МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1989

УДК 539.214

Г. И. БЫКОВЦЕВ, Т. Б. ЛАВРОВА

МОДЕЛЬ АНИЗОТРОПНО УПРОЧНЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЫ, ИМЕЮЩЕЙ РАЗЛИЧНЫЕ ЗАКОНЫ УПРОЧНЕНИЯ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

При описании анизотропии, приобретенной в процессе пластического деформирования, широкое распространение получила модель трансляционного упрочнения [1–4]. Во всех этих работах законы упрочнения при растяжении и сжатии одинаковы, так что замена знаков напряжений приводит к замене знаков деформаций. Существуют материалы, для которых экспериментально показано различие пределов текучести и законов упрочнения при растяжении и сжатии [5–8]. В [9–10] обсуждается модификация теории Христиановича – Шемякина для таких материалов. В [11–13] построена теория изотропного упрочнения для сред, обладающих различными свойствами при растяжении и сжатии. Введение первого инварианта тензора напряжений в связь между напряжениями и деформациями в [9–13] приводит к тому, что эти модели более пригодны к описанию поведения грунтов. В металлах зависимость от первого инварианта пластических свойств слабо выражена [14], а более существенно проявление эффекта Баушингера.

В публикуемой работе предлагается модель изотропного материала, приобретающего анизотропию в процессе пластического деформирования и обладающего различными свойствами при растяжении и сжатии, не содержащая зависимости от первого инварианта тензора напряжений.

1. В общем случае теорию трансляционного упрочнения можно строить следующим образом. Пусть известна начальная поверхность нагружения

$$f(\sigma_{ij})=k \tag{1.1}$$

Если постулировать, что в процессе пластического деформирования поверхность нагружения изменяется согласно уравнению

$$f(S_{ij})=k \tag{1.2}$$

где $S_{ij}=\sigma_{ij}+qe_{ij}^p$, то эта поверхность трансляционно смещается, при $k=\mathrm{const}$ она сохраняет свою форму. Если предположить, что k и q функции некоторых параметров $\varkappa_n$, характеризующих упрочнение, то поверхность нагружения будет не только трансляционно смещаться, но и изменять свои размеры.

Параметры $\varkappa_n$ можно ввести следующим образом

$$\varkappa_n^{\cdot}=f_n(\sigma_{ij},\ e_{ij}^p,\ \varkappa_i,\ e_{ij}^{p\cdot})\quad (n=1,\ 2,\ldots) \tag{1.3}$$

причем для сред, не обладающих ползучестью, f_n должны быть однородными первой степени функциями скоростей пластических деформаций. В теории течения для скоростей пластических деформаций постулируется ассоциированный закон течения $e_{ij}^{p\cdot}=\psi^{\cdot}\partial f/\partial S_{ij}=\psi^{\cdot}\partial f/\partial\sigma_{ij}$, где $\psi^{\cdot}$ – положительный неопределенный множитель.

Для изотропных сред f является функцией только инвариантов тензора σ_{ij} в соотношении (1.1), а в (1.2) функция f зависит от инвариантов тензора S_{ij}.

Для описания поведения идеально пластических сред в [15] было предложено условие пластичности, представленное на фигуре

Это условие можно записать в виде

$$\max|\sigma_i-\sigma_j+\alpha(\sigma_i-\sigma_l)|=k\qquad (i\neq j\neq l)$$

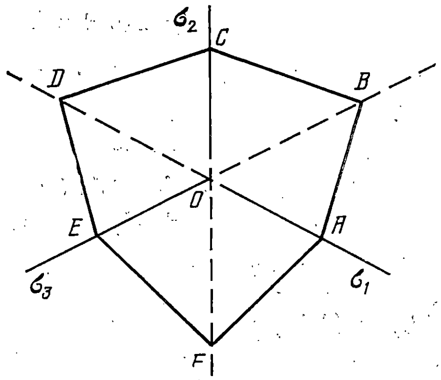
где σ_i — главные напряжения. В этом случае предел текучести при растяжении равен k, а при сжатии $\alpha^{-1}k$. При $\alpha=1$ это условие переходит в условие пластичности Треска.

