

УДК 539.37

А. О. МИНЕНКОВ, А. В. ОСТРОУМОВ

МЕХАНИКА СКОЛЬЖЕНИЯ КОНЬКА
ПО КРИВОЛИНЕЙНЫМ ТРАЕКТОРИЯМ

Обсуждаются вопросы, связанные с механикой деформирования льда при скольжении конька и предлагаются уравнения, описывающие этот процесс. Приводятся результаты качественного и количественного сопоставления экспериментальных данных с расчетами по предлагаемой теоретической схеме.

1. Рассмотрим лезвие конька, представляющее собой плоскую пластину толщины a со скользящей поверхностью, имеющей продольный («овал») и поперечный («заточка») профили в виде дуг окружностей с радиусами r и r_0 , соответственно. Допустим вначале, что лед оттесняется деформирующим его лезвием без искажения свободных границ, то есть отсутствует выпучивание льда. В этом случае форма лунки, образующейся после вдавливания в лед лезвия конька, наклоненного под углом α к вертикали, будет совпадать с формой части лезвия, отсекаемой плоской поверхностью льда. Общий вид лунки и проекции ее контуров на взаимно-ортогональные плоскости изображены на фиг. 1, 2, где приняты следующие обозначения: Π — горизонтальная плоскость, совпадающая с поверхностью льда, Π_1 — плоскость симметрии лунки, Π_2 — ортогональная к Π и Π_1 плоскость, проходящая через самую низкую точку ребра лезвия, $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_3$ — контуры лунки, Γ_2 — проекция ребра лезвия на плоскость Π , $2l_0$ — продольный размер лунки, равный длине границы Γ_0 , Δ — ширина лунки, x, y, z — ортогональная декартова система координат, $h_1(x), h_2(x), h_3(x)$ — текущие размеры лунки ($\Delta = h_1(0) + h_2(0)$, $H = h_3(0)$).

В дальнейшем ограничимся рассмотрением типичного для катания на коньках режима скольжения по криволинейным траекториям — скольжения на одном ребре лезвия, когда выполняется условие $a \gg H/\sin \alpha$. Далее, для подавляющего большинства практически интересных ситуаций можно изначально полагать, что выполняются условия

$$r \gg l_0, \quad l_0 \gg H, \quad l_0 \gg \Delta \quad (1.1)$$

заметно упрощающие последующие построения. В частности, неравенства (1.1) позволяют считать линии $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ дугами окружностей с радиусами

$$r_1 \approx 0,5l_0^2 [h_1(0) + h_2(0)]^{-1}, \quad r_2 \approx r/\sin \alpha, \quad r_3 \approx r/\cos \alpha \quad (1.2)$$

соответственно, и пользоваться приближенными зависимостями

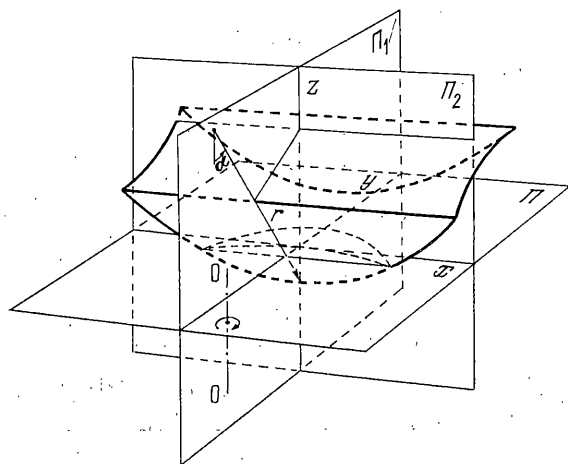
$$h_1(x) \approx \frac{r_2 - r_1}{2r_1 r_2} (l_0^2 - x^2) \quad (1.3)$$

$$h_2(x) \approx \frac{l_0^2 - x^2}{2r_2}, \quad h_3(x) \approx \frac{l_0^2 - x^2}{2r_3}$$

