МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1989

УДК 539.3

В. Н. ЗЕМЕРОВ, В. В. КУЗНЕЦОВ

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ОДНОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

При решении нелинейных сингулярно возмущенных краевых задач прикладной механики деформируемого твердого тела весьма эффективным оказывается применение метода пристрелки в сочетании с приемом возмущения области интегрирования для поиска начального приближения к решению [1, 2]. Численная реализация метода пристрелки связана с некоторыми затруднениями.

Наличие малого параметра позволяет во многих случаях применять метод асимптотического интегрирования. При практическом использовании этого метода ограничиваются обычно построением асимптотических алгоритмов нулевого приближения, так как процесс получения высших приближений является весьма трудоемким.

Точность асимптотических алгоритмов нулевого приближения можно повысить на основе корректировки главных членов асимптотических разложений тех компонент искомого решения, которые характеризуются наибольшими локальными градиентами. Целью настоящей статьи является обсуждение одного из возможных вариантов такого подхода.

1. Основную идею обсудим на примере следующей сингулярно-возмущенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &d\mathbf{y}/dt=\mathbf{F}(t, y, z) \quad (0<t<1) \\ &\varepsilon^2 d^2\mathbf{z}/dt^2=\mathbf{G}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (0<\varepsilon\ll 1) \end{aligned} \tag{1.1}$$

с разделяющимися граничными условиями вида

$$\mathbf{y}(0)=\mathbf{z}(0)=\mathbf{z}(1)=0 \tag{1.2}$$

Будем считать, что в соответствии с условиями теоремы [3] решение краевой задачи (1.1)–(1.2) существует, единственно и стремится при $\varepsilon\to 0$ к решению $\mathbf{y}=\mathbf{y}_0(t)$, $\mathbf{z}=\mathbf{z}_0(t)$:
вырожденной системы

$$d\mathbf{y}_0/dt=\mathbf{F}(t, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0), \quad \mathbf{y}_0(0)=0, \quad \mathbf{G}(t, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)=0 \tag{1.3}$$

а равномерно пригодное приближенное решение (1.1)–(1.2) имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} &\mathbf{y}=\mathbf{y}_0(t)+O(\varepsilon) \\ &\mathbf{z}=\mathbf{z}(y_0(t))+\alpha_0\exp(-\beta_0 t/\varepsilon)+\lambda_0\exp(-\delta_0(1-t)/\varepsilon)+O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{1.4}$$

где α_0, β_0, λ_0, δ_0 — некоторые константы, определяемые из условий сращивания соответствующих погранслойных функций с внешним решением вырожденной задачи (1.3).

Наличие в окрестностях $t=0$ и $t=1$ узких зон резкого изменения функций $\mathbf{z}=\mathbf{z}(t)$ приводит к неустойчивости счета при определении этой компоненты искомого решения методом пристрелки. Наименьшее значение параметра ε, ограничивающее область сходимости метода пристрелки, можно грубо оценить, например, по приближенной формуле [4]: $\varepsilon_0=\{[\ln(\Delta_1/\Delta_2)]^2-2\}^{-1/2}$, где Δ_1, Δ_2 — точность решения соответствующей задачи Коши и системы нелинейных алгебраических уравнений относительно недостающих начальных параметров. При $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ целесообразен переход к формулам (1.4), однако погрешность аппроксимации главных членов асимптотиских разложений решения задачи (1.1)—(1.2) может быть велика (так как, при $\Delta_1/\Delta_2=10^{\pm 4}$; $\varepsilon_0\approx 0{,}11$. Для построения уточненного решения будем использовать следующую итерационную процедуру метода последовательных приближений (i — номер приближения):

