2/3\pi}=\sin{}^1/_3\pi\{(2r\pi^{-1})^{1/2}Z(\tau,\ s,\ r)+O(r^{3/2}\ |\ln\rho|)\}$$
$$Z(\tau,\ s,\ r)=(2\pi)^{-1}\lambda(\tau-s)\,(r^2+(\tau-s)^2)^{-1}+Z_*(\tau,\ s,\ r) \tag{2.19}$$
$$Z_*(\tau,\ s,\ r)=O(1+r(r^2+(s-\tau)^2)^{-1})$$

Функции Z и Z_* гладкие вне особых поверхностей на множестве $\Gamma\times\times\Gamma\times[0,\ \delta]$, где δ настолько мало, что $B_{\delta,\tau}\subset U$ при $\tau\in\Gamma$. Положим в (2.13) $\varphi={}^2/_3\pi$ и с учетом (2.19) вычислим асимптотику правой части при $r\to 0$. Имеем

$$(\sin{}^1/_3\pi)^{-1}\int_\Gamma H(\tau)\,\zeta(\tau;x)\,d\tau\Big|_{\varphi={}^2/_3\pi}=(2\pi r)^{-1/2}H(s)+(2r\pi^{-1})^{1/2}H(s)\Big\{\int_\Gamma Z_*(\tau,s,r)d\tau+$$
$$+(2\pi)^{-1}\int_{\mathbf{R}}(1-\lambda(t))(r^2+t^2)^{-1}dt\Big\}+(2r\pi^{-1})^{1/2}\int_\Gamma(H(\tau)-H(s))\,Z(\tau,s,\ r)d\tau+O(r^{3/2}) \tag{2.20}$$

Выражение из фигурных скобок в (2.20) имеет конечный предел $b(s)$ при $r\to 0$. Аналогично, понимая интегралы как несобственные, получаем

$$\lim_{r\to 0}\int_\Gamma(H(\tau)-H(s))\,Z(\tau,s,r)\,d\tau=\int_\Gamma(H(\tau)-H(s))\,Z(\tau,s,0)\,d\tau\equiv B(H;s) \tag{2.21}$$

Сопоставляя формулы (2.7), (2.12), (2.20), заключаем, что

$$C_\Omega(H;\ s)=\mu(1-\nu)^{-1}(b(s)H(s)+B(H;\ s)) \tag{2.22}$$

Из принципа максимума и представления (2.9) вытекает, что $\zeta(\tau;\cdot)$ — положительная функция в $\mathbf{R}_+^3$, а следовательно, $Z(\tau,s,0)\geqslant 0$. Имеет место аналогичное (2.10) равенство $Z(\tau,s,0)=Z(s,\tau,0)$, для вывода которого необходимо применить формулу Грина в $\Omega\setminus(B_{\delta,\tau}\cup B_{\delta,s})$ (ср. с (2.11)). Таким образом, ядро интегрального оператора (2.21) является неотрицательным и симметрическим. Поэтому квадратичная форма

$$-(B(H),H)_\Gamma+(H,H)_\Gamma=\frac{1}{2}\int_\Gamma\int_\Gamma|H(s)-H(\tau)|^2Z(\tau,s,0)\,d\tau\,ds+(H,H)_\Gamma \tag{2.23}$$

положительно определена и задает скалярное произведение в пространстве Соболева — Слободецкого $W_2^{1/2}(\Gamma)$; в (2.23) $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ — скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$.

3. Асимптотические формулы для $K_\varepsilon(s)$. Введем в окрестности U контура Γ «растянутые» координаты $\xi=(\xi_1,\ \xi_2)=(\varepsilon^{-1}n,\ \varepsilon^{-1}x_3)$ и перейдем к ним в исходной задаче. Полагая $\varepsilon=0$, получаем задачу о пограничном слое. В силу (2.2) и определения области G_ε (фиг. 1) она является параметрически зависящей от $s\in\Gamma$ задачей для уравнения Пуассона в полуплоскости $\mathbf{R}_+^2$; на луче $N_-(s)=\{\xi:\xi_2=0,\ \xi_1<h(s)\}$ заданы условия Ней-

мана, а на $N_+(s)=\{\xi : \xi_2=0, \xi_1=h(s)\}$ — условия Дирихле. Далее понадобятся полярные координаты (r_0, φ_0) и (r_h, φ_h) с центрами в точках 0 и $\xi=(h(s), 0)$ (фиг. 3).