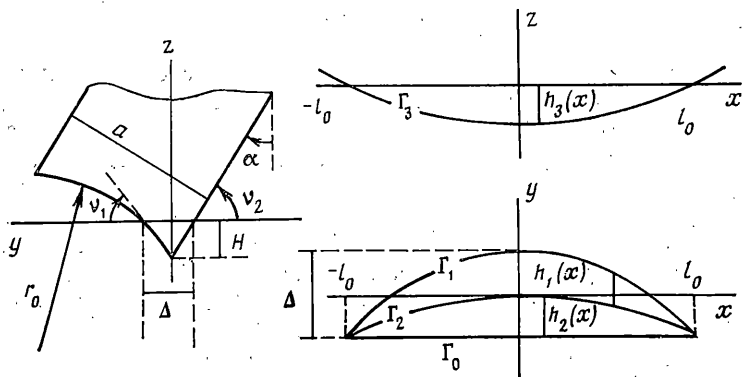
В (1.2) $h_2(0)$ определяется из (1.3) при $x=0$, а $h_1(0)$ вычисляется из геометрических построений по формуле

$$h_1(0) = a/(2 \cos \alpha) - l_0^2 \sin \alpha / (2r) + A \sin \alpha - (r_0^2 - A^2 \cos^2 \alpha)^{1/2} \quad (1.4)$$

$$A = (r_0^2 - 0,25a^2)^{1/2} - 0,5(a \operatorname{tg} \alpha - l_0^2/r)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Для угла v_1 , характеризующего наклон внедренной в лед части нижней грани лезвия (см. фиг. 2), и плоской боковой грани имеем

$$v_1 = \operatorname{arctg} \frac{H}{h_1(0)} \approx \operatorname{arctg} \frac{l_0^2}{2r_3 h_1(0)}, \quad v_2 = \pi/2 - \alpha \quad (1.5)$$

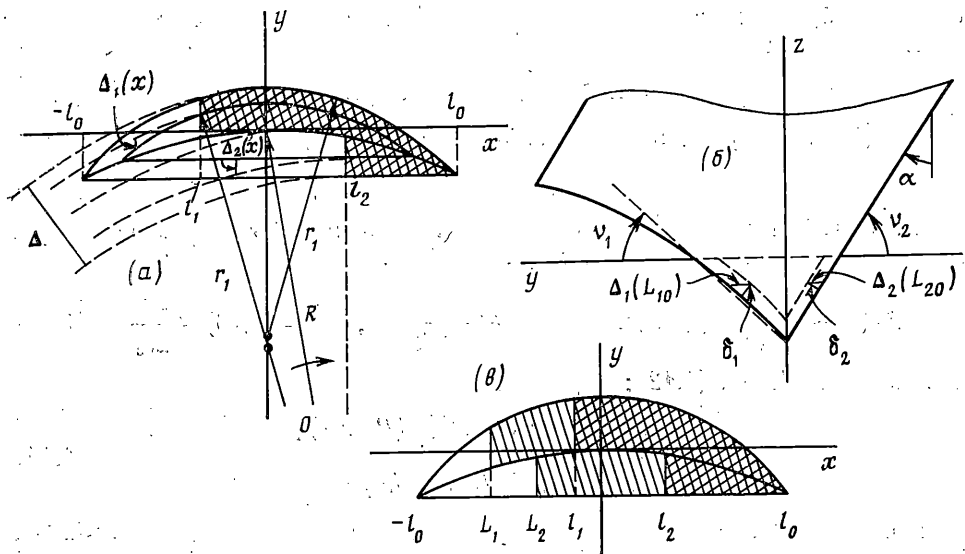
Случаю лезвия без заточки отвечает предельный переход $r_0/a \rightarrow \infty$, при этом получаем из (1.2), (1.4), (1.5):

$$r_1 \approx r \sin \alpha, \quad v_1 = \alpha \quad (1.6)$$

При повороте вдавленного в лед лезвия конька вокруг неподвижной вертикальной оси $O-O$ (см. фиг. 1) на поверхности льда будет формироваться круговой след. Анализируя взаимное расположение линий уровня погруженной в лед части поверхности лезвия конька и траекторий точек этой поверхности при вращении конька вокруг оси $O-O$, приходим к выводу, что оттеснение льда будет осуществляться лишь частью поверхности лезвия, выделенной на фиг. 3, а двойной штриховкой. Предполагая, что для среднего радиуса следа R выполняется условие

$$R \gg l_0 \quad (1.7)$$

можно пренебречь различием радиусов траекторий в пределах ширины следа и считать задние по направлению движения границы зон оттеснения параллельными оси y . В дальнейшем ограничимся рассмотрением ситуации, когда координаты задних границ зон оттеснения для нижней $x=l_1$ и боковой $x=l_2$ граней лезвия (см. фиг. 3, а) одновременно удовлетворяют