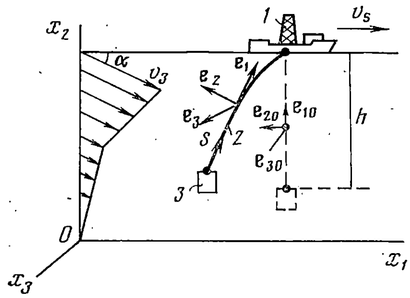
$$d\mathbf{y}_i/dt=\mathbf{F}(t, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_{i-1}), \quad \mathbf{y}_i(0)=0$$

$$\mathbf{z}_{i-1}=\mathbf{z}(y_{i-1}(t))+\alpha_0\exp(-\beta_0 t/\varepsilon)+\lambda_0\exp(-\delta_0(1-t)/\varepsilon) \tag{1.5}$$

$$\alpha_0=\alpha_0(\mathbf{y}_{i-1}(0)), \quad \beta_0=\beta_0(\mathbf{y}_{i-1}(0)), \quad \lambda_0=\lambda_0(\mathbf{y}_{i-1}(1))$$

$$\delta_0=\delta_0(\mathbf{y}_{i-1}(1)), \quad \max_t|\mathbf{z}_k(t)-\mathbf{z}_{k-1}(t)|\leqslant\delta \quad (i=1,2,\ldots,k;\ k=k(\varepsilon)) \tag{1.6}$$

Задача (1.5) является регулярной и может быть решена любым численным методом, а сходимость последовательности функций $\mathbf{y}_i(t)$, $\mathbf{z}_i(t)$ к своим точным значениям определяется возможностью их представления асимптотическими формулами (1.6), что выполняется по крайней мере, при $\varepsilon\to 0$ $(k(\varepsilon)\to 1)$. В остальных случаях процедура последовательных приближений обеспечивает сходимость $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{z}(t)$ к некоторым стационарным значениям $\mathbf{y}(t, \delta)$, $\mathbf{z}(t, \delta)$, которые, как показали численные эксперименты, являются вполне удовлетворительными по точности приближенными решениями задачи (1.1)—(1.2) в широком диапазоне изменения параметра $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$.



2. Рассмотрим задачу расчета статических характеристик трубопровода 2 с присоединенной концевой массой 3 (буферным устройством), буксируемого судном *1* с постоянной скоростью $\mathbf{v}_s=v_s\mathbf{i}_1$ (фиг.). Уравнение однослойного профиля подводных течений зададим в виде $\mathbf{v}_c(\varkappa_2)=v_c(\varkappa_2)(\mathbf{i}_1\cos\alpha+\mathbf{i}_3\sin\alpha)$. Будем использовать общие нелинейные уравнения статического равновесия трубопровода в связанных осях $\{\mathbf{e}_i\}$ ($\mathbf{i}=1, 2, 3$), положив в них для определенности $EI_b=EI=\text{const}$, $\nu={}^1/_2$ и считая отсутствующим распределенный крутящий момент по длине трубопровода (кольцевого поперечного сечения):

$$\begin{gathered}
dT_e/dS=w\cos\varphi\cos\psi+\varkappa_3 Q-\varkappa_2 Q_2-\mathbf{q}\cdot\mathbf{e}_1\\
dQ_1/dS=-w\sin\varphi-\varkappa_3 T_e-\mathbf{q}\cdot\mathbf{e}_2\\
dQ_2/dS=w\cos\varphi\sin\psi+\varkappa_2 T_e-\mathbf{q}\cdot\mathbf{e}_3\\
EI d\varkappa_2/dS=Q_2, \quad EI d\varkappa_3/dS=-Q_1\\
d\varphi/dS=\varkappa_3\cos\psi, \quad d\psi/dS=\varkappa_2+\varkappa_3\operatorname{tg}\varphi+\sin\psi\\
d\theta/dS=\varkappa_3\sin\psi/\cos\varphi
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь T_e, Q_1, Q_2 — соответственно, эффективное осевое и перерезывающие усилия; $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ — проекции вектора кривизны $\boldsymbol{\varkappa}$ осевой линии деформированного трубопровода; $\{\varphi, \psi, \theta\}$ — углы перехода от базиса $\{\mathbf{e}_{i0}\}$ к $\{\mathbf{e}_i\}$; $w=(m+m_2-m_1)g$ — погонная сила веса трубопровода в жидкости; m — погонная масса растянутого трубопровода в вакууме; $m_1=\pi D^2\rho_1/4$, $m_2=\pi D^2\rho_2/4$; ρ_1, ρ_2 — плотности окружающей жидкости и внутреннего потока гидросмеси; $\mathbf{q}$ — вектор внешней распределенной нагрузки, который определяется следующим образом:

$$\mathbf{q}=\mathbf{q}_w+\mathbf{q}_n+\mathbf{q}_h+\mathbf{q}_{a1}+\mathbf{q}_{a2}, \quad \mathbf{q}_w=-mg\mathbf{e}_{10}$$

$$\mathbf{q}_n=-\rho_1 c_n D[(v_{s2}-v_{c2})\mathbf{e}_2+(v_{s3}-v_{c3})\mathbf{e}_3][(v_{s2}-v_{c2})^2+(v_{s3}-v_{c3})^2]^{1/2}/2$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{q}_h=[(m_1-m_2)g(h-\varkappa_2)+m_2(v_f-v_{s1})^2/2-m_1(v_{c1}-v_{s1})^2/2](\varkappa_3\mathbf{e}_2-\varkappa_2\mathbf{e}_3)+\\
+(m_1-m_2)g(-\sin\varphi\mathbf{e}_2+\cos\varphi\sin\psi\mathbf{e}_3)
\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\mathbf{q}_{a1}=-m_1\mathbf{e}_1\times(d\mathbf{v}_{a1}/dt_m)\times\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{q}_{a2}=-m_2\mathbf{e}_1\times(d\mathbf{v}_{a2}/dt_m)\times\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{v}_{a1}=\mathbf{v}_s+(v_{c1}-v_{s1})\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{v}_{a2}=\mathbf{v}_s+(v_f-v_{s1})\mathbf{e}_1$$

Здесь $\mathbf{q}_w$, $\mathbf{q}_n$, $\mathbf{q}_h$, $\mathbf{q}_{a1}$, $\mathbf{q}_{a2}$ — соответственно векторы сил веса элемента трубопровода в вакууме, гидродинамического сопротивления, гидродинамического взаимодействия стенок трубопровода с внутренним и внешним потоками жидкости, инерции присоединенных масс морской воды и гидросмеси; $\mathbf{v}_f=\mathbf{v}_f\mathbf{e}_1$, v_f — постоянная скорость движения гидросмеси; $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения; c_n — коэффициент гидродинамического сопротивления; h — глубина погружения буферного устройства; t_m — время.

Распределение конструктивных параметров трубопровода обычно задается по длине его нерастянутой осевой линии σ, причем параметры растянутого трубопровода (учитывая, что $dS/d\sigma=1+\varepsilon_1$) связаны с его соответствующими параметрами в недеформированном состоянии (обозначенными здесь нижним индексом ноль) соотношениями

$$\begin{gathered}D=D_0(1-\varepsilon_1/2),\quad d=d_0(1-\varepsilon_1/2)\\ w=w_0(1-\varepsilon_1),\quad m_1=m_{10}(1-\varepsilon_1)\\ m_2=m_{20}(1-\varepsilon_1),\quad EI=EI_0(1-2\varepsilon_1)\end{gathered}\tag{2.3}$$

После последовательного перехода в (2.1)—(2.3) к переменным σ и x_2, используя зависимости $d(\quad)/dS=(1-\varepsilon_1)d(\quad)/d\sigma$, $d(\quad)/d\sigma=(1+\varepsilon_1)\cos\varphi\cos\psi d(\quad)/dx_2$, преобразуем полученную систему к безразмерному виду путем введения следующих переменных и параметров:

$$\begin{gathered}T^0=Te/w_0h,\ Q_j^0=Q_j/(w_0h\varepsilon)\ (j=1,2)\\ \varkappa_j^0=\varkappa_jh(j=2,3),\ \varphi^0=\varphi,\ \psi^0=\psi,\ \theta^0=\theta\\ \sigma^0=\sigma/h,\quad \gamma_1=4w_0h[E_0\pi(D_0^2-d_0^2)]^{-1}\\ \gamma_2=m_{10}v_s^2/w_0h,\quad \gamma_3=v_f/v_s,\quad \gamma_4=m_2v_s^2/w_0h\\ \omega(t)=v_c/v_s,\quad t=x_2/h,\quad \gamma_5=C_n\rho_1D_0v_s^2/2w_0\\ \varepsilon=(EI_0/w_0h^3)^{1/2}\end{gathered}$$