Принимая во внимание разложение (2.1), заключаем, что пограничный слой естественно искать в виде

$$\varepsilon^{1/2}w^1(\xi, s)+\varepsilon w^2(\xi, s)+\varepsilon^{3/2}w^3(\xi, s)+\ldots \tag{3.1}$$

Кроме того, в силу (2.3) w^1 — гармоническая в $\mathbf{R}_+^2$ функция, удовлетворяющая однородным краевым условиям на $N_\pm(s)$. Так как $r_0=\varepsilon^{-1}r$, то согласно (2.1) получаем условие сращивания $w^1(\xi, s)\sim\mu^{-1}(1-\nu)\times\times(2r_0\pi^{-1})^{1/2}K(s)\sin{}^1/_2\varphi_0$ при $|\xi|\to\infty$. Следовательно, переходя к координатам (r_0, φ_0) и раскладывая в ряд по обратным степеням r_0, получаем

$$\begin{gathered}w^1(\xi, s)=\mu^{-1}(1-\nu)(2r_h\pi^{-1})^{1/2}K(s)\sin{}^1/_2\varphi_h=\\=\mu^{-1}(1-\nu)(2r_0\pi^{-1})^{1/2}K(s)(1+{}^1/_2h(s)r_0^{-1})\sin{}^1/_2\varphi_0+O(r_0^{-3/2})\end{gathered} \tag{3.2}$$

Аналогичные рассуждения для второго члена пограничного слоя приводят к формуле

$$w^2(\xi, s)=p(s)r_h\sin\varphi_h=p(s)r_0\sin\varphi_0 \tag{3.3}$$

Асимптотики (3.1)—(3.3) согласуются с (2.1) и сращивание можно осуществить с точностью $O(\varepsilon^{1/2})$. Для того чтобы учесть слагаемое порядка $O(r_0^{-1/2})$ в (3.2), нужно определить второй член внешнего разложения (вне малой окрестности Γ_ε):

$$v_\varepsilon(x)=v(x)+\varepsilon v^1(x)+\ldots \tag{3.4}$$

Ясно, что v^1 — гармоническая в Ω функция, удовлетворяющая однородным условиям (1.1). Из (3.2) вытекает, что должно выполняться соотношение

$$v^1(x)=\mu^{-1}(1-\nu)(2\pi r)^{-1/2}h(s)K(s)\sin{}^1/_2\varphi+o(r^{-1/2})\quad(r\to0) \tag{3.5}$$

Сравнивая (2.5) и (3.5), находим, что

$$v^1(x)=\mu^{-1}(1-\nu)V(hK;\ x) \tag{3.6}$$

Перейдем к вычислению функции w^3 в (3.1). Компенсируя невязки, оставленные главным членом пограничного слоя и используя расщепление (2.3) в координатах (ξ, s), получаем уравнение

$$\Delta_\xi w^3(\xi, s)+\varkappa(s)(\partial w^1/\partial\xi_1)(\xi, s)=0\quad(\xi\in R_+^2) \tag{3.7}$$

Краевые условия для w^3 имеют вид

$$(\partial w^3/\partial\xi_2)(\xi, s)=0\quad(\xi\in N_-(s)),\quad w^3(\xi, s)=0\quad(\xi\in N_+(s)) \tag{3.8}$$

Наконец, учитывая (2.1), (2.7) и сращивая асимптотики (3.1), (3.5) в промежуточной зоне $\{r\sim\varepsilon^{1/2}\}$, устанавливаем поведение функции w^3 на бесконечности

$$\begin{gathered}w^3(\xi, s)=\mu^{-1}(1-\nu)(2r_0\pi^{-1})^{1/2}\{\sin{}^1/_2\varphi_0[{}^1/_4r_0K(s)\varkappa(s)+\mu^{-1}(1-\nu)\times\\\times C_\Omega(hK;\ s)]+\sin{}^3/_2\varphi_0[{}^1/_3r_0k(s)-{}^1/_8K(s)h(s)\varkappa(s)]\}+O(r_0^{1/2})\end{gathered} \tag{3.9}$$