Фиг. 3

условиям $|l_1| \leq l_0$, $|l_2| \leq l_0$. В этом случае l_1 и l_2 связаны между собой соотношением

$$l_2 = (1 - R/r_1)l_1 \quad (1.8)$$

Перейдем к анализу распределения напряжений на поверхности контакта лезвия со льдом. Поскольку коэффициент трения f стали о лед составляет величину $f \approx 10^{-3} - 10^{-2} \ll 1$, то возникающие на поверхности контакта касательные напряжения

$$\tau = fp \ll p \quad (1.9)$$

где p — нормальная к поверхности лезвия составляющая напряжения. Таким образом, деформация льда под коньком осуществляется главным образом за счет нормального давления, реализующегося на контакте лезвия со льдом. Давление в зонах контакта нижней и боковой граней лезвия со льдом будем осреднять поперек этих зон, так что существенной в задаче будет только продольная координата x .

Известно [1], что в процессе деформирования лед проявляет как упругие, так и пластические свойства. Как указано в [1-3], необратимые (пластические) эффекты наблюдаются во льду уже при деформациях $\epsilon > 1\%$, при этом предел текучести льда перестает зависеть от скорости деформации $\dot{\epsilon}$ при $\dot{\epsilon} > 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. Поскольку выполнение указанных выше условий типично для рассматриваемой нами задачи, будем считать, что оттеснение льда лезвием конька происходит при постоянном нормальном к поверхности лезвия давлении p_0 .

Учет упругого восстановления оттесненного лезвием льда, за счет которого зона непосредственного контакта лезвие-лед не ограничивается зоной оттеснения, будем проводить по следующей приближенной схеме. Не вникая в сложную картину напряженно-деформированного состояния льда под коньком, предположим, что упругая составляющая полного перемещения льда под коньком тем больше, чем на большую глубину H лезвие внедрено в лед и чем меньший угол ν со свободной поверхностью льда образует оттесняющая грань лезвия. В соответствии со сказанным, примем для обратимых составляющих перемещения льда выражения

$$\delta_i = kH \cos \nu_i \quad (i=1, 2) \quad (1.10)$$

где k — эмпирическая константа, характеризующая упругое восстановление льда, индекс $i=1$ относится к нижней грани лезвия, а $i=2$ — к боковой (см. фиг. 3, б).

Обозначим через $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ — текущие расстояния между линиями уровня граней лезвия и траекториями соответствующих точек лезвия (см.

фиг. 3, а, б). Тогда задние границы отрыва граней лезвия конька от льда L_1, L_2 определяются из условий

$$L_i = L_{i0} \quad (L_{i0} > -l_0), \quad L_i = -l_0 \quad (L_{i0} \leq -l_0) \quad (1.11)$$

где L_{i0} ($i=1, 2$) — решения уравнений

$$\Delta_i(L_{i0}) \sin \nu_i = \delta_i \quad (1.12)$$

На фиг. 3, в зоны упругого восстановления льда выделены одинарной штриховкой. Поскольку с учетом (1.1)–(1.3):

$$\Delta_1(x) \approx \frac{R-r_1}{2Rr_1} (l_1-x)^2, \quad \Delta_2(x) \approx \frac{(l_2-x)^2}{2R}, \quad H=h_3(0) \approx \frac{l_0^2}{2r_3} \quad (1.13)$$

получаем из (1.10), (1.12):

$$L_{10} \approx l_1 - l_0 [kRr_1 \operatorname{ctg} \nu_1 / (r_3(R-r_1))]^{1/2} \quad (1.14)$$

$$L_{20} \approx l_2 - l_0 [kR \operatorname{ctg} \nu_2 / r_3]^{1/2}$$

Примем далее, что в зонах упругого восстановления льда ($L_i \leq x \leq l_i$, $i=1, 2$) контактное давление $p_i(x)$ пропорционально величине обратной составляющей перемещения льда:

$$p_i(x) = p_0 [1 - \Delta_i(x) \sin \nu_i / \delta_i] = p_0 [1 - \Delta_i(x) \operatorname{tg} \nu_i (kH)^{-1}] \quad (1.15)$$

В итоге, для распределения давления в зонах контакта граней лезвия со льдом можем выписать следующие соотношения ($i=1, 2$):

$$P_i(x) = p_0 \quad (l_i \leq x \leq l_0), \quad P_i(x) = p_i(x) \quad (L_i \leq x < l_i) \quad (1.16)$$

