МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1989

УДК 539.3

К. Ш. МКРТЧЯН

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОВЕРХНОСТНОЙ КАСАТЕЛЬНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ СИЛЫ

Установившиеся гармонические колебания для бесконечной упругой анизотропной среды изучены в [1, 2]. В настоящей работе рассматриваются установившиеся гармонические колебания в трансверсально-изотропной полуплоскости, возбуждаемой поверхностной касательной гармонической силой. Получены аналитические представления для амплитуд квазипродольных, квазипоперечных и рэлеевских волн в дальней от источника зоне.

1. Пусть на границе анизотропной полуплоскости действует касательная гармоническая сила $\delta(x)e^{-i\omega t}$, направленная по оси x. Будем рассматривать решения вида (здесь и всюду далее $n=1,3$): $u^{(n)}(x,z,t)=u_n(x,z)e^{-i\omega t}$. Функции u_1 и u_3 должны удовлетворять следующей системе уравнений и граничных условий:

$$c_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+c_2\frac{\partial^2 u_3}{\partial x\,\partial z}+c_3\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}+\rho\omega^2 u_1=0 \tag{1.1}$$

$$c_3\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+c_2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial z}+c_4\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}+\rho\omega^2 u_3=0$$

$$\begin{gathered} z=0:\quad (c_2-c_3)\partial u_1/\partial x+c_4\partial u_3/\partial z=0 \\ c_3(\partial u_1/\partial z+\partial u_3/\partial x)=-\delta(x) \end{gathered} \tag{1.2}$$

Предполагается, что коэффициенты уравнений (1.1) c_i ($i=1,\ldots,4$), которые выражаются через упругие постоянные среды, удовлетворяют условиям строгой гиперболичности и положительной определенности упругой энергии [3]:

$$\begin{gathered} -2(\alpha\beta)^{1/2}<\gamma<1+\alpha\beta,\quad \alpha=c_3/c_1 \\ \beta=c_3/c_4,\quad \gamma=1+\alpha\beta-c_2^2/(c_1c_4) \end{gathered} \tag{1.3}$$

Рассмотрим случай $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$. К данному типу сред относятся, например, трансверсально-изотропные среды. Методом преобразования Фурье с параметром σ по переменной x построим решение уравнения (1.1), которое при $x^2+z^2\to\infty$ представляет уходящую волну при определенных граничных условиях. Для перемещений получаем выражения

$$\begin{gathered} u^{(1)}(x,z,t)=\frac{e^{-i\omega t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{2}(-1)^m i\sigma c_2\gamma_1\gamma_2 v_m(\sigma)\,d\sigma \\ u^{(3)}(x,z,t)=\frac{e^{-i\omega t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{2}(-1)^m\gamma_{3-m}(c_1\sigma^2-c_1k_1^2-c_3\gamma_m^2)v_m(\sigma)\,d\sigma \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$v_m(\sigma)=\Delta^{-1}(\sigma)(c_3c_4\gamma_{3-m}^2+c_1c_4k_1^2-L\sigma^2)\exp[\lambda_m(\sigma)]$$

$$\lambda_m(\sigma)=-i(\sigma x-i\gamma_m(\sigma)z),\ \Delta(\sigma)=i\sigma c_2c_3(\gamma_1-\gamma_2)(c_1/c_4)^{1/2}(\sigma^2-k_1^2)^{1/2}R(\sigma)$$

$$R(\sigma)=\{\sigma^2[c_1c_4-(c_2-c_3)^2]-c_1c_4k_1^2\}(\sigma^2-k_2^2)^{1/2}-c_3(c_1c_4)^{1/2}k_2^2(\sigma^2-k_1^2)^{1/2}$$

$$\gamma_m(\sigma)=\{[Z(\sigma)+(-1)^{m+1}U^{1/2}(\sigma)]/2\alpha\}^{1/2}$$

$$Z(\sigma)=\sigma^2\gamma-k_2^2\alpha(1+\beta),\ L=c_1c_4-c_2(c_2-c_3)$$

$$U(\sigma)=Z^2(\sigma)-4\alpha\beta(\sigma^2-k_1^2)(\sigma^2-k_2^2)$$

$$k_1^2=\rho\omega^2/c_1,\ k_2^2=\rho\omega^2/c_3$$

Здесь и всюду далее $m=1, 2$. Функция $R(\sigma)$ имеет только два вещественных корня [4].