При принятых обозначениях (опуская верхний индекс ноль у безразмерных переменных) система уравнений статического равновесия трубопровода запишется окончательно в виде

$$\begin{gathered}dT/dt=(1-\gamma_1T)(P_1+\varkappa_2P_2+\varkappa_3P_3)+\varepsilon(\varkappa_3Q_1-\varkappa_2Q_2)/(\cos\varphi\cos\psi)\\ \varepsilon dQ/dt=(1-\gamma_1T)(\varkappa_3P_4-\operatorname{tg}\varphi/\cos\psi)+P_5(1-\gamma_1T/2)-\varkappa_3/(\cos\varphi\cos\psi)\\ \varepsilon dQ_2/dt=(1-\gamma_1T)(\operatorname{tg}\psi-\varkappa_2P_4)+P_6(1-\gamma_1T/2)+\varkappa_2T/(\cos\varphi\cos\psi)\\ \varepsilon d\varkappa_2/dt=Q_2(1+2\gamma_1T)/(\cos\varphi\cos\psi)\\ \varepsilon d\varkappa_3/dt=-Q_1(1+2\gamma_1T)/(\cos\varphi\cos\psi)\\ d\varphi/dt=\varkappa_3/\cos\varphi,\quad d\psi/dt=(\varkappa_2+\varkappa_3\operatorname{tg}\varphi\sin\psi)/(\cos\varphi\cos\psi)\\ d\theta/dt=\varkappa_3\operatorname{tg}\psi/\cos^2\varphi\\ P_1(\varphi,\psi,\theta)=1+(d\omega/dt)\gamma_2f_{1\alpha}(f_{10}-\omega f_{1\alpha}),\\ P_2(\varphi,\psi,\theta)=-[\gamma_2(f_{10}-\omega f_{1\alpha})(\omega f_{2\alpha}-f_{20})+\gamma_4(\gamma_3+f_{10})f_{20}]/(\cos\varphi\cos\psi)\\ P_3(\varphi,\psi,\theta)=[\gamma_2(f_{10}-\omega f_{1\alpha})(\omega f_{3\alpha}-f_{30})+\gamma_4(\gamma_3+f_{10})f_{30}]/(\cos\varphi\cos\psi)\\ P_4(\varphi,\psi,0)=[\gamma_2(f_{10}-\omega f_{1\alpha})^2+\gamma_4(\gamma_3+f_{10})^2]/(\cos\varphi\cos\psi)\\ P_5(\varphi,\psi,\theta)=\gamma_5(\omega f_{3\alpha}-f_{30})[(\omega f_{3\alpha}-f_{30})^2+(\omega f_{2\alpha}-f_{20})^2]^{1/2}/(\cos\varphi\cos\psi)\\ P_6(\varphi,\psi,\theta)=P_5(\varphi,\psi,\theta)(\omega f_{2\alpha}-f_{20})/(\omega f_{3\alpha}-f_{30})\\ f_{1\alpha}=\sin\varphi\cos\psi\cos(\theta+\alpha)+\sin\psi\sin(\theta+\alpha)\\ f_{2\alpha}=\sin\varphi\sin\psi\cos(\theta+\alpha)+\sin\psi\sin(\theta+\alpha)\\ f_{3\alpha}=\cos\varphi\cos(\theta+\alpha),\quad f_{i0}=f_{i\alpha}|_{\alpha=0}\quad(i=1,2,3)\end{gathered}\tag{2.4}$$