Геометрические характеристики зоны контакта лезвия со льдом были определены нами в предположении об отсутствии выпирания льда. Это предположение позволило получить оценки для продольных размеров зон оттеснения и упругого восстановления льда. В то же время ясно, что при определении поперечных размеров зоны контакта лезвия со льдом необходимо учесть искажение поверхности льда за счет его выдавливания коньком в процессе формирования следа. Отметим, что известные решения задачи о вертикальном внедрении жесткого клина в пластическое полупространство неприменимы в рассматриваемом случае. Связано это со спецификой оттеснения льда коньком, состоящей в том, что в зависимости от радиуса траектории скольжения интенсивности выдавливания льда нижней и боковой гранями лезвия будут меняться даже при неизменном угле наклона лезвия. Сложность точного анализа задачи о выдавливании льда лезвием конька усугубляется еще и тем обстоятельством, что при достаточно больших деформациях, которые испытывает лед в процессе формирования следа, имеют место эффекты частичного разрушения льда, часто наблюдаемые вблизи кромок следа. Эти эффекты приводят к снижению несущей способности льда в окрестности боковых границ зоны контакта, так что сделанное ранее предположение об однородности давления поперек контактной зоны, строго говоря, неверно.

Для учета указанных выше эффектов, обусловленных выдавливанием льда, при описании силового взаимодействия конька со льдом введем отдельно для нижней и боковой граней лезвия поправочные весовые коэффициенты s_1 и s_2 , соответственно, интегрально учитывающие, с одной стороны, увеличение поперечных размеров зоны контакта за счет выдавливания льда и, с другой стороны, неоднородность поперечной эпюры давления. Вопрос о выборе численных значений этих коэффициентов должен решаться на основе сопоставления теории с данными эксперимента и будет рассмотрен ниже.

2. Для экспериментальной проверки предложенной выше схематизации процесса взаимодействия лезвия конька со льдом было сконструировано специальное устройство, с помощью которого исследовались траектории, получающиеся при медленном движении по льду образцов, имитирующих лезвие конька. Образцы представляли собой стальные пластинки толщиной $a=3,5$ мм с различными строго фиксированными

ми радиусами овала r скользящей кромки, типичными для носовой, задней и средней частей реального конька для фигурного катания (0,4; 1,5; 2,2 м). Для выяснения влияния на траекторию движения заточки лезвия эксперименты проводились как с образцами без заточки, так и с образцами, заточенными под желобок с радиусом $r_0 \approx (10 \pm 1)$ мм, что соответствует наиболее распространенному типу заточки. Образцы фиксировались в пластиковом держателе фигурных коньков, который привинчивался к грузовой платформе устройства через клинообразные призмы, обеспечивавшие возможность установки лезвий образцов под углами $\alpha = 10, 20, 30^\circ$ к вертикали. При изменении угла наклона лезвия образца место его крепления к платформе с грузами изменялось так, чтобы обеспечить расположение центра тяжести устройства над наинизшей точкой соприкосновения лезвия со льдом. Вес экспериментального устройства W можно было варьировать, меняя количество устанавливаемых на платформу грузов. Эксперименты проводились с двумя весами устройства — 300 и 684Н. По концам грузовой платформы имелись четыре дополнительные опоры, длина которых регулировалась после установки загруженного устройства на лёд так, чтобы предотвратить опрокидывание устройства, скользящего на одном коньке. Так как центр тяжести конструкции всегда располагался непосредственно над зоной контакта лезвия со льдом, давление дополнительных опор на лёд оказывалось незначительным, а следовательно, возникающая на этих опорах сила трения была мала. Дополнительное снижение силы трения опор о лёд достигалось установкой на концах опор фторопластовых вкладышей, обладающих низким коэффициентом трения. Отсутствие влияния опор на характер скольжения конька было проверено экспериментально путем смещения в различных направлениях центра тяжести устройства на 1–2 см от его исходного положения. Смещения центра тяжести осуществлялись за счет перераспределения грузов на платформе и не приводили в пределах точности измерений к изменению траектории движения.