Приступим к исследованию функций $\gamma_m(\sigma)$. Отметим, что $\pm k_3$, $\pm k_4$ точки ветвления второго порядка для внутреннего радикала в выражениях для фукций $\gamma_m(\sigma)$, причем

$$\pm k_{m+2}=\pm\alpha^{1/2}k_2^2M_1^{-1/2}[M_2+(-1)^{m+1}T^{1/2}]^{1/2}$$

$$M_1=\gamma^2-4\alpha\beta,\ M_2=\gamma(1+\beta)-2\beta(1+\alpha),\ M_3=(1+\beta)$$

$$T=M_2^2-M_1M_3=4\alpha c_3^2c_4^{-2}[(\alpha+\beta)-\gamma]$$

При $Z(\pm k_1)<0$, $Z(\pm k_2)>0$ точки $\pm k_1$, $\pm k_2$ будут соответственно точками ветвления второго порядка для внешнего радикала в выражениях для функций $\gamma_m(\sigma)$.

Следовательно, имеют место разложения

$$\gamma_m(\sigma)=a_m^{\pm}(\sigma\pm k_m)^{1/2}+\ldots,\ (\sigma-k_m)^{1/2}=-i(k_m-\sigma)^{1/2}$$

$$(-\sigma-k_m)^{1/2}=-i(\sigma+k_m)^{1/2},\ a_m^-=[(-1)^m2k_m\beta(k_2^2-$$
$$-k_1^2)/Z(k_m)]^{1/2},\ Z(k_1)=k_1^2[\gamma-k_2^2\alpha(1+\beta)]$$

$$Z(k_2)=k_2^2[\gamma-\alpha(1+\beta)],\ a_m^+=-ia_m^-$$

Из (1.3) и (1.4) следует, что эти разложения верны только при значениях γ из интервала $(\alpha(1+\beta), 1+\alpha\beta)$, где $\alpha(1+\beta)$ определяется из уравнения $Z(k_2)=0$. При $\gamma=\alpha(1+\beta)$ точки $\pm k_2=\pm k_4$ являются точками ветвления четвертого порядка для $\gamma_m(\sigma)$, а точки $\pm k_1$ остаются точками ветвления второго порядка для $\gamma_1(\sigma)$. Значит

$$\gamma_m(\sigma)=b_m^{\pm}(\sigma\pm k_2)^{1/4}+\ldots,\ (\sigma-k_2)^{1/4}=e^{-i\pi/4}(k_2-\sigma)^{1/4}$$

$$(-\sigma-k_2)^{1/4}=e^{-i\pi/4}(k_2+\sigma)^{1/4},\ b_2^-=e^{-i\pi/4}b_1^+$$

$$b_2^+=-ib_1^+,\ b_1^-=e^{i\pi/4}b_1^+,\ b_1^+=\alpha^{1/4}[4k_2\beta(k_2^2-k_1^2)]^{1/4}$$

Поскольку $Z(k_2)=0$ при $\gamma=\alpha(1+\beta)$, то отсюда следует, что $Z(k_1)<0$, $Z(k_2)<0$ при $-2(\alpha\beta)^{1/2}<\gamma<\alpha(1+\beta)$. Это означает, что $\gamma_2(\sigma)$ точек ветвления не имеет, а для функции $\gamma_1(\sigma)$ точки $\pm k_1$, $\pm k_2$ будут точками ветвления второго порядка. Следовательно

$$\gamma_1(\sigma)=d_m^{\pm}(\sigma\pm k_m)^{1/2}+\ldots,\ d_m^+=-id_m^-$$

$$d_m^-=[2k_m\beta(k_1^2-k_2^2)/Z(k_m)]^{1/2}$$

Зная особые точки функций $\gamma_m(\sigma)$ при разных значениях γ, методом Лайтхилла [5] можно получить асимптотические ряды для перемещений при $z=0$:

1°. $\alpha(1+\beta)<\gamma<1+\alpha\beta$

$$u^{(n)}(x, 0, t)=A^{(n)}E+(A_nE_1+B_nE_2)|x|^{-3/2}/2\sqrt{\pi}+o(|x|^{-5/2}) \qquad (1.5)$$