Считая граничные точки трубопровода шарнирно закрепленными и проектируя усилия, действующие в нижней точке ($t=0$) у буферного устройства, имеющего известную силу веса в жидкости W_b, на оси Ox_1, Ox_2, Ox_3, получаем следующие краевые условия для системы (2.4):

$$\begin{gathered}\theta(0)=\varkappa_2(0)=\varkappa_3(0)=0\\ T(0)\sin\varphi(0)\cos\psi(0)+\varepsilon Q_1(0)\cos\varphi(0)+\varepsilon Q_2(0)\sin\varphi(0)\sin\psi(0)=r_1\\ T(0)\cos\varphi(0)\cos\psi(0)-\varepsilon Q_1(0)\sin\varphi(0)+\varepsilon Q_2(0)\cos\varphi(0)\sin\psi(0)=r_2\\ T(0)\sin\psi(0)-\varepsilon Q_2(0)\cos\psi(0)=r_3\\ \varkappa_2(1)=\varkappa_3(1)=0\end{gathered}\tag{2.5}$$

где $r=-Q_{b1}/w_0h$, $r_2=W_b/w_0h$, $r_3=-Qb_3/w_0h$ (Qb_1, Qb_3 — проекции вектора силы гидродинамического сопротивления буферного устройства соответственно на оси Ox_1 и Qx_3).

Для глубоководных трубопроводов ($h\geqslant 10^3$ м) краевая задача (2.4)—(2.5) является сингулярно-возмущенной, так как в этом случае $\varepsilon\sim 10^{-4}$—10^{-3}. В малых окрестностях граничных точек $t=0$ и $t=1$ проекции вектора кривизны $\varkappa_2(t)$ и $\varkappa_3(t)$ являются быстроизменяющимися погранслойными функциями, соответственно, вида $\alpha_i\exp(-\beta_0 t/\varepsilon)$ $(i=0, 1)$, $\alpha_i\exp(\beta_1(t-1)/\varepsilon)$ $(i=2, 3)$, где α_i, β_0, β_1 — константы сращивания внутреннего решения с внешним решением регулярной задачи Коши для уравнений статического равновесия абсолютно гибкого стержня $(\varepsilon=0)$:

$$\begin{gathered}dT_0/dt=(1-\gamma_1T_0)[P_1(\varphi_0,\ \psi_0,\ \theta_0)+\varkappa_{20}P_2(\varphi_0,\ \psi_0,\ \theta_0)+\varkappa_{30}P_3(\varphi_0,\ \psi_0,\ \theta_0)]\\ d\varphi_0/dt=\varkappa_{30}/\cos\varphi_0,\quad d\varphi_0/dt=\varkappa_{20}+\varkappa_{30}\operatorname{tg}\varphi_0\sin\psi_0)/(\cos\varphi_0\cos\psi_0)\\ d\theta_0/dt=\varkappa_{30}\operatorname{tg}\psi_0/\cos^2\varphi_0\\ \varkappa_{20}=[(1-\gamma_1T_0)\cos\varphi_0\sin\psi_0+P_6(\varphi_0,\ \psi_0,\ \theta_0)\cos\varphi_0\cos\psi_0(1-\gamma_1T_0/2)]/\\ /[(1-\gamma_1T_0)\cos\varphi_0\cos\psi_0P_4(\varphi_0,\ \psi_0,\ Q_0)-T_0]\\ \varkappa_{30}=[(1-\gamma_1T_0)\sin\varphi_0-P_5(\varphi_0,\ \psi_0,\ \theta_0)(1-\gamma_1T_0/2)\cos\varphi_0\cos\psi_0]/\\ /[(1-\gamma_1T_0)\cos\varphi_0\cos\psi_0P_4(\varphi_0,\ \psi_0,\ \theta_0)-T_0]\\ T_0(0)=(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^{1/2},\ \varphi_0(0)=\operatorname{arctg}(r_1/r_2)\\ \psi_0(0)=\operatorname{arctg}(r_3\cos\varphi_0(0)/r_2),\quad \theta_0(0)=0\end{gathered}\tag{2.6}$$

(так как обычно $r_2\gg\max\{|r_1|,\ |r_3|\}$, то можно положить $r_1=r_3\approx 0$, т. е. $T_0(0)=r_2$, $\varphi_0(0)=\psi_0(0)=0$.

