МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1989

УДК 539.3

Н. Х. АРУТЮНЯН, Ю. Н. РАДАЕВ

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО КРУЧЕНИЯ

В теории упругого и упругопластического кручения призматических стержней доказано экстремальное свойство стержня кругового поперечного сечения, который оказывает максимальное сопротивление при закручивании на фиксированный угол ω по сравнению с любым другим сечением заданной площади A [1, 2]. В данной работе приводятся решения экстремальных задач упругопластического кручения о нахождении минимума (максимума) площади упругого ядра при фиксированных значениях крутки (крутящего момента и площади поперечного сечения). Исследуется задача минимизации площади упругого ядра при заданных значениях крутящего момента и площади поперечного сечения. Доказано, что задача является некорректной, так как ее решение неединственно. Формулируются достаточные условия, обеспечивающие единственность решения этой экстремальной задачи.

1. Задача о минимизации площади упругого ядра при заданной крутке. Рассмотрим призматический стержень, упругопластический материал которого характеризуется упругим модулем сдвига G и пределом текучести k. Через Ω обозначим односвязную область, занимаемую поперечным сечением стержня; $\gamma=\partial\Omega$ — гладкая выпуклая кривая, имеющая всюду конечную кривизну; l — длина контура γ; ω — угол закручивания на единицу длины скручиваемого стержня; $\varkappa=G\omega/k$ — приведенная крутка; A — площадь области Ω. Если величина приложенного крутящего момента M достаточно велика, то часть сечения стержня будет находиться в состоянии пластического течения. Пусть Ω' — упругое ядро сечения, Ω'' — зона пластического течения; A' и A'' площади соответствующих областей; $\gamma'=\partial\Omega'$ — упругопластическая граница.

Задача упругопластического кручения для призматического стержня [3] с сечением Ω, закрученного на угол ω, заключается в определении области $\Omega'\subset\Omega$ и функции $\varphi(x_1, x_2)$ (функции напряжений Прандтля), удовлетворяющей следующим условиям: $\varphi\in C^1(\Omega)$, φ принимает нулевое значение на γ, $|\nabla\varphi|=k$ в области Ω'', в области Ω' функция φ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta\varphi=-2G\omega$ при выполнении неравенства $|\nabla\varphi|<k$ в Ω. Особенность задачи упругопластического кручения, как и любой другой неодномерной упругопластической задачи, состоит в том, что положение границы, разделяющей упругую и пластическую зоны, неизвестно и должно быть определено в ходе решения граничной задачи. Поэтому, подобные задачи называют задачами со свободной границей, а упругопластическую границу — свободной границей. Известно [4], что свободная граница в задаче кручения является кусочно-аналитической жордановой кривой, если только контур γ является выпуклым аналитическим контуром (при условии полного охвата пластической зоной упругого ядра, свободная граница будет аналитической выпуклой кривой [5]).

Сформулируем следующую экстремальную задачу: среди всех сечений Ω, ограниченных выпуклыми аналитическими контурами и закрученных на заданный угол ω, при котором в сечениях Ω возникает пластическая зона, целиком охватывающая упругое ядро, определить такое сечение, для которого площадь упругого ядра достигала бы минимального значения.

Для оценки площади упругого ядра представим величину A' в зависимости от геометрических характеристик контура γ. Пусть $x_1=\lambda(s)$, $x_2=$