Эксперименты проводились на катке с искусственным ледовым покрытием: температура поверхности льда $(-2,5 \pm 0,5)^\circ\text{C}$, температура воздуха на высоте 1,5 м над льдом $(+14 \pm 1)^\circ\text{C}$. Толкающее усилие прикладывалось в районе центра масс конструкции так, чтобы оно не создавало вращающего момента и было направлено по касательной к траектории. Скорость движения U выбиралась близкой к стационарной и небольшой ($0,1 \pm 0,02$ м/с) для того, чтобы исключить центробежные и инерционные эффекты, обусловленные вращением устройства в процессе его движения. Наблюдавшиеся траектории движения устройства всегда представляли собой кривые, близкие к окружностям, радиус которых зависел от угла наклона лезвия, овала, заточки и т. д. В процессе эксперимента измерялась хорда d_j и стрелка сегмента b_j дуги следа лезвия, по которым в соответствии с формулой $R_j = 0,5(b_j^2 + d_j^2/4)/b_j$ определялся радиус кривизны дуги следа. Описанным способом радиусы кривизны определялись на пяти–шести различных участках следа лезвия, после чего находилось их среднее арифметическое R , которое и принималось за радиус траектории. Отклонения R_j от среднего в каждом эксперименте не превышали $\pm 0,05 R$. Помимо измерения радиуса траектории в некоторых экспериментах с образцами без заточки при помощи тонких щупов, подкладываемых под лезвие, определялся продольный размер $2l_0$ зоны лезвия, погруженной в лёд.

Информация о результатах экспериментов приведена в таблице 1, где через R_0 и R обозначены найденные радиусы траекторий для образцов с заточкой и без нее, соответственно. В таблице 1 величины r , R_0 , R , l_0 даны в метрах, α — в градусах, W — в ньютонах, а N — номер опытов, в которых измерялось l_0 . Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы.

В экспериментах наблюдались воспроизводимые траектории движения устройства, имеющие вид окружностей.

Продольные размеры зоны контакта лезвия со льдом увеличивались одновременно с увеличением веса устройства, в то время как радиусы получающихся траекторий от веса почти не зависели.

Наличие заточки, так же как и увеличение угла наклона лезвия или увеличение радиуса овала, приводило к увеличению радиуса траектории.

3. С учетом предложенной в п. 1 схематизации процесса взаимодействия лезвия конька со льдом можно записать следующие уравнения движения экспериментального устройства

$$\begin{aligned}
 c_2 \int_{L_2}^{l_0} P_2(x) h_2(x) dx + c_1 \int_{L_1}^{l_0} P_1(x) h_1(x) dx - mg &= 0 \\
 c_2 \int_{L_2}^{l_0} P_2(x) h_3(x) dx - c_1 \int_{L_1}^{l_0} P_1(x) h_3(x) dx + \frac{mU^2}{R} &= 0 \\
 c_1 \int_{L_1}^{l_0} P_1(x) h_3(x) x dx - c_2 \int_{L_2}^{l_0} P_2(x) h_3(x) x dx &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

r	α	W	R_0	R	l_0	N
0,4	10	300	0,137	0,087		
—	—	684	0,132	0,098		
—	20	300	0,232	0,197		
—	—	684	0,230	0,189		
—	30	300	0,301	0,259	0,027	1
—	—	684	0,307	0,276	0,037	2
1,5	10	300	0,715			
—	—	684	0,676	0,383		
—	20	300	1,036	0,740		
—	—	684	0,901	0,874	0,039	3
—	30	300	1,131	1,160		
—	—	684	1,162	1,155	0,050	4
2,2	10	300	0,920			
—	—	684	0,955	0,766		
—	20	300	1,433	1,294		
—	—	684	1,435	1,364	0,052	5
—	30	300	1,757	1,594		
—	—	684	1,699	1,623	0,063	6

выражающие баланс сил в проекции на оси z и y и баланс моментов сил относительно оси z , проходящей через центр масс конструкции.

При записи уравнений (3.1) считалось, что движение происходит по окружности радиуса R с постоянной линейной скоростью U и выполняются условия (1.1), (1.7), (1.9), позволяющие пренебречь проекциями касательной составляющей контактного напряжения на оси y , z и полагать равной нулю координату y точки приложения результирующей сил реакции льда. Реакции опор ввиду их малости не учитывались в (3.1), а уравнение баланса сил в проекции на ось x и уравнения моментов сил относительно осей x , y не рассматривались поскольку в данном случае соотношений (1.2)–(1.5), (1.8), (1.11), (1.13)–(1.16), (3.1) оказывается достаточно для определения интересующих нас характеристик движения.