Опуская преобразования при использовании одного из вариантов метода сращивания асимптотических разложений (например, метода [3]), можно построить следующие выражения для главных членов асимптотики функций $\varkappa_2(t)$ и $\varkappa_3(t)$:

$$\varkappa_m(t)=\varkappa_{m0}(t)-\varkappa_{m0}(0)\exp(-\lambda_0t/\varepsilon)-\varkappa_{m0}(1)\exp[\lambda_1(t-1)/\varepsilon]+O(\varepsilon)\quad (m=2,\ 3)$$

$$\begin{gathered}\lambda_i=(a_jb_j)^{1/2},\quad a_j=[1-\gamma_1T_0(N)]P_4[\varphi_0(N),\ \psi_0(N),\\ \theta_0(N)]-T_0(N)[\cos\varphi_0(N)\cos\psi_0(N)]^{-1}\end{gathered}\tag{2.7}$$

$$b_j=-[1+2\gamma_iT_0(N)][\cos\varphi_0(N)\cos\psi_0(N)]^{-1}\quad (j=0,\ 1),\ (N=0,\ 1)$$

откуда находятся асимптотические представления перерезывающих усилий

$$\begin{gathered}Q_1(t)=[\varkappa_{30}(0)/\lambda_0]\exp(-\lambda_0t/\varepsilon)+[\varkappa_{30}(1)/\lambda_1]\exp[\lambda_1(t-1)/\varepsilon]+O(\varepsilon)\\ Q_2(t)=[\varkappa_{20}(0)/\lambda_0]\exp(-\lambda_0t/\varepsilon)-[\varkappa_{20}(1)/\lambda_1]\exp[\lambda_1(t-1)/\varepsilon]+O(\varepsilon)\end{gathered}\tag{2.8}$$

Для существования асимптотики (2.7)—(2.8) необходимым является справедливость неравенства $a_jb_j>0$ $(j=0,\ 1)$, что при достаточно большой силе веса буферного устройства всегда выполняется. Действительно, так как $b_0<0$, то при анализе знака, например, a_0b_0 достаточно убедиться в справедливости неравенства $a_0=[1-\gamma_1T_0(0)]\gamma_3^2\gamma_4-T_0(0)<0$. Это эквивалентно проверке условия

$$[T_0(0)=r_2]W_b>m_{20}v_f^2/\{1+4m_{20}v_f^2/[E\pi(D_0^2-d_0^2)]\}\approx m_{20}v_f^2$$

которое всегда имеет место ввиду малой величины силы в правой части последнего неравенства.

В соответствии с предложенной выше процедурой последовательных приближений (1.5)–(1.6) представим краевую задачу (2.4)–(2.5) в виде:

$$dT_i/dt=(1-\gamma_1 T_i)\,[P_1(\varphi_i,\psi_i,\theta_i)+\varkappa_2 P_2(\varphi_i,\psi_i,\theta_i)+$$
$$+\varkappa_3 P_3(\varphi_i,\psi_i,\theta_i)+\varepsilon(\varkappa_3 Q_1-\varkappa_2 Q_2)\,]/(\cos\varphi_i\cos\psi_i)$$
$$d\varphi_i/dt=\varkappa_3/\cos\varphi_i,\quad d\psi_i/dt=(\varkappa_2+\varkappa_3\operatorname{tg}\varphi_i\sin\psi_i)/(\cos\varphi_i\cos\psi_i)$$
$$d\theta_i/dt=\varkappa_3\operatorname{tg}\psi_i/\cos^2\varphi_i,$$
$$T_i(0)\sin\varphi_i(0)\cos\psi_i(0)+\varepsilon Q_1(0)\cos\varphi_i(0)+\varepsilon Q_2(0)\sin\varphi_i(0)\sin\psi_i(0)=r_1$$
$$T_i(0)\cos\varphi_i(0)\cos\psi_i(0)-\varepsilon Q_1(0)\sin\varphi_i(0)+\varepsilon Q_2(0)\cos\varphi_i(0)\sin\psi_i(0)=r_2,\tag{2.9}$$
$$T_i(0)\sin\psi_i(0)-\varepsilon Q_2(0)\cos\psi_i(0)=r_3,\quad \theta_i(0)=0$$
$$\varkappa_m=\varkappa_{m,\,i-1}(t)-\varkappa_{m,\,i-1}(0)\exp(-\lambda_0 t/\varepsilon)-\varkappa_{m,\,i-1}(1)\exp[\lambda_1(t-1)/\varepsilon]\quad(m=2,\,3),$$
$$\theta_1=[\varkappa_{3,\,i-1}(0)/\lambda_0]\exp(-\lambda_0 t/\varepsilon)+[\varkappa_{3,\,i-1}(1)/\lambda_1]\exp[\lambda_1(t-1)/\varepsilon]$$
$$Q_2=-[\varkappa_{2,\,i-1}(0)/\lambda_0]\exp(-\lambda_0 t/\varepsilon)-[\varkappa_{3,\,i-1}(1)/\lambda_1]\exp[\lambda_1(t-1)/\varepsilon]\quad \lambda_i=(a_j b_j)^{1/2},$$
$$a_j=[1-\gamma_1 T_{i-1}(N)]P_4[\varphi_{i-1}(N),\,\psi_{i-1}(N),\,\theta_{i-1}(N)]-$$
$$-T_{i-1}(N)[\cos\varphi_{i-1}(N)\cos\psi_{i-1}(N)]^{-1},$$
$$b_i=-[1+2\gamma_1 T_{i-1}N)][\cos\varphi_{i-1}(N)\cos\psi_{i-1}(N)]^{-1}\quad(i=1,\,2,\,\dots;\ N=0,\,1)$$