Для сред, обладающих приобретенной анизотропией, обобщение условия Прагера запишем в виде

$$\max|S_i-S_j+\alpha(S_j-S_l)|=k \qquad (i\neq j\neq l) \qquad (1.4)$$

где S_i — главные значения тензора активных напряжений $\sigma_{ij}-qe_{ij}^p$ параметры k, q, α являются функциями параметров истории $\varkappa_n$.

Перенумеруем главные значения тензора S_{ij} так, чтобы выполнялось неравенство $S_1\geqslant S_2\geqslant S_3$. Если напряженное состояние соответствует грани условия (1.4), то



$$S_1-S_2+\alpha(S_2-S_3)=k \qquad (1.5)$$

Для компонент тензора напряжений

$$\sigma_{ij}=S_1l_il_j+S_2m_im_j+S_3n_in_j+qe_{ij}^p= \\ =(k+S_2-\alpha(S_2-S_3))l_il_j+S_2m_im_j+ \\ +S_3n_in_j+qe_{ij}^p \qquad (1.6)$$

где l_i, m_i, n_i — направляющие косинусы главных осей тензора активных напряжений.

Соотношения ассоциированного закона течения в главных осях имеют вид

$$e_1^{p\cdot}=\psi^\cdot,\ e_2^{p\cdot}=(\alpha-1)\psi^\cdot,\ e_3^{p\cdot}=-\alpha\psi^\cdot \qquad (1.7)$$

Из соосности тензоров скоростей пластической деформации и активных напряжений получаем

$$e_{ij}^{p\cdot}=\psi^\cdot(l_il_j+(\alpha-1)m_im_j-\alpha n_in_j) \qquad (1.8)$$

Система уравнений (1.3), (1.6), (1.8) определяет поведение среды при напряженном состоянии, соответствующем грани поверхности нагружения.

Ребра поверхности нагружения (1.4) получаем при условиях $S_2=S_3$ или $S_1=S_2$.

При $S_2=S_3$ ребро получается как пересечение граней

$$S_1-S_2+\alpha(S_2-S_3)=k, \qquad S_1-S_3+\alpha(S_3-S_2)=k \qquad (1.9)$$

Откуда следует, что $S_1-k=S_2=S_3$, а для компонент напряжений получаем

$$\sigma_{ij}=S_1\delta_{ij}-k(\delta_{ij}-l_il_j)+qe_{ij}^p \qquad (1.10)$$

Соотношения обобщенного ассоциированного закона течения на ребре (1.9) в главных осях имеют вид

$$e_1^{p\cdot}=\psi_1^\cdot+\psi_2^\cdot,\quad e_2^{p\cdot}=(\alpha-1)\psi_1^\cdot-\alpha\psi_2^\cdot \\ e_3^{p\cdot}=-\alpha\psi_1^\cdot+(\alpha-1)\psi_2^\cdot \qquad (1.11)$$

Аналогично (1.8) из (1.11) получаем выражения для скоростей пластических деформаций:

$$e_{ij}^{p\cdot}=(\psi_1^\cdot+\psi_2^\cdot)l_il_j+((\alpha-1)\psi_1^\cdot-\alpha\psi_2^\cdot)m_im_j+(-\alpha\psi_1^\cdot+(\alpha-1)\psi_2^\cdot)n_in_j \qquad (1.12)$$

Система уравнений (1.3), (1.10), (1.11) определяет поведение среды при напряженном состоянии, соответствующем ребру поверхности нагружения (1.9).

Из соотношений (1.12) можно исключить $\psi_1^\cdot$, $\psi_2^\cdot$, m_i, n_i, тогда получим соотношения ассоциированного закона течения в виде

$$e_{ij}^{p\cdot}=e_{rs}^{p\cdot}l_rl_sl_i,\ e_{ii}^{p\cdot}=0 \qquad (1.13)$$

Среди четырех уравнений (1.13) независимых только три, так как после свертки с l_i первое соотношение (1.13) обращается в тождество. Учитывая, что соотношения (1.10) не содержат m_i и n_i, приходим к выводу, что поведение среды при напряженном состоянии, соответствующем ребру (1.9), описывается системой уравнений (1.3), (1.10), (1.13).