$=\mu(s)$, $0\leqslant s\leqslant l'$ — натуральные уравнения свободной границы γ'. Введем на контуре γ' два единичных векторных поля $\mathbf{n}(s)$ и $\mathbf{v}(s)$; $\mathbf{v}(s)$ — единичный вектор внутренней нормали к γ', $\mathbf{n}(s)$ имеет направление внутренней нормали к контуру сечения стержня γ и приложен в точке пересечения этой нормали с контуром γ'. Через $\theta(s)$ обозначим угол между векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$ (фиг. 1). Введем функцию кручения $\psi=\varphi/k+{}^1/_2\varkappa(x_1^2+x_2^2)$, ψ — гармоническая в области Ω' функция. Определим голоморфную в области Ω' функцию $\Psi(z)$, $z=x_1+ix_2$ условием $\psi=\operatorname{Re}\Psi$. Если γ — выпуклый аналитический контур и пластическая зона полностью охватывает упругое ядро, то из теорем о существовании решения краевой задачи кручения [6] и об аналитичности упругопластической границы γ' следует, что существует голоморфная в области Ω' функция $\Psi'(z)$ и аналитическая l' — периодическая функция $\theta(s)$ такие, что на контуре γ' справедливо равенство [7]:

$$\overline{\Psi'(z)}=ie^{i\theta(s)}dz/ds+\varkappa z\quad(z\in\gamma')\tag{1.1}$$

Отобразим конформно единичный круг $|\zeta|<1$ на односвязную область Ω' физической плоскости при помощи голоморфной функции $z=\omega(\zeta)$. Единичная окружность $\zeta=e^{i\vartheta}$ отображается при этом на свободную границу γ', следовательно, корректно определена функция $s=s(\vartheta)$. Обозначая $\theta(s(\vartheta))=\Theta(\vartheta)$, $\Psi'(\omega(\zeta))=F(\zeta)$, $\beta(\vartheta)=\Theta(\vartheta)+\arg\omega'(e^{i\vartheta})+\vartheta$ приведем граничное условие (1.1) к виду

$$F(e^{i\vartheta})=-\exp[-i\beta(\vartheta)]+\varkappa\overline{\omega(e^{i\vartheta})}\tag{1.2}$$

Необходимое и достаточное условие того, что функция в правой части граничного условия (1.2) является следом на единичной окружности голоморфной в единичном круге функции, можно сформулировать следующим образом [7]. Пусть

$$\omega(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n\zeta^n,\qquad \exp[i\beta(\vartheta)]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}a_re^{ir\vartheta}$$

соответственно ряд Тейлора функции $z=\omega(\zeta)$ и ряд Фурье функции $\exp[i\beta(\vartheta)]$. Отметим, что $\beta(\vartheta)-2\pi$ — периодическая аналитическая функция. Существование функции $F(\zeta)$, голоморфной при $|\zeta|\leqslant1$ с граничным условием (1.2) эквивалентно выполнению равенств [8]:

$$a_n=\varkappa\omega_n\quad(n=1,2,\ldots)\tag{1.3}$$

Таким образом, поскольку решение краевой задачи кручения существует и мы ограничиваемся случаем выпуклых аналитических контуров γ, для которых при заданном ω наблюдается полный охват, то существует аналитическая функция $\beta(\vartheta)$ такая, что если

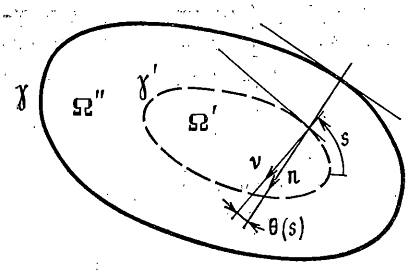
$$\exp[i\beta(\vartheta)]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}a_re^{ir\vartheta}$$

соответствующий ряд Фурье, то в силу (1.3) конформное однолистное отображение единичного круга $|\zeta|<1$ на область Ω' имеет следующий вид:

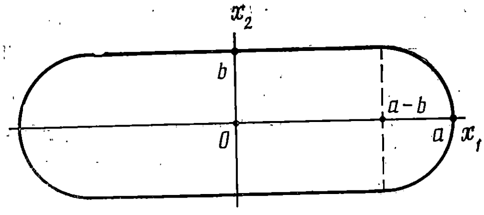
$$z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\varkappa}\zeta^n\tag{1.4}$$