Рассмотрим случай лезвия без заточки и преобразуем уравнения (3.1) к более удобному для их анализа виду. Для этого, используя соотношения (1.2), (1.3), (1.5), (1.6), (1.8), (1.11), (1.13)–(1.16), вычислим фигурирующие в (3.1) интегралы и обезразмерим все величины, имеющие размерность длины, деля их на r . Тогда после формальных преобразований можно записать уравнения (3.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & [G_1(l_0^*) - G_1(L_1^*) - G_2(l_1^*, 1) + G_2(L_1^*, 1)] + [G_1(l_0^*) - G_1(L_2^*) - G_2(l_2^*, 2) + \\
 & \quad + G_2(L_2^*, 2)] c_2 \operatorname{tg}^2 \alpha / c_1 = 2mg \sin \alpha (c_1 \rho_0 r^2 \cos^2 \alpha)^{-1} \\
 & [G_1(l_0^*) - G_1(L_1^*) - G_2(l_1^*, 1) + G_2(L_1^*, 1)] - [G_1(l_0^*) - G_1(L_2^*) - \\
 & \quad - G_2(l_2^*, 2) + G_2(L_2^*, 2)] c_2 / c_1 = 2mU^2 (c_1 \rho_0 r^3 R^* \cos \alpha)^{-1} \\
 & [G_3(l_0^*) - G_3(L_1^*) - G_4(l_1^*, 1) + G_4(L_1^*, 1)] - [G_3(l_0^*) - G_3(L_2^*) - \\
 & \quad - G_4(l_2^*, 2) + G_4(L_2^*, 2)] c_2 / c_1 = 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$G_1(t) = (l_0^{*2} - t^2/3)t, \quad G_3(t) = (l_0^{*2} - t^2/2)t^2/2$$

$$G_2(t, j) = B_j [l_j^{*2} - l_j^* t + ((l_0^{*2} - l_j^{*2})/3 + l_j^* t/2 - t^2/5)t^2/l_0^{*2}] t$$

$$G_4(t, j) = B_j [l_j^{*2}/2 - 2l_j^* t/3 + ((l_0^{*2} - l_j^{*2})/4 + 2l_j^* t/5 - t^2/6)t^2/l_0^{*2}] t^2$$

Таблица 2

N_1/N_2	$^{\circ}/_1$	$^{\circ}/_2$	$^{\circ}/_4$	$^{\circ}/_2$	$^{\circ}/_4$	$^{\circ}/_1$	$^{\circ}/_3$
$(l_0)_1/(l_0)_2$	2,33	1,70	1,26	1,35	0,54	1,37	0,75
$(rm)_1^{1/3}/(rm)_2^{1/3}$	2,32	1,76	1,14	1,55	0,49	1,32	0,88

Таблица 3

N		1	2	3	4	5	6
l_0	экспер.	0,027	0,037	0,039	0,050	0,052	0,063
	теория	0,025	0,034	0,045	0,052	0,051	0,059

$$B_1 = (R^* - \sin \alpha) / (kR^* \cos^2 \alpha), \quad B_2 = (kR^* \sin \alpha)^{-1}$$

где звездочкой обозначены безразмерные величины ($l_0^* = l_0/r$ и так далее). Из первых двух уравнений (3.2) следует соотношение

$$\frac{c_2 [G_1(l_0^*) - G_1(L_2^*) - G_2(l_2^*, 2) + G_2(L_2^*, 2)]}{c_1 [G_1(l_0^*) - G_1(L_1^*) - G_2(l_1^*, 1) + G_2(L_1^*, 1)]} = \frac{R^* - U^2(1 - r_1^* \sin \alpha) (grr_1^* \cos \alpha)^{-1}}{R^* + U^2 \operatorname{tg} \alpha (gr)^{-1}} \quad (3.3)$$

которым мы будем в дальнейшем пользоваться вместо второго уравнения (3.2).