Решение задачи (3.9) ищем в виде суммы

$$\begin{gathered}w^3(\xi, s)=\mu^{-1}(1-\nu)(2r_h\pi^{-1})^{1/2}\{\sin{}^1/_2\varphi_h[{}^1/_4r_hK(s)\varkappa(s)+\\+T(s)]+{}^1/_3r_hk(s)\sin{}^3/_2\varphi_h\}\end{gathered} \tag{3.10}$$

Поскольку $\partial r_h/\partial h=-\cos\varphi_0$, $\partial\varphi_h/\partial h=r_0^{-1}\sin\varphi_0$ при $h=0$, то справедливо разложение

$$\begin{gathered}w^3(\xi, s)=\mu^{-1}(1-\nu)(2r_0\pi^{-1})^{1/2}\{\sin{}^1/_2\varphi_0[{}^1/_4r_0K(s)\varkappa(s)+\\+{}^1/_4K(s)h(s)\varkappa(s)-{}^1/_2h(s)k(s)+T(s)]+\sin{}^3/_2\varphi_0[{}^1/_3r_0k(s)-\\-{}^1/_8K(s)h(s)\varkappa(s)]\}+O(r_0^{-1/2})\quad(r_0\to\infty)\end{gathered} \tag{3.11}$$

Сравнивая (3.11) и (3.9), находим следующее значение неизвестной величины $T(s)$ в (3.10):

$$T(s)=\mu^{-1}(1-\nu)C_\Omega(Kh;\ s)+{}^1/_2h(s)(k(s)-{}^1/_2K(s)\varkappa(s)) \tag{3.12}$$

Заметим, что в выражении (3.1), приближающем решение v_ε вблизи ребра Γ_ε трещины M_ε, негладкими членами являются лишь w^1 и w^3. Так как величина угла между нормалями n и n_ε к ∂G и ∂G_ε составляет $O(\varepsilon)$, то из (3.2) и (3.10), (3.12) выводим асимптотическое равенство

$$K_\varepsilon(s)=K(s)+\varepsilon\{\mu^{-1}(1-\nu)C_\Omega(Kh;\ s)+{}^1/_2h(s)(k(s)-\\ -{}^1/_2K(s)\varkappa(s))\}+O(\varepsilon^2) \tag{3.13}$$

Подчеркнем, что обоснование разложения получается при помощи результатов [7, 2, 4]. Из соотношений (3.4), (3.6) вытекает, в частности, что

$$z(x)=(\partial v_\varepsilon/\partial\varepsilon)(x)|_{\varepsilon=0}=\mu^{-1}(1-\nu)V(hK;\ x) \tag{3.14}$$

Правая часть (3.14) представляет собой аналог весовой функции Райса [14]. Согласно (2.8) при помощи такой функции можно определить весовое среднеквадратичное значение K по Γ:

$$\mu^{-1}(1-\nu)\int\limits_\Gamma h(s)K(s)^2\,ds=2\int\limits_G z(y,0)P(y)\,dy \tag{3.15}$$

Поскольку $\varepsilon z(y)=v_\varepsilon(x)-v(x)+O(\varepsilon^2r^{-1/2})$, то выражение справа в (3.15) равно $\varepsilon^{-1}(A_\varepsilon-A)+O(\varepsilon)$, где A_ε и A — работы внешних сил на смещениях v_ε и v соответственно. Так как величина ${}^1/_2(A-A_\varepsilon)$ совпадает с приращением $\Delta\Pi(\varepsilon;\ h)$ потенциальной энергией деформации, то из (3.15) вытекает известная формула Гриффитса — Ирвина

$$\Delta\Pi(\varepsilon;h)=-{}^1/_2\varepsilon\mu^{-1}(1-\nu)\int_\Gamma h(s)K(s)^2\,ds+O(\varepsilon^2)$$

Отметим, что для вывода этого соотношения достаточно знать лишь второй член v^1 внешнего разложения, а для вывода (3.13) — и следующий член w^3 внутреннего разложения.