Вычисляя площадь однолистного образа единичного круга $|\zeta|<1$ при отображении (1.4) получим [9]:

$$A'=\frac{\pi}{\varkappa^2}\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|^2\tag{1.5}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Когда ϑ пробегает отрезок $[0, 2\pi]$, то точка $\exp[i\beta(\vartheta)]$ пробегает один раз в положительном направлении окружность единичного радиуса. Площадь единичного круга с одной стороны равна π, а с другой стороны она равна [9] $\pi\Sigma r|a_r|^2$ (суммирование по r от $-\infty$ до ∞). Поэтому справедливо равенство:

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} r|a_r|^2=1 \tag{1.6}$$

Учитывая (1.5) и (1.6) выражение для площади упругого ядра представим в виде

$$A'=\frac{\pi}{\varkappa^2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} n|a_{-n}|^2\right) \tag{1.7}$$

Выражение (1.7) допускает оценку снизу

$$A'\geqslant\pi\varkappa^{-2} \tag{1.8}$$

Изопериметрическое неравенство (1.8) дает оценку снизу для площади упругого ядра при условии полного охвата, причем эта оценка не зависит от площади поперечного сечения стержня. Из решения упругопластической задачи для кругового сечения известно, что $\pi\varkappa^{-2}$ есть площадь упругого ядра. Следовательно, если взять стержень кругового сечения радиуса $R>\varkappa^{-1}$ и закрутить его на угол ω, то пластическая зона будет охватывать упругое ядро и площадь его будет минимальна по сравнению с любым другим сечением, контур которого является выпуклым и аналитическим и крутка ω вызывает полный охват. Однако, решение сформулированной экстремальной задачи не единственно, поскольку для любого кругового сечения радиуса R ($R>\varkappa^{-1}$) площадь упругого ядра будет достигать минимального значения, равного $\pi\varkappa^{-2}$. Для того, чтобы обеспечить единственность решения экстремальной задачи (и тем самым сделать постановку задачи корректной) достаточно наложить на сравниваемые сечения еще одно дополнительное условие: сечения сравнения должны иметь заданную площадь A ($A>\pi\varkappa^{-2}$). Однако изопериметрическое неравенство (1.8) сильнее, чем просто утверждение о том, что при фиксированных $\varkappa$ и A минимум площади упругого ядра (в условиях полного охвата) достигается для кругового сечения радиуса $(A/\pi)^{1/2}$.

В качестве примера рассмотрим сечение, ограниченное овалом Соколовского [3]: $x_1=[a+b(\cos 2\alpha+2)]\sin\alpha$, $x_2=-[a+b(\cos 2\alpha-2)]\cos\alpha$, $b>0$, $a\geqslant 3b$. Если $\varkappa\geqslant(a-b)(a+b)^{-1}(a-3b)^{-1}$, то наблюдается полный охват. Упругопластическая граница есть эллипс с полуосями $c_{1,2}=2b\{(4\varkappa b)^{-1}+[1+(4\varkappa b)^{-2}]^{1/2}\pm 1\}$. Для площади упругого ядра имеем оценку

$$A'={}^1/_2\pi\varkappa^{-2}\{1+[1+(4b\varkappa)^2]^{1/2}\}>\pi\varkappa^{-2}$$

не зависящую от величины площади сечения Соколовского.

2. Задача о максимуме площади упругого ядра при заданном моменте и площади поперечного сечения. Сформулируем следующие экстремальные задачи упругопластического кручения:

При заданной площади поперечного сечения A и фиксированном крутящем моменте M $(0<M<{}^2/_3\pi k(A/\pi)^{3/2})$ определить форму поперечного сечения скручиваемого стержня так, чтобы величина площади упругого ядра была максимальна.

Определить форму поперечного сечения призматического стержня так, чтобы при заданной площади упругого ядра A' соответствующий крутящий момент M был бы максимален по сравнению с любым другим сечением заданной площади A, закрученным так, что его упругое ядро имеет площадь A'.