2°. $\gamma=\alpha(1+\beta)$

$$u^{(1)}(x, 0, t)=A^{(1)}E+A_1E_1|x|^{-3/2}/2\sqrt{\pi}-$$
$$(1.6)$$

$$-{}^{3}/_{4}Ci\Gamma({}^{3}/_{4})E_3|x|^{-7/4}/\sqrt{2\pi}+o(|x|^{-7/4})$$

$$u^{(3)}(x,0,t)=A^{(3)}E+(A_3E_1+B_3E_2)|x|^{-3/2}/2\sqrt{\pi}+o(|x|^{-5/2})$$

$$A^{(1)}=[ic_4(\sigma_R{}^2-k_2{}^2)^{1/2}(\gamma_1(\sigma_R)+\gamma_2(\sigma_R))][R'(\sigma)]^{-1}|_{\sigma=\sigma_R}$$

$$A^{(3)}=\sigma_R[(c_2-c_3)(\sigma_R{}^2-k_2{}^2)^{1/2}-(c_1c_4)^{1/2}(\sigma_R{}^2-k_1{}^2)^{1/2}][R'(\sigma)]^{-1}|_{\sigma=\sigma_R}$$

$$E=\exp[-i(\omega t-\sigma_R|x|)],\ E_m=\exp[-i(\omega t-k_m|x|-\pi/4)]$$

$$E_3=\exp[-i(\omega t-k_2|x|-\pi/8)],\ B_1=-2i(c_3k_2a_2{}^-)^{-1}$$

$$B_3=\sqrt{2c_3}{}^{-2}(c_1c_4)^{-1/2}[c_4(c_1-c_4)-c_2(c_2-c_3)][k_2(k_2{}^2-k_1{}^2)]^{-1/2}$$

$$A_1=ic_4[2c_1{}^2k_1{}^2-(c_2-c_3)^2a_1{}^-][k_1{}^2(c_2-c_3)^4a_1{}^-]^{-1}$$

$$A_3=i(2c_1c_4)^{1/2}(c_3-c_1-c_2)(c_3-c_2)^{-2}[k_1(k_2{}^2-k_1{}^2)]^{-1/2}$$

$$C=-c_1{}^{-1/2}c_4{}^{1/2}(b_1{}^-+b_2{}^-)[2k_2(k_2{}^2-k_1{}^2)]^{-1/2}/(c_3k_2)$$

Здесь σ_R — корень уравнения Рэлея $R(\sigma)=0$, а R' — производная функции R. Результаты для $-2(\alpha\beta)^{1/2}<\gamma<\alpha(1+\beta)$ не приводятся ввиду их громоздкости.

Члены рядов (1.5) убывают как $|x|^{-5/2}$. Первые члены этих рядов представляют волны Рэлея, распространяющиеся от источника возмущений с фазовой скоростью c_R и с амплитудой, не зависящей от x. Вторые члены рядов (1.5) представляют квазипродольные волны, распространяющиеся с фазовой скоростью $c_a=(c_1/\rho)^{1/2}$. Третьи члены представляют квазипоперечные волны, распространяющиеся от точки возмущения с фазовой скоростью $c_b=(c_3/\rho)^{1/2}$. Амплитуды этих колебаний пропорциональны $|x|^{-3/2}$. Отметим, что интервалу $-2(\alpha\beta)^{1/2}<\gamma\leqslant\alpha(1+\beta)$ соответствуют среды, фронты волн в которых характеризуются остроугольными кромками (лакунами) на оси x [3, 6]. Чем дальше значение γ лежит от значения $\alpha(1+\beta)$, тем лакуны больше по величине. При $\gamma=\alpha(1+\beta)$ лакуны превращаются в точки на оси x. Члены первого ряда (1.6) убывают как $|x|^{-9/4}$, а амплитуда квазипоперечной волны пропорциональна $|x|^{-7/4}$, которое является существенным эффектом анизотропии.