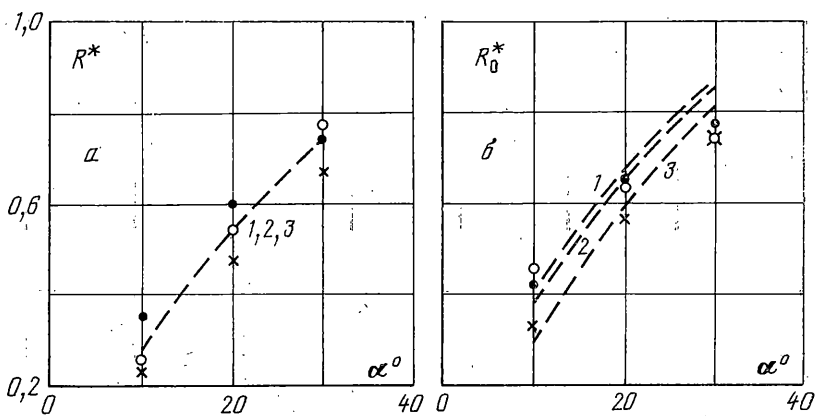
Обратим теперь внимание на то, что зависимости l_2^* , L_1^* , L_2^* от l_1^* , l_0^* являются линейными формами по этим переменным (см. (1.8), (1.11), (1.14)), а функции $G_1(t)$, $G_2(t, j)$ — однородными кубическими формами по переменным t , l_0^* , l_j^* . Отсюда следует, что левая часть уравнения (3.3) после исключения переменных l_2^* , L_1^* , L_2^* будет содержать величины l_1^* и l_0^* лишь в комбинации $\sigma = l_1^*/l_0^*$. Аналогичным свойством обладают первое и третье уравнения (3.2), которые следует разделить на l_0^{*3} и l_0^{*4} соответственно. Исключая теперь c_2/c_1 с помощью третьего уравнения (3.2) из первого уравнения (3.2) и (3.3), получаем в итоге систему уравнений, эквивалентную исходной системе (3.1) при $r_0/a \rightarrow \infty$ (случай лезвия без заточки), в виде (Φ_i — известные функции):

$$\Phi_1(\sigma, R^*, \alpha, k) = mgr(c_1 p_0 l_0^3)^{-1} \quad (3.4)$$

$$\Phi_2(\sigma, R^*, \alpha, k) = U^2 (gr)^{-1}, \quad \Phi_3(\sigma, R^*, \alpha, k) = c_2/c_1$$

Запись уравнений движения в форме (3.4) позволяет сделать ряд качественных выводов о свойствах решений этих уравнений. Прежде всего отметим, что переменные m , g , r , p_0 , l_0 , U , c_1 , c_2 входят в уравнения лишь через три безразмерные комбинации $mgr(c_1 p_0 l_0^3)^{-1}$, $U^2 (gr)^{-1}$, c_2/c_1 . Это заметно упрощает анализ влияния указанных переменных на решение задачи. Далее, предположим, что значения модельных параметров c_1 , c_2 , k , p_0 известны, а величины m , r , U , α заданы ($g = 9,81$ м/с²). Определению подлежит радиус дуги R , по которой будет двигаться конек. В этом случае неизвестными величинами, определяемыми из (3.4), будут l_0 , σ , R^* . Два последних уравнения (3.4) не содержат l_0 , поэтому из них могут быть найдены σ и R^* , после чего l_0 определяется из первого уравнения (3.4) по формуле $l_0 = (mgr)^{1/3} [c_1 p_0 \Phi_1(\sigma, R^*, \alpha, k)]^{-1/3}$.

Поскольку в последние два уравнения (3.4) масса m не входит, то отсюда сразу следует, что траектория движения конька не зависит от приложенной нагрузки, а зависит только от радиуса его овала r , угла наклона α и скорости движения U . Если же $U \rightarrow 0$ (т. е. движение происходит с



Фиг. 4

малой скоростью), то R^* перестает зависеть и от U , и от r , а, следовательно, радиус траектории $R=rR^*$ линейно зависит от r и не зависит от U , при этом величина l_0 всегда пропорциональна $m^{1/2}$, а в случае $U \rightarrow 0$ также и $r^{1/2}$. Отсюда следует, что в опытах с фиксированным углом наклона лезвия и малой скоростью скольжения значения l_0 должны относиться как величины $(rm)^{1/2}$, отвечающие этим опытам. Как видно из таблицы 2, экспериментально полученные для разных N отношения l_0 (см. таблицу 1) близки к предсказываемым теорией. Радиус траектории конька R и величина σ зависят лишь от комбинации c_2/c_1 , в то время как на величину l_0 параметры c_1 , c_2 влияют по отдельности. Полученные выводы относительно свойств решений системы уравнений (3.1) сохраняются и в предположении о возможной зависимости параметров c_1 , c_2 от σ , R^* , α .

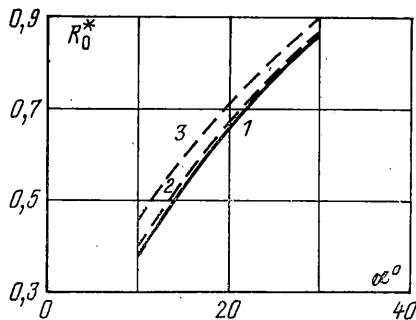
Наличие заточки у лезвия приводит к появлению нелинейной зависимости v_1 и r_1^* от l_0^* , так что проведенный выше качественный анализ задачи, основанный на введении параметра σ , вообще говоря, перестает быть справедливым. В то же время ясно, что нелинейность, возникающая из-за наличия поперечной кривизны нижней грани лезвия, будет проявляться тем в меньшей степени, чем больше радиус заточки, точнее, чем больше величина r_0/a .