При $S_1=S_2$ ребро получается как пересечение граней

$$S_1-S_2+\alpha(S_2-S_3)=k, \qquad S_2-S_1+\alpha(S_1-S_3)=k \tag{1.14}$$

Откуда следует, что $S_1=S_2=S_3+\alpha^{-1}k$. Как и в предыдущем случае, получаем, что система уравнений описывающая поведение среды при напряженном состоянии, соответствующем ребру (1.14), имеет вид

$$\sigma_{ij}=S_3\delta_{ij}+\alpha^{-1}k(\delta_{ij}-n_in_j)+qe_{ij}^p \tag{1.15}$$

$$e_{ij}^{p\cdot}n_j=e_{rs}^{p\cdot}n_rn_sn_i, \quad e_{ii}^{p\cdot}=0 \tag{1.16}$$

Скорости пластических деформаций при этом согласно ассоциированному закону течения имеют вид

$$e_{ij}^{p\cdot}=(\psi_1^\cdot+(\alpha-1)\psi_2^\cdot)l_il_j+((\alpha-1)\psi_1^\cdot+ \\ +\psi_2^\cdot)m_im_j-\alpha(\psi_1^\cdot+\psi_2^\cdot)n_in_j \tag{1.17}$$

Отметим, что скорости пластической деформации при решении краевых задач определяются без использования соотношений (1.12) на ребре (1.9) и (1.17) на ребре (1.14). Но соотношения (1.12) и (1.17) должны существенно учитываться. Из этих соотношений по известным из решения краевой задачи значениям $e_{ij}^{p\cdot}$ можно определить $\psi_1^\cdot$ и $\psi_2^\cdot$, положительность $\psi_1^\cdot$ и $\psi_2^\cdot$ является условием необходимым и достаточным, для того, чтобы напряженное состояние соответствовало предполагаемому ребру. Необходимость следует из ассоциированного закона течения, достаточность из теорем единственности, доказанных для сингулярных поверхностей текучести в [16].

Рассмотрим некоторые особенности поведения среды с поверхностью нагружения (1.4). Из соотношений (1.7) следует, что при простом нагружении в рассматриваемой среде нет единой диаграммы $\sigma_i\sim e_i$, более того, если $\alpha\neq\mathrm{const}$, а зависит от пластического деформирования, то при простом нагружении пластические деформации не будут изменяться пропорционально одному параметру. Простому нагружению будет соответствовать простое деформирование только при $\alpha=\mathrm{const}$. В настоящее время нам не известны эксперименты на изотропных материалах, в которых при пропорциональном нагружении возникало не пропорциональное деформирование, поэтому в дальнейшем полагаем $\alpha=\mathrm{const}$. Тогда соотношения ассоциированного закона течения, записанные в главных осях, можно проинтегрировать при любом пути нагружения. Если путь нагружения соответствует грани (1.5), то интегралы уравнений (1.7) имеют вид:

$$e_1^p=\psi, \qquad e_2^p=(\alpha-1)\psi, \qquad e_3^p=-\alpha\psi \tag{1.18}$$

Аналогично, интегралы соотношений ассоциированного закона течения при путях нагружения, протекающих на ребрах (1.9), (1.14), соответственно определяются выражениями

$$e_1^p=\psi_1+\psi_2, \quad e_2^p=(\alpha-1)\psi_1-\alpha\psi_2, \quad e_3^p=-\alpha\psi_1+(\alpha-1)\psi_2 \tag{1.19}$$

$$e_1^p=\psi_1+(\alpha-1)\psi_2, \quad e_2^p=(\alpha-1)\psi_1+\psi_2, \quad e_3^p=-\alpha(\psi_1+\psi_2) \tag{1.20}$$