2. Представляет интерес также получение асимптотических формул, когда $z\neq0$. Для этого случая без ограничения общности можно считать $x>0$, $z>0$. Исследуем критические точки функций $\lambda_m(\alpha_m)$ (1.4), т. е. нули функций $\lambda_m^{(j)}$ ($j=1, 2, \ldots$), (где $\lambda_m^{(j)}$ производное j-й степени функции λ_m), которые должны удовлетворять при каждом θ уравнению

$$\operatorname{tg}\theta=(id\gamma_m/d\alpha_m)^{-1},\quad \alpha_m=\sigma_m+i\tau_m \tag{2.1}$$

$$id\gamma_m/d\alpha_m=(-1)^m\alpha_m[\gamma\gamma_m{}^2-\beta(2\alpha_m{}^2-k_1{}^2-k_2{}^2)][i\gamma_mU^{1/2}(\alpha_m)]^{-1}$$

Отсюда следует, что рассматриваемые уравнения будут иметь решения только при вещественных $id\gamma_m/d\alpha_m$.

В зависимости от значений γ рассмотрим следующие случаи.

1°. $\gamma_*<\gamma<1+\alpha\beta$. В этом случае волновые фронты имеют четыре лакуны, расположенные между осями координат (x, z) [3, 6]. Величина γ_* является корнем уравнения

$$[3(1+\beta)P-(1-\beta)\gamma-2\beta(1+\alpha)][(1-\beta)P+Q]^{1/2}+$$
$$+2[(1+\beta)P-(1-\beta)\gamma][2(1-\beta)P]^{1/2}=0$$
$$P=(\gamma^2-4\alpha\beta)^{1/2},\quad Q=2\beta(1-\alpha)-\gamma(1-\beta)$$

Можно показать, что $\lambda_2{}^{(2)}(\alpha_2)=0$ при $\alpha_2=\alpha_{20}'$ и $\alpha_2=\alpha_{20}''$, где α_{20}' и α_{20}'' определяются из условия $\gamma_2{}^{(2)}(\alpha_2)=0$. Каждому значению θ из интервала (θ_*, θ_{**}) соответствуют три нулевые точки $\alpha_{20}^{(k)}$ ($k=1, 2, 3$) функции $\lambda_2{}^{(1)}(\alpha_2)$, определяемые из уравнения (2.1). Концы интервала определяются выражением $\operatorname{arctg}(id\gamma_2/d\alpha_2)^{-1}$ при $\alpha_2=\alpha_{20}'$ для θ_* и $\alpha_2=\alpha_{20}''$ для θ_{**}. Остальным значениям θ из интервала $(0, \pi/2)$ соответствует одна нулевая точка функции $\lambda_2{}^{(1)}(\alpha_2)$ и каждому значению θ из интервала $(0, \pi/2)$ соответствует одна нулевая точка функции $\lambda_1{}^{(1)}(\alpha_1)$.

2°. $\gamma=\gamma_*$. Лакуны превращаются в точку, следовательно, $\alpha_2=\alpha_{20}'''=\alpha_{20}'=\alpha_{20}''$ будет нулевой точкой для функции $\lambda_2^{(3)}(\alpha_2)$. Можно показать, что $\lambda_2^{(4)}(\alpha_{20}''')\neq 0$, α_{20}''' определяются из условия $\gamma_2^{(3)}(\alpha_2)=0$.

Критические точки функций $\lambda_m(\alpha_m)$ при остальных значениях γ из интервала $(-2(\alpha\beta)^{1/2}, \gamma_*)$ исследуются аналогичным способом.

Проанализируем волновое поле в дальней зоне. Зная критические точки функций $\lambda_m(\alpha_m)$ и применяя к (1.4) метод стационарной фазы [7], получим

1°. $\gamma_*<\gamma<1+\alpha\beta$

а) $0<\theta<\theta_*$

$$u^{(n)}(r,\theta,t)=\sum_{m=1}^{2} A_n^{(m)}(\alpha_{m0})F_m(\alpha_{m0})[r\lambda_m^{(2)}(\alpha_{m0})]^{-1/2}+o(r^{-3/2})\qquad(r\to\infty)$$

Здесь использована полярная система координат $x=r\cos\theta$, $z=r\sin\theta$, $r=(x^2+z^2)^{1/2}$.