Для решения поставленных задач воспользуемся изопериметрическим неравенством [2]:

$$M/(2k)\leqslant{}^1/_2 l\alpha^2-{}^2/_3\pi\alpha^3+\varkappa A'^2/(4\pi)+\alpha A' \tag{2.1}$$

$$\alpha=[l-(l^2-4\pi A+4\pi A')^{1/2}]/(2\pi)$$

Имеем следующую оценку:

$$(2k)^{-1}\left\{M-{}^2/_3\pi k\left(\frac{A}{\pi}\right)^{3/2}\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{A'}{A}\right)^{3/2}\right]\right\}\leqslant$$

$$\leqslant-\frac{1}{2}\left(\frac{A}{\pi}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{A}{\pi}\right)^{1/2}-\left(\frac{A'}{\pi}\right)^{1/2}\right][l-2(\pi A)^{1/2}]+\frac{A'^2}{4\pi}\left[\varkappa-\left(\frac{\pi}{A'}\right)^{1/2}\right]+\ldots \tag{2.2}$$

В правой части (2.2) не выписаны члены высшего порядка малости по отношению к разностям $l-(2\pi A)^{1/2}$ и $\varkappa-(\pi/A')^{1/2}$. Для определения знака приращения величины крутящего момента при варьировании контура γ необходимо оценить сверху отношение

$$[\varkappa-(\pi/A')^{1/2}][l-2(\pi A)^{1/2}]^{-1} \tag{2.3}$$

При стягивании контура γ к окружности радиуса $(A/\pi)^{1/2}$ отношение (2.3) становится неопределенным, так как решение краевой задачи упругопластического кручения непрерывно зависит от формы сечения стержня и кроме того для стержня кругового поперечного сечения имеем: $\varkappa=(\pi/A')^{1/2}$; $l=2(\pi A)^{1/2}$.

Двусторонняя оценка отношения (2.3) может быть дана следующим образом. Во-первых, отношение (2.3) неотрицательно, так как из изопериметрического неравенства (1.8) следует, что числитель выражения (2.3) неотрицателен, а знаменатель неотрицателен в силу классического изопериметрического неравенства [1]: $l^2\geqslant 4\pi A$. Докажем, что для любого выпуклого аналитического контура, ограничивающего область площади A, и расположенного в η-окрестности окружности радиуса $(A/\pi)^{1/2}$, справедлива оценка:

$$0<[\varkappa-(\pi/A')^{1/2}][l-2(\pi A)^{1/2}]<A^{1/2}/A'^{3/2} \tag{2.4}$$

Замечание. Контур γ расположен в η-окрестности окружности, если выполнены следующие условия:

максимум расстояния между окружностью и контуром γ, измеренного вдоль нормали к окружности, не превосходит η;

максимум угла, образованного касательной к окружности в точке P_0 и касательной к γ в точке P (точка P находится на пересечении нормали к окружности в точке P_0 с контуром γ), по абсолютной величине не превосходит η;

максимум разности кривизны окружности в точке P_0 и кривизны γ в точке P по абсолютной величине не превосходит η.

Допустим противное, то есть оценка сверху (2.4) не справедлива. Последнее означает, что существует последовательность контуров γ_n $(n=\overline{1,\infty})$, ограничивающих заданную площадь A (для определенности положим $A=\pi$), имеющих длины l_n и стягивающихся при $n\to\infty$ к единичной окружности, что

$$[\varkappa_n-(\pi/A')^{1/2}](l_n-2\pi)^{-1}>\pi^{1/2}/A'^{3/2} \tag{2.5}$$

для всех натуральных n; $\varkappa_n$ — значение приведенной крутки, при котором в сечении Ω_n возникает упругое ядро площади A'. В силу непрерывной зависимости решения задачи кручения от формы сечения имеем: $\varkappa_n \to (\pi/A')^{1/2}$ $(n\to\infty)$. Рассмотрим частное решение Соколовского [3]. Оно зависит от двух параметров, которыми можно распорядиться таким образом, чтобы последовательность овалов Соколовского C_n имела длины $l_n^{(c)}=l_n$ и каждый из них ограничивал бы площадь π. Пусть $\varkappa_n^{(c)}$ — значение приведенной крутки, при которой в сечении с границей C_n возникает упругое ядро площади A'. Выделим подпоследовательность n_p $(p=\overline{1, \infty})$ такую, что $\varkappa_{n_p} \leqslant \varkappa_{n_p}^{(c)}$ $(p=\overline{1, \infty})$. Тогда справедлива оценка:

