МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1989

УДК 531.383

С. А. БЕЛИКОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ГИРОСКОПОМ, ВРАЩАЮЩИМСЯ ВОКРУГ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОСИ, НА АБСОЛЮТНО ГЛАДКОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассматривается движение гиростата на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Уравнения движения гиростата допускают частное решение, отвечающее равновесию корпуса и равномерному вращению гироскопа вокруг горизонтальной главной оси. Необходимые и достаточные условия устойчивости этого частного решения получены в [1], причем достаточные условия найдены методом построения функции Ляпунова в виде связки первых интегралов уравнений возмущенного движения [2]. В [1] отмечено также, что достаточные условия, полученные этим методом, совпадают с необходимыми. В настоящей работе исследуется вопрос об устойчивости указанного частного решения на границе области необходимых условий устойчивости.

Получена функция Гамильтона, задающая канонические уравнения движения гиростата. Осуществлен переход к приведенной гамильтоновой системе с двумя степенями свободы и получено разложение гамильтониана в окрестности положения равновесия, соответствующего указанному частному решению, с точностью до членов четвертого порядка. В области допустимых значений параметров построена область необходимых условий устойчивости, совпадающая с областью знакоопределенности функции Гамильтона. В случаях, когда набор параметров принадлежит границе области необходимых условий устойчивости, произведена нормализация гамильтониана и получены с использованием результатов [3, 4] достаточные условия устойчивости в терминах ограничений на коэффициенты нормальной формы.

1. Рассмотрим движение тяжелого твердого тела в однородном поле сил тяжести на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Пусть тело **представляет собой гиростат**, т. е. имеет полость, в которой расположен симметричный гироскоп с осью вращения, жестко связанной с телом (корпусом). Вращение гироскопа происходит без трения с постоянной относительно корпуса произвольной угловой скоростью ω^0. Предположим, что поверхность, ограничивающая тело, выпукла, так что она соприкасается с горизонтальной плоскостью лишь одной своей точкой, в которой поверхность имеет единственную касательную плоскость. Введем неподвижную правую прямоугольную систему координат $OXYZ$ с началом в точке O опорной горизонтальной плоскости $Z=0$ и жестко связанную с корпусом правую прямоугольную систему координат $S\xi'\eta'\zeta'$, оси которой направлены вдоль главных центральных осей инерции гиростата. Пусть ось вращения гироскопа совпадает с $S\xi'$. Положение корпуса будем задавать координатами X_S, Y_S точки S и углами Эйлера θ, φ, ψ, ориентирующими систему $S\xi'\eta'\zeta'$ по отношению к $OXYZ$. Рассмотрим также правую прямоугольную систему координат $SX'Y'Z'$, ось SZ' которой направлена вертикально вверх, SY' — по линии узлов в сторону, откуда поворот оси SZ' на угол θ до совмещения с осью $S\zeta'$ происходит против часовой стрелки.

Функция Гамильтона, задающая канонические уравнения движения гиростатата, имеет вид

$$H={}^1/_2\,[\Phi(p_\theta-\alpha)^2-2\Psi(p_\theta-\alpha)(p_\varphi-\beta)+\Theta(p_\varphi-\beta)^2]/\Delta-\gamma+{}^1/_2(p^2+q^2)/M \tag{1.1}$$

$$\Delta=\Theta\Phi-\Psi^2,\quad \Theta=I_{22}-I_{23}^2I_{33}^{-1}+M\varkappa^2$$

$$\Phi=(I_{11}-I_{13}^2I_{33}^{-1}+M\chi_2^2)\sin^2\theta,\quad \Psi=(I_{12}-I_{13}I_{22}I_{33}^{-1}+M\varkappa\chi_2)\sin\theta$$

$$\alpha=\Lambda I_{23}I_{33}^{-1}+D\omega^0\cos\varphi,\ \beta=\Lambda(I_{33}\cos\theta+I_{13}\sin\theta)I_{33}^{-1}$$
$$\gamma=-{}^1/_2\Lambda^2I_{33}^{-1}+Mg(\chi_1\sin\theta+\zeta'\cos\theta)$$
$$\Lambda=p_\psi-D\omega^0\sin\theta\sin\varphi,\quad \varkappa=\chi_1\cos\theta-\zeta'\sin\theta$$
$$\chi_1=\xi'\sin\varphi+\eta'\cos\varphi,\ \chi_2=\xi'\cos\varphi-\eta'\sin\varphi$$