На первом шаге метода последовательных приближений ($i=1$) численно интегрируется регулярная задача Коши (2.6), откуда по формулам (2.7)–(2.8) находятся главные члены асимптотических разложений функций $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, Q_1 и Q_2.

Для получения второго и последующих приближений необходимо решить краевую задачу (2.9), например, методом пристрелки по недостающим в точке $t=1$ начальным параметрам T_i, φ_i, ψ_i, θ_i (в качестве начального приближения для них достаточно принять $T_i^{(0)}=T_{i-1}(1),\dots,\theta_i^{(0)}=\theta_{i-1}(1)$. Процесс последовательных приближений продолжаем до тех пор, пока не будет выполнено условие сходимости:

$$\max{}_t|Y_k-Y_{k-1}|\leqslant\sigma,\quad y=(\varkappa_2,\,\varkappa_3,\,Q_1,\,Q_2)$$

3. В рассмотренных примерах численной реализации предложенной методики принимались следующие значения расчетных параметров: $\omega_0=1{,}5$ кН/м; $D_0=0{,}5$ м; $d_0=0{,}47$ м; $E=2\cdot10^8$ кН/м^2; $\rho_1=1{,}04$ кН·с^2/м^4; $\rho_2=1{,}08$ кН·с^2/м^4; $C_n=1{,}4$; $v_f=2$ м/с.

Профиль подводных течений аппроксимировался зависимостью $\omega(t)=\{[(-0{,}44h/5960v_s)t-0{,}06/v_s\quad(0\leqslant t\leqslant0{,}993)],\quad[-(h/40v_s)t+148{,}5/v_s\ (0{,}993<t<1)]\}$. Варьируемыми параметрами являлись ε, v_s, W_b и α. Сопоставительный анализ точности получаемых результатов проводился для случая движения трубопровода в плоскости потока окружающей жидкости ($\alpha=0$; $\psi=\theta=0$; $\varkappa_2=Q_2=0$), когда воздействие океанической среды на трубопровод является максимальным. Найденные различными методами значения, например, максимальной кривизны $\varkappa_{3*}=\max|\varkappa_3|$ осевой линии трубопровода ($W_b=10^3$ кН, $v_s=1$ м/с) сведены в табл. 1. Во втором столбце табл. 1 приведены значения глубины нагружения (h) буферного устройства в метрах, соответствующие указанным в первом столбце величинам малого параметра ε и различным длинам трубопровода. В третьем, четвертом и пятом столбцах табл. 1 приведены безразмерные значения максимальной кривизны $\overset{(1)}{\varkappa}_{3*}$, $\overset{(2)}{\varkappa}_{3*}$ и $\overset{(3)}{\varkappa}_{3*}$, полученные соответственно с помощью асимптотического алгоритма нулевого приближения, итерационной корректировки (k — число итераций при $\delta=10^{-3}$) и метода возмущения области интегрирования [1].