б) $\theta=\theta_*$

$$u^{(n)}(r,\theta,t)=A_n^{(1)}(\alpha_{10})F_1(\alpha_{10})[r\lambda_1^{(2)}(\alpha_{10})]^{-1/2}+$$
$$+A_n^{(2)}(\alpha_{20}')F_3[r|\lambda^{(3)}(\alpha_{20}')|]^{-1/3}+o(r^{-2/3})\quad(r\to\infty)$$

в) $\theta_*<\theta<\theta_{**}$

$$u^{(n)}(r,\theta,t)=A_n^{(1)}(\alpha_{10})F_1(\alpha_{10})[r\lambda_1^{(2)}(\alpha_{10})]^{-1/2}+$$
$$+\sum_{k=1}^{3} A_n^{(2)}(\alpha_{20}^{(k)})F_2(\alpha_{20}^{(k)})[r\lambda_2^{(k)''}(\alpha_{20}^{(k)})]^{-1/2}+o(r^{-3/2})\qquad(r\to\infty)$$

Отметим, что в случае $\theta=\theta_{**}$ и $\theta_{**}<\theta<\pi/2$ асимптотические формулы имеют почти аналогичный вид.

2°. $\gamma=\gamma_*$. В рассмотренном случае лакуна превращается в точку

а) $0<\theta\neq\theta_*<\pi/2$

$$u^{(n)}(r,\theta,t)=\sum_{m=1}^{2} A_n^{(m)}(\alpha_{m0})[r\lambda_m^{(2)}(\alpha_{m0})]^{-1/2}+o(r^{-3/2})\qquad(r\to\infty)$$

б) $\theta=\theta_*$

$$u^{(n)}(r,\theta,t)=A_n^{(1)}(\alpha_{10})F_1(\alpha_{10})[r\lambda_1^{(2)}(\alpha_{10})]^{-1/2}+$$
$$+A_n^{(2)}(\alpha_{20}''')F_4(\alpha_{20}''')[r\lambda_2^{(4)}(\alpha_{20}''')]^{-1/4}+o(r^{-3/4})\qquad(r\to\infty)$$

В приведенных формулах

$$F_3=\Gamma(1+1/3)3^{5/6}2^{1/3}\exp[-i(\omega t+\lambda_2(\alpha_{20}')r)]$$
$$F_m(\lambda)=\exp[-i(\omega t+\lambda_m(\alpha_{m0})r+\pi/4\,\mathrm{sign}\,\lambda_m^{(2)}(\alpha_{m0}))]$$
$$F_4=\Gamma(1+1/4)2^{7/4}3^{1/4}\exp[-i(\omega t+\lambda_2(\alpha_{20}''')r+1/8\pi\,\mathrm{sign}\,\lambda_2^{(4)}(\alpha_{20}''')]$$
$$A_1^{(m)}(\lambda)=(-1)^m ic_2\lambda\gamma_1(\lambda)\gamma_2(\lambda)\varkappa(\lambda)$$
$$A_3^{(m)}(\lambda)=(-1)^m\gamma_{3-m}(\lambda)[c_1\lambda^2-c_1k_1^2-c_3\gamma_m^2(\lambda)]\varkappa(\lambda)$$
$$\varkappa(\lambda)=[c_3c_4\gamma_{3-m}^2(\lambda)+c_1c_4k_1^2-L\lambda^2][(2\pi)^{1/2}\Delta(\lambda)]^{-1}$$

Полученные соотношения позволяют определить амплитуды квазипродольных и квазипоперечных волн для средних точек анизотропной полуплоскости. Следует отметить, что по особым направлениям (когда лакуны превращаются в точку между осями координат (x, z) квазипоперечные волны имеют порядок $r^{-1/4}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Будаев В. С.* Об одном классе решений для системы уравнений в частных производных второго порядка динамики упругих анизотропных сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 5. С. 127–135.
2. *Розе С. Н.* Внешняя задача теории упругости в случае однородной анизотропной среды // Изв. вузов. Математика. 1968. № 5. С. 71–79.
3. *Будаев В. С.* Корни характеристического уравнения и классификация упругих анизотропных сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 33–40.
4. *Свекло В. А.* Упругие колебания анизотропного тела // Учен. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. 1949. № 114. Вып. 17. С. 28–71.
5. *Lighthill M. J.* An introduction to Fourier analysis and generalized functions. Cambridge: Univ. Press, 1958. 79 p.
6. *Осипов И. О.* К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 3. С. 548–555.
7. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны // М.: Мир. 1977. 622 с.

Ленинакан

Поступила в редакцию 20.XI.1987