Пусть данные задачи для v осесимметричные и $h=\mathrm{const}$. Тогда K_ε, K и k — постоянные и $C_\Omega(Kh;\ s)=KhC_\Omega$ (величина $C_\Omega(H)$ в (2.7) равна константе C_Ω, умноженной на H). Следовательно, формула (3.13) приобретает вид $K_\varepsilon=K+\varepsilon h\{K[\mu^{-1}(1-\nu)C_\Omega-{}^1/_2\varkappa]+{}^1/_2k\}+O(\varepsilon^2)$. Она лишь слагаемым $-{}^1/_2\varkappa$, вызванным кривизной контура, отличается от выведенной в [8] формулы для плосконапряженного состояния.

4. Уравнение формы трещины при квазистатическом росте. Пусть при действии нагрузки P на некотором участке контура Γ функция K превысила критическое значение K_k, причем величина $\varepsilon=K_k^{-1}K_{\max}-1$ мала. Рассмотрим приращение поверхности трещины, описываемое функцией εh (фиг. 1), и допустим, что трещина M_ε предельно равновесная.

Согласно критерию Ирвина разрушение происходит при достижении $K(s)$ критического значения K_c. Здесь считается, что рост трещины имеет место лишь при строгом неравенстве $K(s)>K_k$, а при $K(s)\leqslant K_k$ трещина равновесная (предельно, если $K(s)=K_k$ при каком-нибудь s). Это соглашение необходимо для строгого вывода вариационных неравенств. Оно не вступает в противоречие с упомянутым критерием, поскольку можно считать, что величина K_k чуть меньше K_c (в рамках допущенных погрешностей).

Всюду на Γ выполнено неравенство $K_\varepsilon(s)\leqslant K_k$. Кроме того, в тех случаях s, где $h(s)>0$, $K_\varepsilon(s)$ имеет значение K_k (при $K_\varepsilon(s)=K_k$ трещина останавливается). Таким образом

$$h(s)\geqslant 0;\ h(s)>0\Rightarrow K_\varepsilon(s)=K_k;\ h(s)=0\Rightarrow K_\varepsilon(s)\leqslant K_k \tag{4.1}$$

Первое из условий (4.1) означает, что берега трещины срастаться не могут. Заменим в (4.1) величину $K_\varepsilon(s)$ ее асимптотическим приближением (3.13). Удерживая члены $O(\varepsilon)$, приходим к формулам

$$h(s)\geqslant 0,\ h(s)>0\Rightarrow\Xi(h;\ s)=f(s),\ h(s)=0\Rightarrow\Xi(h;\ s)\geqslant f(s) \tag{4.2}$$

$$\Xi(h;\ s)={}^1/_2h(s)({}^1/_2K_*(s)\varkappa(s)-k_*(s))-\mu^{-1}(1-\nu)C_\Omega(K_*h;\ s) \tag{4.3}$$

$$K_*(s)=K(s)K_k^{-1},\ k_*(s)=k(s)K_k^{-1},\ f(s)=(K_*(s)-1)(K_{*\max}-1)^{-1}$$

Как обычно [15], соотношения (4.2) можно записать в виде вариационного неравенства. Учитывая (4.3) и (2.22), при помощи стандартных рассуждений получаем

$$(\beta_* h, \chi - h)_\Gamma - (B(K_* h), \chi - h)_\Gamma \geqslant (f, \chi - h)_\Gamma \quad (\chi \in W_{2+}^{1/2}(\Gamma)) \tag{4.4}$$

Здесь $W_{+2}^{1/2}(\Gamma)$ — множество положительных функций из $W_2^{1/2}(\Gamma)$, $\beta_* = K_*({}^1/_4\varkappa - b) - {}^1/_2 k_*$. Если K положителен всюду на Γ, то (4.4) приводится к виду

$$(\beta H, X - H)_\Gamma - (B(H), X - H)_\Gamma \geqslant (f, X - H)_\Gamma \quad (X \in W_{2+}^{1/2}(\Gamma)) \tag{4.5}$$

$$H = K_* h, \quad \beta = K_*^{-1}\beta_* = {}^1/_4\varkappa - b - {}^1/_2 k K^{-1} \tag{4.6}$$

Решая задачу (4.4) или (4.5), можно исследовать форму малого приращения поверхности трещины. Рассмотренную ситуацию следует характеризовать как локально критическую, так как $K(s) \approx K_k$ на некотором участке ребра.