На фиг. 4, а приведены значения R^* (лезвия без заточки), а на фиг. 4, б — R_0^* ($r_0=0,01$ м), полученные экспериментально и путем численного решения системы уравнений (3.1) при $W=684$ Н и значениях параметров r , α , r_0 , a , U , отвечающих условиям проведения экспериментов. На фиг. 4 значениям $r=2,2; 1,5; 0,4$ м соответствуют экспериментальные точки и теоретические кривые 1, 2, 3, соответственно. Так как в пределах точности экспериментов заметного влияния веса на радиус траекторий не наблюдалось (см. таблицу 1), то экспериментальные значения R^* и R_0^* на фиг. 4 осреднены по W . Теоретические зависимости на фиг. 4 получены при значениях модельных параметров $c_1=1,18$, $c_2=0,95$, $k=0,045$ и значении $p_0=7$ МПа, взятом из [2, 3]. Вычисленные и измеренные значения величины l_0 указаны в таблице 3. Как видно из фиг. 4 и таблицы 3, при выбранных значениях модельных параметров обеспечивается приемлемое количественное согласие эксперимента и теории во всем исследованном диапазоне варьируемых величин r , α , r_0 , m .

Отметим, что радиусы траекторий скольжения, полученные в результате решения системы (3.1) для заточенных лезвий, в отличие от случая лезвий без заточки, зависят от r , r_0 , a , W . О характере этой зависимости можно судить, сопоставляя между собой расчетные кривые, изображенные на фиг. 4, 5. Расчетные кривые на фиг. 5 получены при $r=1,5$ м и отвечают следующим комбинациям значений W и r_0 : 1 (684; 0,01), 2 (684; 0,009), 3 (300Н; 0,01 м).

Использование предложенной выше модели для описания типичных режимов катания на коньках, характеризующихся достаточно высокими скоростями скольжения и большими радиусами траекторий, предполагает проведение дополнительных исследований с целью определения задаваемых в рамках модели зависимостей параметров c_1 , c_2 , k , p_0 от U и R . Поскольку даже при $U=0,1$ м/с скорости деформации льда под коньком много больше тех, при которых ϵ^* еще влияет на механические свойства льда, модельные параметры k и p_0 можно считать константами, имеющими указанные выше значения, и ограничиться рассмотрением величин c_1 , c_2 . Численные значения параметров c_1 и c_2 зависят от характера выдавливания льда коньком. Не-

смотря на то, что наблюдавшееся в опытах оттеснение льда внутрь поворота происходило более интенсивно, чем наружу, согласно теории и эксперимента было получено при $c_1 > 1 > c_2$. По-видимому это объясняется тем, что при больших скоростях деформации льда, типичных для рассматриваемой задачи, вероятность хрупкого разрушения льда вблизи его свободной поверхности тем выше, чем больше реализующаяся деформация, и в экспериментах тенденция к уменьшению несущей способности льда на внутренней кромке следа за счет его хрупкого разрушения, визуально хорошо наблюдавшегося, оказалась преобладающей. На внешней же кромке следа хрупкое разрушение не наблюдалось и, следовательно, увеличение площади контакта за счет выдавливания льда приводило к увеличению несущей способности этой части зоны контакта. При увеличении с ростом скорости движения радиуса траектории предпочтительные условия для хрупкого разрушения льда возникают на внешней к повороту кромке следа, и в соответствии с изложенными выше соображениями следует ожидать возрастания величины c_2 .



Фиг. 5

Авторы выражают признательность С. С. Григоряну за внимание к работе и полезное обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меллор М. Механические свойства поликристаллического льда // Физика и механика льда. М.: Мир, 1983. С. 202–239.
2. Епифанов В. П. Механика разрушения льда в зависимости от температуры и скорости нагружения // Изв. АН СССР. МГТ. 1984. № 2. С. 188–196.
3. Каргер Д. С. Хрупкое разрушение поликристаллического льда при сжатии // Лед и его воздействие на гидротехнические сооружения. Л.: Всесоюз. НИИ гидротехники, 1972. С. 69–79.

Москва

Поступила в редакцию
16.II.1988