$$0<\frac{\varkappa_{n_p}-(\pi/A')^{1/2}}{l_{n_p}-2\pi} \leqslant \frac{\varkappa_{n_p}^{(c)}-(\pi/A')^{1/2}}{l_{n_p}^{(c)}-2\pi} \quad (p=\overline{1, \infty}) \tag{2.6}$$

Если взять параметрические уравнения овала Соколовского в форме $x_1=[a+b(\cos 2\alpha+2)]\sin\alpha$, $x_2=-[a+b(\cos 2\alpha-2)]\cos\alpha$, то при условии, что заданы величины $A=\pi$ и A' получим: предел отношения при $p\to\infty$ в правой части двойного неравенства (2.6) существует, если существует предел при $b\to 0+$ отношение Q_1/Q_2, где

$$Q_1=2\pi^{3/2}b^2/A'^{3/2}$$

$$Q_2=\int_0^{2\pi}\left\{\left[1+\frac{21}{2}b^2-6b\left(1+\frac{3}{2}b^2\right)^{1/2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left[12b\left(1+\frac{3}{2}b^2\right)^{1/2}-20b^2\right]\cos^2\alpha+20b^2\cos^4\alpha\right]^{1/2}-1\right\}d\alpha$$

причем значения обоих пределов будут равны. Исследование последнего отношения при $b\to 0+$ показывает, что оно имеет предел, значение которого меньше $(\pi/A'^3)^{1/2}$. Точное значение предела равно $^4/_7(\pi/A'^3)^{1/2}$. Следовательно, существует такой номер p_0, что

$$0<[\varkappa_{n_p}-(\pi/A')^{1/2}](l_{n_p}-2\pi)^{-1}<(\pi/A'^3)^{1/2} \tag{2.7}$$

для всех номеров $p\geqslant p_0$. Неравенства (2.5) и (2.7) противоречат друг другу, следовательно, утверждение о справедливости оценки (2.4) доказано.

Неравенства (2.2) и (2.4) показывают, что при отклонении контура γ от окружности крутящий момент (при изопериметрических условиях на площадь поперечного сечения и площадь упругого ядра) может лишь уменьшаться. Таким образом имеем следующие изопериметрические неравенства:

$$M\leqslant {}^2/_3\pi k(A/\pi)^{3/2}[1-{}^1/_4(A'/A)^{3/2}]$$

$$A'\leqslant\pi[4(A/\pi)^{3/2}-6M/(\pi k)]^{2/3}$$

которые дают решение сформулированных выше задач. В частности, при заданной площади поперечного сечения стержня A и фиксированном крутящем моменте M в круглом поперечном сечении возникает упругое ядро максимальной площади.

Отметим, что если γ стягивается к окружности радиуса $(A/\pi)^{1/2}$, то разности $\varkappa-(\pi/A')^{1/2}$ и $l-2(\pi A)^{1/2}$ являются бесконечно малыми одного и того же порядка:

$$\varkappa-(\pi/A')^{1/2}=O(l-2(\pi A)^{1/2})$$

Более того, приводятся возможные значения констант, ограничивающих снизу и сверху отношение указанных бесконечно малых разностей (см. (2.4)). Подчеркнем, что неравенство (2.4) достаточно доказать для некоторого частного решения задачи упругопластического кручения, такого, чтобы контур сечения стержня содержал два независимых параметра (при некоторых значениях этих параметров сечение должно быть круговым). С этой целью выше было использовано решение Соколовского.