Здесь p, q, p_θ, p_φ, p_ψ — обобщенные импульсы, соответствующие координатам X_S, Y_S, θ, φ, ψ, M — масса гиростата, g — ускорение силы тяжести, ξ', η', ζ' — координаты точки касания тела с плоскостью в системе $S\xi'\eta'\zeta'$, являющиеся функциями θ и φ, определяемые по виду уравнения поверхности корпуса, причем $(\xi^{\cdot\prime}\sin\varphi+\eta^{\cdot\prime}\cos\varphi)\sin\theta+\zeta^{\cdot\prime}\cos\theta\equiv0$, где точка означает дифференцирование по θ или φ, D — осевой момент инерции гироскопа, I_{ij} $(i, j=1, 2, 3)$ — компоненты тензора инерции гиростата по отношению к системе $SX'Y'Z'$, являющиеся линейными формами главных центральных моментов инерции гиростата A, B, C с коэффициентами — тригонометрическими функциями θ и φ. Выражение I_{ij} приведено в [5]. Координаты X_S, Y_S, ψ — циклические, поэтому приведенная система имеет две степени свободы.

2. Канонические уравнения движения гиростата с функцией Гамильтона (1.1) допускают частное решение

$$p=p_0,\ q=q_0,\ p_\theta=D\omega^0,\ p_\varphi=p_\psi=0 \tag{2.1}$$
$$X_S=M^{-1}p_0t+X_S{}^0,\ Y_S=M^{-1}q_0t+Y_S{}^0$$
$$\theta=\pi/2,\ \varphi=0,\ \psi=\psi_0$$

отвечающее равновесию корпуса. При этом ось $S\eta'$ расположена вертикально, следовательно, ось $S\xi'$, вокруг которой равномерно вращается гироскоп, расположена горизонтально. Центр масс S гиростата движется с постоянной скоростью вдоль горизонтальной прямой. Не ограничивая общности, считаем его неподвижным.

Замечание. В [1] указано, что равномерное вращение корпуса вокруг вертикальной оси исключено. т. е. корпус находится в равновесии, если на стационарном движении ось вращения гироскопа не совпадает с вертикалью.

Исследуем устойчивость стационарного движения (2.1) гиростата относительно p_θ, p_φ, θ, φ. Анализ устойчивости связан с рассмотрением функции Гамильтона в окрестности движения (2.1).

Пусть h — расстояние от центра масс S до точки контакта T гиростата и плоскости на невозмущенном движении (2.1), $\nu'=h+\eta'$. Полагаем $p_\theta=D\omega^0+x_1'$, $p_\varphi=x_2'$, $\theta=\pi/2+y_1'$, $\varphi=y_2'$ и находим разложение функции Гамильтона приведенной системы в окрестности положения равновесия, соответствующего стационарному движению (2.1), с точностью до членов четвертого порядка относительно возмущения x_1', x_2', y_1', y_2', ξ', ν', ζ'. Вводим новые безразмерные переменные x_1, x_2, y_1, y_2, время τ, безразмерные координаты ξ, ν, ζ, угловую скорость ω и параметры a, b, n по формулам

$$x_i'=(BMgh)^{1/2}x_i,\ y_i'=y_i\ (i=1, 2),\ \tau=(Mgh/B)^{1/2}t$$
$$\xi=\xi'/h,\ \nu=\nu'/h=1+\eta'/h=1+\eta,\ \zeta=\zeta'/h$$
$$\omega=D\omega^0(BMgh)^{-1/2},\ a=B/A,\ b=B/C,\ n=Mh^2/A$$