Если направления главных осей в процессе нагружения остаются неизменными, то тензора σ_{ij}, e_{ij}^p, $e_{ij}^{p\cdot}$ соосны и соотношения (1.5), (1.9), (1.14) принимают вид:

$$\sigma_1-\sigma_2+\alpha(\sigma_2-\sigma_3)-k=2q\psi(\alpha^2-\alpha+1) \tag{1.21}$$

$$\begin{gathered}\sigma_1+\sigma_2(\alpha-1)-\alpha\sigma_3-k=q(2(\alpha^2-\alpha+1)\psi_1+(1+2\alpha-2\alpha^2)\psi_2)\\ \sigma_1+\sigma_3(\alpha-1)-\alpha\sigma_2-k=q((1+2\alpha-2\alpha^2)\psi_1+2(\alpha^2-\alpha+1)\psi_2)\end{gathered} \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_1+\sigma_2(\alpha-1)-\alpha\sigma_3-k=q(2(\alpha^2-\alpha+1)\psi_1+(\alpha^2+2\alpha-2)\psi_2) \\ &\sigma_1(\alpha-1)+\sigma_2-\alpha\sigma_3-k=q((\alpha^2+2\alpha-2)\psi_1+2(\alpha^2-\alpha+1)\psi_2) \end{aligned} \tag{1.23}$$

2. Для того, чтобы полностью закончить описание предлагаемой модели анизотропно упрочняющейся среды, необходимо указать каким образом функции материала $q(\varkappa)$, $k(\varkappa)$, $\alpha(\varkappa)$ можно получить с помощью данных эксперимента. Ограничимся описанием варианта модели, в котором $\alpha=\mathrm{const}$. В качестве параметра упрочнения возьмем параметр Одквиста, кинетическое уравнение для которого имеет вид

$$\varkappa^{\cdot}=(e_{ij}^{p\cdot}e_{ij}^{p\cdot})^{1/2} \tag{2.1}$$

При $\alpha=\mathrm{const}$ $q(\varkappa)$ и $k(\varkappa)$ можно определить из экспериментов на растяжение — сжатие или чистый сдвиг. При растяжении в пластическую область активные напряжения соответствуют ребру (1.9) поверхности нагружения $S_1-k=S_2=S_3$. Так как при этом $\sigma_2=\sigma_3=0$, $\sigma_1=\sigma_+$, то $e_2^p=e_3^p$ и $\psi_1=\psi_2$. Из условия пластической несжимаемости следует, что

$$e_2^p=e_3^p=-e_1^p/2 \tag{2.2}$$

Тогда соотношение (2.1) можно проинтегрировать

$$\varkappa=\sqrt{1{,}5}e_1^p=\sqrt{6}\psi_1 \tag{2.3}$$

Выражения (1.22) становятся одинаковыми и приобретают вид

$$3q(\varkappa)e_1^p=2(\sigma_+-k(\varkappa)) \tag{2.4}$$

После растяжения в пластическую область образец разгружают и деформируют сжатием в том же направлении $\sigma_1=\sigma_-$, $\sigma_2=\sigma_3=0$ до достижения поверхности нагружения, т. е. до ребра D:

$$S_2=S_3=S_1+\alpha^{-1}k \tag{2.5}$$

Используя выражение (2.2) перепишем (2.5) в виде

$$1{,}5q(\varkappa)e_1^p=\sigma_-+\alpha^{-1}k(\varkappa) \tag{2.6}$$

где e_1^p, σ_+, σ_- — определяются экспериментально, тогда для $\varkappa$, вычисленного с помощью (2.3), $q(\varkappa)$ и $k(\varkappa)$ определяются из следующих формул

$$\begin{aligned} &q(\varkappa)=2(\sigma_-\alpha+\sigma_+)/(3(\alpha+1)e_1^p) \\ &k(\varkappa)=\alpha(\sigma_+-\sigma_-)/(\alpha+1) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Из первой формулы (2.7) можно определить α при $\varkappa=0$:

$$\alpha=-\sigma_+(0)/\sigma_-(0), \qquad k(0)=\sigma_+(0) \tag{2.8}$$

При экспериментах на чистый сдвиг образец сначала закручивается в пластическую область, при этом активные напряжения соответствуют грани (1.5).