3. Задача о минимизации площади упругого ядра. Рассмотрим экстремальную задачу о минимизации площади упругого ядра, если заданы площадь поперечного сечения стержня A и крутящий момент M $(0<M<{}^2/_3\pi k(A/\pi)^{3/2})$. Для заданной величины крутящего момента M, удовлетворяющей указанному выше неравенству, можно подобрать бесконечно много сечений площади A, предельный крутящий момент которых в точности равен M. Зафиксируем два таких сечения Ω^* и Ω^{**}; $\gamma^*=\partial\Omega^*$, $\gamma^{**}=\partial\Omega^{**}$ — аналитические выпуклые контуры. Пусть последовательности контуров $\{\gamma_n^*\}$, $\{\gamma_n^{**}\}$, $n=\overline{1,\infty}$, каждый из которых ограничивает область площади A и $(M_*)_n<M$, $(M_{**})_n<M$, стягиваются соответственно к γ^* и γ^{**}. По теореме об устойчивости краевой задачи упругопластического кручения [10] получаем $(A_n')^*\to(A')^*$, $(A_n')^{**}\to(A')^{**}$ $(n\to\infty)$, где $(A_n')^*$, $(A_n')^{**}$ — площади упругих зон, которые возникают в сечениях с границами γ_n^*, γ_n^{**} соответственно при закручивании моментом M. Так как $(A')^*=0$ и $(A')^{**}=0$, то $\inf A'=0$ при фиксированных значениях A и M, причем нижняя грань A' достигается как для сечения γ^*, так и для сечения γ^{**}. Сформулированная экстремальная задача является некорректной в том смысле, что точная нижняя грань величин A' достигается для бесконечного множества сечений, то есть решение задачи неединственно. Однако экстремальная задача о минимизации площади упругого ядра допускает корректную постановку, обеспечивающую единственность ее решения.

Сформулируем эту экстремальную задачу: минимизировать площадь упругого ядра при заданных значениях площади поперечного сечения стержня A и крутящего момента M $(0<M<{}^2/_3\pi k(A/\pi)^{3/2})$, так, чтобы и периметр сечения был минимален (ограничимся рассмотрением только таких поперечных сечений, контуры которых являются симметричными относительно осей x_1, x_2, гладкими, замкнутыми кривыми с четырьмя вершинами).

Точная нижняя грань величин A' в этом случае также равна нулю, но достигается она для сечения единственной формы. Определим экстремальный контур. Пусть $x_2=Z(x_1)$ — координатное представление той части контура γ, которая расположена в первом квадранте плоскости x_1, x_2. Через a и b будем обозначать большую и малую полуоси контура γ; σ — натуральный параметр вдоль γ, $K(\sigma)$ — кривизна контура γ, как функция натурального параметра (будем предполагать, что $K(\sigma)$ кусочнонепрерывная функция σ). Предельный момент для сечения с границей γ равен ($h(\sigma)$ — расстояние вдоль нормали к γ от контура γ до линии разрыва напряжений [3]):

$$\frac{M_*(\gamma)}{2k}=\oint\limits_{\gamma}\left[\frac{1}{2}h^2(\sigma)-\frac{1}{3}K(\sigma)h^3(\sigma)\right]d\sigma \tag{3.1}$$

Так как для рассматриваемого класса контуров γ линия разрыва напряжений представляет собой отрезок, соединяющий фокальные точки γ (ось x_1 выбрана таким образом, чтобы этот отрезок лежал на оси x_1), то преобразуя контурный интеграл (3.1) к линейному, получим:

$$\frac{M_*(\gamma)}{2k}=4\int\limits_0^a Z^2\left[\frac{1}{2}(1+Z'^2)^{1/2}+\frac{1}{3}ZZ''(1+Z'^2)^{-1/2}\right]dx_1 \tag{3.2}$$

При этом предполагается, что Z' непрерывна, а Z'' может иметь конечное число точек разрыва первого рода. Разбивая интеграл (3.2) на сумму интегралов по отрезкам непрерывности функции Z'' и интегрируя каждый из интегралов по частям получим (внеинтегральные члены исчезают):

$$\frac{M_*(\gamma)}{2k}=2\int\limits_0^a Z^2\{(1+Z'^2)^{1/2}-Z'^2(1+Z'^2)^{-1/2}-Z'\ln[Z'+(1+Z'^2)^{1/2}]\}dx_1 \tag{3.3}$$