Получаем

$$\begin{aligned}2H={}&ax_1^2+bx_2^2-y_1^2-(1-\omega^2)y_2^2+(2-a)\omega x_1y_2^2-\\&-2\omega x_2y_1y_2-anx_1^2y_1^2+(1-a)x_1^2y_2^2+\\&+2(a-1-bn)x_1x_2y_1y_2+x_2^2y_1^2-(b^2/a)nx_2^2y_2^2+\\&+y_1^4/12+y_1^2y_2^2/2+[{}^1/_{12}+(a/4-{}^1/_3)\omega^2]y_2^4+\\&+anx_1^2\zeta(2y_1-\zeta)-2bnx_1x_2(y_1\xi-y_2\zeta-\xi\zeta)-\\&-(b^2/a)nx_2^2\xi(2y_2+\xi)-[(2y_2-y_1^2y_2-\\&-y_2^3/3)\xi+(2-y_1^2-y_2^2)\nu+(-2y_1+y_1^3/3)\zeta]+\ldots\end{aligned} \tag{2.2}$$

3. В дальнейшем будем считать, что в малой окрестности точки контакта T поверхность корпуса близка к эллипсоиду, одна из осей которого лежит на оси $S\eta'$. Тогда [5]:

$$
\begin{aligned}
&\xi = ly_1 - l_2y_2 + {}^1/_2[-l(l_1 - {}^2/_3)y_1^3 + (l_1l_2 + \\
&+2l^2)y_1^2y_2 - l(3l_2-1)y_1y_2^2 + l_2(l_2 - {}^2/_3)y_2^3] + \ldots \\
&\eta = -1 + {}^1/_2(l_1y_1^2 - 2ly_1y_2 + l_2y_2^2) + {}^1/_8[-l_1(3l_1 - \\
&-{}^8/_3)y_1^4 + l(12l_1 - {}^8/_3)y_1^3y_2 - [6(l_1l_2 + 2l^2) - 4l_1]y_1^2y_2^2 + \\
&+l(12l_2 - {}^{20}/_3)y_1y_2^3 - l_2(3l_2 - {}^8/_3)y_2^4] + \ldots \\
&\zeta = l_1y_1 - ly_2 + {}^1/_2[-l_1(l_1 - {}^2/_3)y_1^3 + 3ll_1y_1^2y_2 - \\
&-(l_1l_2 + 2l^2 - l_1)y_1y_2^2 + l(l_2 - {}^2/_3)y_2^3] + \ldots \\
&l_1 = (r_1 \sin^2\varepsilon + r_2\cos^2\varepsilon)/h, \quad l_2 = (r_1\cos^2\varepsilon + r_2\sin^2\varepsilon)/h \\
&l = (r_2 - r_1)\sin\varepsilon\cos\varepsilon/h
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

где r_1, r_2 — главные радиусы кривизны поверхности корпуса в точке T, ε — угол между осью $S\zeta'$ и направлением главной кривизны, соответствующей r_2, который отсчитывается от оси $S\zeta'$ против часовой стрелки, если смотреть навстречу оси $S\eta'$, направленной вертикально вверх на невозмущенном движении (2.1).

Подставим (3.1) в (2.2). Получаем разложение функции Гамильтона приведенной системы в виде суммы однородных форм относительно x_1, x_2, y_1, y_2:

$$
H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots \tag{3.2}
$$

$$
H_k = \sum_{|\nu|=k} h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} y_1^{\nu_3} y_2^{\nu_4} \qquad (k=2,3,4)
$$

где ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 — целые неотрицательные числа, $|\boldsymbol{\nu}| = \sum_{i=1}^{4}\nu_i$. Отличные от нуля коэффициенты форм H_2 и H_3 имеют вид

$$
\begin{gathered}
h_{2000} = a/2, \ h_{0200} = b/2, \ h_{0020} = (l_1 - 1)/2, \ h_{0011} = -l \\
h_{0002} = (\omega^2 + l_2 - 1)/2, \ h_{1002} = (1 - a/2)\omega, \ h_{0111} = -\omega
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