В том случае, когда $K(s)$ значительно меньше K_k, в силу (4.3) величина $f(s)$ большая и отрицательная. Поэтому норма решения вариационного неравенства (4.4) или (4.5) может иметь недопустимый порядок $O(\varepsilon^{-1})$; такие решения следует исключить из рассмотрения. Если $\beta > 0$ на Γ, то согласно общим результатам [15] существует единственное решение $H = K_* h \in W_{2,+}^{1/2}(\Gamma)$ задачи (4.5) и для него справедлива оценка

$$c\|H; W_{2,+}^{1/2}(\Gamma)\|^2 \leqslant (\beta H, H)_\Gamma - (B(H), H)_\Gamma \leqslant (f, H)_\Gamma \leqslant (f_+, H)_\Gamma \tag{4.7}$$

Ясно, что положительная часть $f_+ = {}^1/_2(f + |f|)$ функции f равномерно ограничена при малых ε (см. (4.3)), и значит, решение (4.7) допустимое, а рост трещины локально устойчивый и квазистатический. Естественно считать, что при отсутствии допустимых решений трещина квазистатически развиваться не может; в случае множественности решений возникает вопрос об устойчивости той или иной формы приращения поверхности трещины.

Наконец, приведем выражения для величин K, k, Z и b, участвующих в (2.21), (2.22), (4.3) — (4.6), в случае трещины, имеющей форму полуплоскости $G = \{y : y_1 < 0\}$, $\varkappa = 0$:

$$K(s) = \int_G P(y) Y_0(y, s)\, dy, \qquad k(s) = -2\int_G P(y) Y_1(y, s)\, dy, \qquad Y_j(y) =$$
$$= 2^{1/2}\pi^{-3/2} |y_1|^{j+1/2} (y_1^2 + |y_2 - s|^2)^{-j-1}, \qquad Z(s, \tau, 0) = (2\pi)^{-1}(s - \tau)^{-2}, \qquad b(s) = 0 \tag{4.8}$$

Из формул (4.8) и сказанного выше, в частности, вытекает, что для финитной растягивающей нагрузки P выполнено условие $\beta(s) > c(1 + s^2)^{-1} > 0$. Следовательно, вариационное неравенство (4.5) имеет единственное решение в пространстве с нормой $(\beta H, H)_{\mathbf{R}} - (B(H), H)_{\mathbf{R}}$, а развитие трещины локально устойчивое.

Автор выражает глубокую признательность Р. В. Гольдштейну и Л. Г. Колтону за полезные обсуждения работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
2. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. № 1. С. 33—36.
3. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Шаудеровские оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами на границе // Дифференциальные уравнения с частными производными: Тр. семинара С. Л. Соболева. 1978. № 2. С. 69—102.
4. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
5. *Федорюк М. В.* Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45. № 1. С. 167—186.
6. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотика решений задачи Дирихле в области с вырезанной тонкой трубкой // Мат. сб. 1981. Т. 116. № 2. С. 187—217.

7. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та. 1981. 206 с.
8. *Назаров С. А.* Локальная устойчивость и неустойчивость трещин нормального отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 124–129.
9. *Захаревич И. С.* О вариации решений интегродифференциальных уравнений смешанных задач теории упругости при вариации области // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 961–968.
10. *Кондратьев В. А.* Особенности решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в окрестности ребра // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 11. С. 2026–2032.
11. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками/Math. Nachr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.
12. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука. 1981. 688 с.
13. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
14. *Rice J. R.* Some remarks on elastic crack-tip stress fields // Intern. J. Solids Structures. 1972. V. 8. № 5. P. 751–758.
15. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
28.XII.1987