Для обеспечения работы системы управления глубоководным трубопроводом в реальных условиях его эксплуатации важное значение имеет получение количественных оценок экстремальных значений статических характ-

Таблица 1

ε	h	$\varkappa_{3*}^{(1)}$	$\varkappa_{3*}^{(2)}$	$\varkappa_{3*}^{(3)}$
0,1000	126,4	0,111	0,127 (K=6)	0,131
0,0800	146,6	0,130	0,139 (K=6)	0,142
0,0500	200,6	0,159	0,163 (K=4)	0,164
0,0100	586,5	0,222	0,230 (K=2)	0,230
0,0050	931,0	0,281	0,283 (K=2)	–
0,0030	1308,8	0,410	0,410 (K=1)	–
0,0003	6000,0	0,455	0,455 (K=1)	–

Таблица 2

v_s	Te_*	Q_{1*}	Q_{2*}	$\varkappa_{2*}$	$\varkappa_{3*}$	φ_*	ψ_*	θ_*
0,5	9989,1	4,3406	0,0000	0,0000	0,0882	0,1564	0,0000	0,0000
1,0	9989,0	5,2466	0,0000	0,0000	0,1050	0,3700	0,0000	0,0000
2,0	9984,7	17,8990	0,0000	0,0000	1,1100	0,7990	0,0000	0,0000
0,5	9989,1	3,1526	2,3797	0,0468	0,0640	0,1277	0,0447	0,0019
1,0	9989,1	4,5875	2,6542	0,0536	0,2257	0,3264	0,0673	0,0060
2,0	9989,6	17,5998	2,4650	0,0514	1,0910	0,7597	0,0981	0,0166
0,5	9989,1	1,0623	2,8690	0,0551	0,0514	0,0670	0,0501	0,0007
1,0	9989,1	4,2261	3,0705	0,0608	0,2030	0,2268	0,0788	0,0036
2,0	9989,9	16,8808	3,2312	0,0665	1,0414	0,6587	0,1252	0,0141

теристик трубопровода при различных режимах его буксировки судном. Результаты расчета $T_{e*}=\max|T_e|,\ldots,\theta_*=\max|\theta|$ полученные при различных значениях параметров буксировки v_s и α для h=6 км, сведены в табл. 2. При этом скорость судна v_s указана в м/с, значения усилий T_{e*}, Q_{1*}, Q_{2*} в килоньютонах, кривизны $\varkappa_{2*}$ и $\varkappa_{3*}$ в км$^{-1}$, а углов φ_*, ψ_* и θ_* в радианах. Первые три строки табл. 2 соответствуют углу $\alpha=0$, последующие три строки – углу $\alpha=\pi/4$ и последние три строки – углу $\alpha=\pi/2$

Отметим, в заключение, что аналогичным образом может быть рассмотрена задача буксировки трубопровода и в случае многослойного трехмерного профиля подводных течений. Такая постановки задачи требует дополнительного учета в уравнениях (2.1)–(2.2) членов, характеризующих деформацию кручения, так как при изменении поля скоростей подводных течений конфигурация трубопровода будет близка к пространственной спирали в общем случае с переменным шагом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузнецов В. В.* Об использовании метода продолжения решения по длине отрезка интегрирования при расчете круглых гофрированных пластин // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 2. С. 189–191.
2. *Кузнецов В. В., Петров В. В.* Использование метода возмущения области интегрирования при решении нелинейных краевых задач теории гибких пластин и оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 176–178.
3. *Тупчиев В. А.* О существовании, единственности и асимптотике решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142. № 6. С. 1261–1264.
4. *Гайдук В. Ф., Ольшевский К. У.* О численном методе решения задач статики гибких упругих стержней // Прикл. механика. 1983. Т. 19. № 5. С. 107–112.

Москва, Саратов

Поступила в редакцию
20.VIII.1986