Из коэффициентов формы H_4 выпишем лишь необходимые в дальнейшем для исследования устойчивости

$$
\begin{gathered}
h_{0040} = (-3l_1^2 + 2l_1 + 1)/24, \ h_{0031} = l(3l_1 + 1)/6 \qquad (3.4) \\
h_{0022} = (-l_1l_2 - 2l^2 + l_1 - l_2 + 1)/4, \ h_{0013} = l(3l_2 - 2)/6 \\
h_{0004} = [-3l_2^2 + 2l_2 + 1 + (3a - 4)\omega^2]/24
\end{gathered}
$$

4. Рассмотрим область допустимых значений параметров $F = \{\mathbf{c} = (\omega, a, b, l, l_1, l_2)$: $a < b(a+1)$, $b < a(b+1)$, $a > b(a-1)$; $l_1 > 0$, $l_2 > 0\}$. Анализ характеристического уравнения показывает, что область необходимых условий устойчивости имеет вид

$$
\begin{gathered}
G = \{\mathbf{c} : \mathbf{c} \in F, \ Q_1 > 0, \ Q_2 > 0, \ Q_1^2 - 4Q_2 > 0\} \\
Q_1 = b\omega^2 + a(l_1 - 1) + b(l_2 - 1) \\
Q_2 = ab(\omega^2(l_1 - 1) + (l_1 - 1)(l_2 - 1) - l^2)
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

Квадратичная форма H_2 является знакоопределенной в области $G_0 = \{\mathbf{c}$: $\mathbf{c} \in F$, $l_1 > 1$, $Q_2 > 0\}$. Анализируя функции (4.1), получаем, что неравенства $Q_1 > 0$ и $Q_2 > 0$ совместны лишь при $l_1 > 1$. Тогда неравенства $Q_1 > 0$ и $Q_1^2 - 4Q_2 > 0$ являются следствием $Q_2 > 0$, поэтому $G = G_0$.

Согласно теореме Рауса с дополнением Ляпунова (см. [6]) стационарное движение (2.1) устойчиво при параметрических возмущениях [7] конструктивных параметров $c \in G$ гиростата. Таким образом, остается открытым вопрос об устойчивости решения (2.1) лишь на границе ∂G области G, определяемой равенством $Q_2=0$.

Отметим, что полученные ранее [1] необходимые условия типа $c \in G$ и достаточные условия типа $c \in G_0$ устойчивости решения (2.1) имеют несколько иную форму. Указанный в [1] факт о совпадении достаточных условий устойчивости решения (2.1), полученных методом Четаева [2], с необходимыми в приведенной здесь терминологии означает, что $G=G_0$.

Замечание. 1°. Из приведенных рассуждений следует, что форма второго порядка H_2 в разложении (3.2) полностью решает вопрос об устойчивости движения (2.1) при $c \in G$. Для решения вопроса об устойчивости в случае $c \in \partial G$ $(Q_2=0)$ необходимо привлекать формы более высокого порядка в разложении (3.2).

2°. Равенство $Q_2=0$ не накладывает ограничений на параметры a и b. $Q_2=0$ дает

$$\omega^2=1-l_2+l^2/(l_1-1) \tag{4.2}$$

3°. При выполнении неравенства $l^2<(l_1-1)(l_2-1)$ область G не может иметь границы, отличной от границы области F, т. е. всегда выполнено $Q_2>0$. Поэтому в дальнейшем считаем, что параметры связаны соотношением $l^2 \geqslant (l_1-1)(l_2-1)$.

4°. Условие $l_1>1$ имеет очевидный механический смысл (см. [1]).

5°. Если $Q_2=0$, система с гамильтонианом H_2 имеет одну нулевую частоту. Вторая частота при этом вычисляется по формуле $\alpha=Q_1^{1/2}$. Определяющая матрица системы имеет непростые элементарные делители.