При кручении $\sigma_1=-\sigma_3=\tau_+$, $\sigma_2=0$, ассоциированный закон (1.18) приводит к значениям $e_2^p\neq0$. Отметим, что в экспериментах на кручение величина e_2^p как правило не измеряется, а измеряется величина

$$\gamma^p=e_1^p-e_3^p=(1+\alpha)\psi \tag{2.9}$$

Значение ψ определяется из (1.21) в виде

$$2q\psi=((\alpha-1)\tau_+-k)(\alpha^2-\alpha+1)^{-1}$$

С учетом (2.9) из (1.18) получаем связь между τ_+ и γ^p в виде

$$(\alpha+1)\tau_+-k(\varkappa)=2q(\varkappa)\gamma^p(\alpha^2-\alpha+1)/(\alpha+1) \tag{2.10}$$

Затем образец разгружают и закручивают в обратную сторону, при этом $\sigma_1=-\sigma_3=-\tau_-$, $\sigma_2=0$, т. е. напряжения достигают грани DE, уравнение которой имеет вид

$$S_3-S_2+\alpha(S_2-S_1)=k \tag{2.11}$$

Из (2.11) получаем, что обратное пластическое течение возникает при

$$\tau_-=[k(\varkappa)(\alpha-1)+q(\varkappa)\gamma^p(\alpha^2-4\alpha+1)]/(\alpha+1)^2 \qquad (2.12)$$

Параметр упрочнения $\varkappa$ с учетом (1.18), (2.1), (2.9) вычисляется по формуле

$$\varkappa=\gamma^p[2(\alpha^2-\alpha+1)]^{1/2}/(\alpha+1) \qquad (2.13)$$

в эксперименте измеряются γ^p, τ_+, τ_- и для каждого $\varkappa$, вычисленного по формуле (2.13), $q(\varkappa)$ и $k(\varkappa)$ вычисляются по формулам

$$q(\varkappa)=(\tau_+-\tau_-)/\gamma^p \qquad (2.14)$$

$$k(\varkappa)=[\tau_+(-\alpha^2+4\alpha-1)+2\tau_-(\alpha^2-\alpha+1)]/(\alpha+1)$$

Значения α можно вычислить из (2.14) при $\varkappa=0$, $k(0)=\sigma_s$ тогда

$$\alpha=\sigma_s/\tau_+(0)-1 \qquad (2.15)$$

По формулам (2.7), (2.8) и (2.14), (2.15) обработаны экспериментальные данные [5], полученные для стали 45 и сплава Д-16-Т. Ниже приведены вычисленные в МПа значения $q(\varkappa)$ и $k(\varkappa)$ для стали 45 ($\alpha=1$, $k(0)=327$ МПа)

$\varkappa$	0,0113	0,0141	0,0177	0,0233	0,0269	0,0339
q	5938	5950	5640	4546	4184	3938
k	323	323	341	370	367	397

Значения $q(\varkappa)$ и $k(\varkappa)$, вычисленные для сплава Д-16-Т ($\alpha=0{,}643$, $k(0)=137$ МПа), имеют вид

$\varkappa$	0,0005	0,0025	0,0109	0,0173	0,0270	0,0490
q	18155	8138	3822	2421	1942	1215
k	147	158	183	190	189	221

В [5] приведены эксперименты, проведенные на трубчатых образцах из стали 45 и сплава Д-16-Т. Нагружение осуществлялось по лучевым путям в плоскости σ, τ, где σ — растягивающее, τ — скручивающее напряжения, до значения $\sigma_i=(\sigma^2+3\tau^2)^{1/2}=\sigma^+$ для стали 45 σ^+ выбиралось $1{,}5\sigma_s$, для Д-16-Т — $\sigma^+=2{,}18\sigma_s$. Затем производилась разгрузка и нагружение противоположного знака по тому же лучу до достижения поверхности нагружения, когда $\sigma_i=\sigma^-$. При $\beta=10$, 20, 35, 40, 45, 50° ($\operatorname{tg}\beta=\tau/\sigma$) для стали 45 приведены значения $\lambda=\sigma^-/\sigma^+$. Значение λ_T вычислялось по предложенной теории с учетом приведенных данных, причем вычисления были проведены только для случаев, когда напряженное состояние соответствовало грани (1.5). Вычисления для ребра поверхности нагружения с достаточной степенью точности не проводились из-за большого шага экспериментальных данных по $\varkappa$, что не позволяет достигнуть разумной точности вычислений.