Необходимо найти функцию $x_2=Z(x_1)$, реализующую минимум функционала

$$J(Z)=\int\limits_0^a (1+Z'^2)^{1/2}\,dx_1$$

при изопериметрических условиях:

$$^1/_4A=\int\limits_0^a Z(x_1)\,dx_1 \qquad (3.4)$$

$$\frac{M}{2k}=2\int\limits_0^a Z^2\{(1+Z'^2)^{3/2}-Z'^2(1+Z'^2)^{1/2}-Z'\ln[Z'+(1+Z'^2)^{1/2}]\}dx_1 \qquad (3.5)$$

и подвижных концах, которые могут перемещаться по осям координат.

Таким образом имеем классическую изопериметрическую задачу с подвижными границами. Введем множители Лагранжа λ_1, λ_2 и интегрируя один раз уравнение Эйлера получим:

$$(1+Z'^2)^{-1/2}-\lambda_1 Z^2(1+Z'^2)^{1/2}-\lambda_2 Z=c \qquad (3.6)$$

Граничные условия и условия трансверсальности на подвижных концах дают: $c=0$, $Z'(0)=0$, $Z(0)=b$, $Z(a)=0$ (a и b должны быть определены по изопериметрическим условиям (3.4), (3.5)).

Можно доказать, что дважды непрерывно дифференцируемого решения уравнения Эйлера, удовлетворяющего необходимым граничным условиям и условиям трансверсальности не существует. Однако непосредственной подстановкой в уравнение (3.6) и условия на концах можно убедиться, что функция $Z(x_1)$, равная b на сегменте $0\leqslant x_1\leqslant a-b$ и определяемая формулой $[b^2-(x_1-a+b)^2]^{1/2}$ на полусегменте $a-b<x_1\leqslant a$, удовлетворяет всем необходимым условиям. При этом построенное решение единственное, удовлетворяющее всем требуемым условиям гладкости, выпуклости, граничным условиям и условиям трансверсальности. Экстремаль является гладкой и составляется из отрезков прямых и дуг окружностей (фиг. 2). В точке $x_1=a-b$ экстремаль имеет скачок кривизны.

Для определения полуосей a и b имеем систему уравнений: $A=4b(a-b)+\pi b^2$, $M/(2k)={}^1/_3\pi b^3+2b^2(a-b)$. В частности для определения малой полуоси b получается кубическое уравнение:

$$^1/_3b^3-(A/\pi)b+M/(k\pi)=0$$

т. е. полуось b выражается через кубические радикалы от заданных величин A и M.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз. 1962. 336 с.
2. *Арутюнян Н. Х., Радаев Ю. Н.* Оптимальные задачи упругопластического кручения // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 117–125.
3. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
4. *Friedman A.* Free boundaries in elastic-plastic problems // ZAMM. 1981. Bd. 61, H. 4. S. T2–T8.
5. *Ting T. W.* Elastic-plastic torsion of convex cylindrical bars // J. Math. and Mech. 1969. V. 19, № 6. P. 531–551.
6. *Галин Л. А.* О существовании решения упруго-пластической задачи кручения призматических стержней // ПММ. 1949. Т. 13, вып. 6. С. 650–654.
7. *Арутюнян Н. Х., Радаев Ю. Н.* Упругопластическое кручение призматических стержней // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. № 3. С. 563–566.
8. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М.: Наука, 1968. 648 с.
9. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 1. М.: Наука. 1978. 391 с.
10. *Михлин С. Г.* Об устойчивости решений односторонних вариационных задач; приложения к теории пластичности // Зап. научн. семинаров. ЛОМИ. 1980. Т. 102. С. 68–101.

Москва

Поступила в редакцию
25.III.1988