5. В дальнейшем считаем, что $c \in \partial G$, т. е. выполнено соотношение (4.2). Приведем функцию Гамильтона (3.2)—(3.4) к нормальной форме. Для проведения линейной нормализации сделаем замену

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} s_1 & c_1 & t_1 & d_1 \\ s_2 & c_2 & t_2 & d_2 \\ s_3 & c_3 & t_3 & d_3 \\ s_4 & c_4 & t_4 & d_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{Vmatrix} \tag{5.1}$$

Выпишем элементы матрицы линейного симплектического преобразования (5.1), нужные для исследования устойчивости, воспользовавшись соотношениями (4.2) и $\alpha=Q_1^{1/2}$:

$$\begin{gathered} s_1=Q_1^{1/2}a(l_1-1)g_1, \quad s_2=-Q_1^{1/2}alg_1 \\ t_1=Q_1lg_1, \quad t_2=-Q_1l^2(l_1-1)^{-1}g_1, \quad c_1=0 \\ c_2=0, \quad c_3=-abl^2(l_1-1)^{-1}g_2, \quad c_4=-ablg_2 \\ d_1=bl^2(l_1-1)^{-1}g_2, \quad d_2=alg_2, \quad O_1^{1/2}g_1^2= \\ =[b^2l^6(l_1-1)^{-3}+2abl^4(l_1-1)^{-1}+a^3(l_1-1)^2+ \\ +a^2l^2(l_1-1)+a^2bl^2]^{-1}, \quad abl^2g_2^2=[bl^2(l_1-1)^{-2}+a]^{-1}. \end{gathered} \tag{5.2}$$

В переменных p_1, p_2, q_1, q_2 формы K_k $(k=3, 4)$ преобразованного гамильтониана (3.2) представим в виде

$$K_k=\sum_{|\nu|=k} g_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}q_1^{\nu_3}q_2^{\nu_4}$$

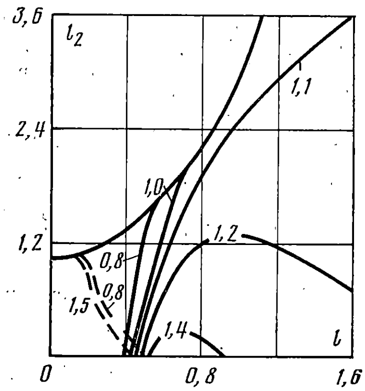
Выпишем коэффициенты форм K_3 и K_4, нужные для исследования устойчивости.

$$g_{1200}=s_1c_4^2(1-a/2)\omega-s_2c_3c_4\omega \tag{5.3}$$

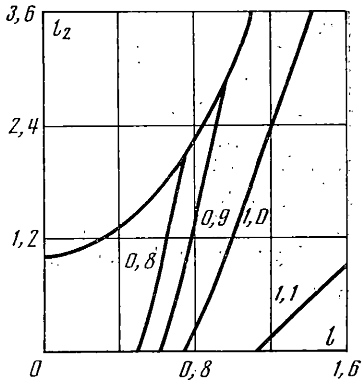
$$g_{0400}=c_3^4h_{0040}+c_3^3c_4h_{0031}+(c_3c_4)^2h_{0022}+c_3c_4^3h_{0013}+c_4^4h_{0004}$$

Коэффициент g_{0210} получается из g_{1200} заменой s_1, s_2 на t_1, t_2, g_{0201} — заменой s_1, s_2 на d_1, d_2. Коэффициенты нормальной формы, нужные для исследования устойчивости, имеют вид [4]:

$$a_{30}=0, \qquad a_{40}=g_{0400}-{}^1/_2g_{0201}^2-{}^1/_2Q_1^{-1/2}(g_{0210}^2+g_{1200}^2) \tag{5.4}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Подстановка формул (5.3), (5.2), (3.4), (4.1), (4.2) в (5.4) дает окончательное выражение коэффициента a_{40} через независимые параметры (a, b, l, l_1, l_2).