Значения λ_T получились следующие: $\lambda_T(35°)=0{,}366$, $\lambda_T(40°)=0{,}368$, $\lambda_T(45°)=0{,}373$, $\lambda_T(50°)=0{,}370$, экспериментальные данные [5]: $\lambda(35°)=0{,}440$, $\lambda(40°)=0{,}430$, $\lambda(45°)=0{,}425$, $\lambda(50°)=0{,}430$.

Полученное расхождение теоретических и экспериментальных данных находится в рамках точности эксперимента, проводимого на двух различных образцах. Необходимо отметить, что теория систематически дает заниженные данные для λ_T. Вычисления λ_T в [5] проведены с использованием поверхности нагружения Мизеса, в результате чего получены систематически завышенные значения λ_T. Для Д-16-Т вычисления удалось провести только для $\beta=20°$, значение $\lambda_T(20°)=0{,}7$, экспериментальное $\lambda=0{,}437$.

Необходимо отметить, что полученные расхождения теории и эксперимента соответствуют достаточно большим пластическим деформациям, когда происходит насыщение эффекта Баушингера.

Для меньших пластических деформаций следует ожидать уменьшения отклонения предложенной теории от опытных точек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А. Ю.* Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. мат. ж. 1954. Т. 6. № 3. С. 314–325.
2. *Прагер В.* Проблемы теории пластичности. М.: Физматгиз, 1958. 136 с.
3. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.* Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 78–89.
4. *Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.
5. *Талыпов Г. Б.* Пластичность и прочность стали при сложном нагружении. Л.: Изд-во ЛГУ, 1968. 134 с.
6. *Жуков А. М.* Прочность и пластичность сплава Д16Т при сложном напряженном состоянии // Изв. АН СССР. ОТН. 1954. № 6. С. 61–70.
7. *Жуков А. М.* Некоторые особенности поведения металлов при упруго-пластическом деформировании // Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 30–57.
8. *Жуков А. М.* Свойства сплава Д16Т при растяжении с кручением // Инж. сб. 1960. 29. С. 55–62.
9. *Коврижных А. М.* Вариант теории пластического течения, основанный на сдвиговом механизме деформирования // ПМТФ. 1982. № 6. С. 133–138.
10. *Коврижных А. М.* Пластическое деформирование упрочняющихся материалов при сложном нагружении // Инж. ж. МТТ. 1968. № 4. С. 140–146.
11. *Золочевский А. А.* Обоснование определяющих уравнений нелинейного деформирования материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию // ПМТФ. 1986. № 6. С. 139–143.
12. *Золочевский А. А., Склепус С. Н.* К теории пластичности с тремя инвариантами напряженного состояния // Изв. вузов. Машиностроение. 1987. № 5. С. 7–10.
13. *Sobotka Z.* Time measures and invariant functions in nonsymmetrical plasticity // Теоретична и приложна механика: 5 Нац. конгр. Варна, 1985. Докл. София; Бълг. АН. 1985. Кн. 1. С. 162–167.
14. *Бриджмен П. В.* Исследование больших пластических деформаций и разрыва. М.: Изд-во иностр. лит. 1955. 444 с.
15. *Prager W.* Finite plastic deformations // Rheology, theory and Applications/Ed. by Eirich F.), New York; 1956. V. 1. P. 63–96.
16. *Быковцев Г. И.* О теоремах единственности в теории течения упрочняющихся упругопластических тел // Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975. С. 84–91.

Владивосток, Куйбышев

Поступила в редакцию 15.XII.1987