Согласно результатам, полученным в [3, 4], стационарное движение гиростата (2.1) устойчиво при фиксированных значениях параметров, если $a_{40}>0$, и неустойчиво, если $a_{40}<0$.

Замечания. 1°. Относительно устойчивости при фиксированных значениях параметров в случае нулевой частоты см. [8].

2°. Подстановка соотношения $l^2=(l_1-1)(l_2-1)$ в окончательное выражение коэффициента a_{40} показывает, что $a_{40}=0$.

Для наглядной интерпретации полученных достаточных условий устойчивости и неустойчивости будем фиксировать часть параметров из набора a, b, l, l_1, l_2 и использовать метод параллельных сечений области ∂G. Проверка условий $a_{40}\gtrless 0$ осуществлялась численно. Расчеты производились при $l_1=1{,}5$, $a=0{,}75$; 1,0; 1,5. При каждом из рассмотренных значений a параметр b изменялся с шагом 0,05 в соответствующем интервале (см. определение области F). Результаты расчетов при $a=0{,}75$ представлены на фиг. 1, при $a=1{,}5$ – на фиг. 2. На фигурах изображена область допустимых значений параметров, ограниченная снизу прямой $l_2=0$, сверху – кривой $l_2=1+2l^2$ (см. замечание 3° п. 4). Согласно замечанию 2° на этой кривой имеем $a_{40}=0$. Изображены также кривые, задаваемые уравнением a_{40} (b_*, l, l_2) $=0$, причем каждая из них помечена соответствующим значением b_*. Область неустойчивости $\{a_{40}<0\}$ расположена «слева-снизу», а область устойчивости $\{a_{40}>0\}$ – «справа-сверху» от кривых, изображенных штриховой линией (фиг. 1). Область устойчивости расположена «слева-сверху», а область неустойчивости – «справа-снизу» от кривых, изображенных сплошной линией (фиг. 1, 2). Кривые, изображенные штриховой линией, располагаются достаточно плотно и сдвигаются «влево-вниз» с ростом b или с ростом a. При $a=1{,}0$ они еще присутствуют в соответствующем сечении, но не пересекаются с границей $l_2=1+2l^2$, при $a=1{,}5$ – уже отсутствуют (см. фиг. 2). Кривые, изображенные сплошной линией, сдвигаются «вправо-вниз» с ростом b или с ростом a. При любой из рассмотренных величин a эти кривые исчезают, когда параметр b превышает некоторое значение. Так, их уже не обнаружено при $a=0{,}75$, $b=1{,}5$; $a=1{,}0$, $b=1{,}2$; $a=1{,}5$, $b=1{,}15$.

Все кривые построены при $l>0$. Следует отметить, что имеет место симметрия относительно оси Ol_2.

Для исследования устойчивости на кривых, изображенных на фиг. 1, 2, необходимо в разложении функции Гамильтона (3.2) привлекать формы, порядок которых больше четырех.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Румянцев В. В.* Об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 11–21.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.
3. *Сокольский А. Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка // ПММ. 1977. Т. 41, вып. 1. С. 24–33.
4. *Чудненко А. Н.* К устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем

с двумя степенями свободы при наличии двойного нулевого корня // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1978. Вып. 10. С. 54–60.
5. *Беликов С. А.* Устойчивость равномерных вращений гиростата вокруг вертикальной главной оси на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости // ПММ. 1986. Т. 50, вып. 1. С. 73–82.
6. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений // ПММ. 1966. Т. 30, вып. 5. С. 922–933.
7. *Кузьмин П. А.* Устойчивость при параметрических возмущениях // ПММ. 1957. Т. 21, вып. 1. С. 129–132.
8. *Савченко А. Я.* Устойчивость стационарных движений механических систем. Киев: Наук. думка, 1977. 160 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 28.IV.1987