МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1989

УДК 539.3

Ю. П. ЖИГАЛКО, М. М. ТОРОПОВА

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГИХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Дана общая постановка динамической контактной задачи для упругой оболочки произвольной формы. При заданной кинематике движения точек, принадлежащих фиксированной области контакта, выписано обобщенное решение задачи. В классе обобщенных функций построены точные решения ряда динамических и статических задач контактного взаимодействия тонких упругих пластин и безмоментных цилиндрических оболочек с абсолютно твердыми телами. Метод построения решений основан на выделении особенностей контактного давления под штампом путем составления единого аналитического выражения условий деформирования пластины или оболочки и дифференцирования в пространстве обобщенных функций.

Решению статических контактных задач теории упругих пластин и оболочек посвящены работы [1–6].

1. Динамическая контактная задача для упругой оболочки. Пусть безотрывный контакт оболочки с абсолютно твердым телом осуществляется по площадке фиксированной формы и размеров, расположенной на одной из лицевых поверхностей. Обозначим через S односвязную область, занимаемую срединной поверхностью оболочки, через ∂S — контур этой области. Пусть S_σ — площадка контакта, имеющая контур $\partial S_\sigma (S_\sigma \subset S$, $\partial S_\sigma \cap \partial S = \varnothing)$. Действие активных сил и моментов на твердое тело обусловливает определенную кинематику точек, принадлежащих области контакта. Предположим, что эта кинематика известна. На практике нередко встречаются случаи, когда кинематические характеристики движения точек, принадлежащих области контакта, замерить проще, чем определить активное силовое воздействие на присоединенное тело.

В качестве математической модели динамического поведения упругой оболочки используем операторную модель [7]:

$$A\mathbf{U}^{\cdot\cdot}+C\mathbf{U}=\mathbf{F} \tag{1.1}$$

где A, C — соответственно инерционный и упругий операторы, определенные на классе функций, удовлетворяющих граничным условиям на контуре ∂S, $\mathbf{U}$ — искомая вектор-функция, $\mathbf{F}$ — вектор-функция, описывающая внешнее воздействие на оболочку. Предположим, что скалярными компонентами вектор-функции $\mathbf{U}$ являются кинематические величины и кроме того

$$\mathbf{U}=\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2, t); \quad \mathbf{F}=\mathbf{F}(\alpha_1, \alpha_2, t) \quad ((\alpha_1, \alpha_2)\in S)$$

$$\mathbf{U}=\mathbf{U}^+(\alpha_1, \alpha_2, t) \ ((\alpha_1, \alpha_2)\in S_\sigma), \ \mathbf{U}=\mathbf{U}^-(\alpha_1, \alpha_2, t) \ ((\alpha_1, \alpha_2)\in S\backslash S_\sigma) \tag{1.2}$$

где α_1, α_2 — гауссовы координаты точек срединной поверхности, t — время, $U^+(\alpha_1, \alpha_2, t)$ — заданная функция своих аргументов, вектор-функция $U^-(\alpha_1, \alpha_2, t)$ представляет собой решение краевой задачи для однородного уравнения

$$A\mathbf{U}^{-\,\cdot\cdot}+C\mathbf{U}^-=0 \tag{1.3}$$

На контуре ∂S она удовлетворяет определенным условиям закрепления, которые считаются заданными. На контуре ∂S_σ функция $\mathbf{U}^-$ должна удовлетворять условиям отсутствия разрывов в перемещениях и углах поворота при переходе из области $S\backslash S_\sigma$ в область S_σ. Эти условия должны обеспечивать корректность постановки краевой задачи для уравнения (1.3). Тогда функция $\mathbf{U}$ будет единственным образом определена как в области S_σ, так и в области $S\backslash S_\sigma$.

Чтобы построить решение контактной задачи в описанной выше постановке, условия (1.2) объединим в одно, используя фильтрующее свойство дельта-функции:

$$\mathbf{U}(\alpha_1,\alpha_2,t)=\iint\limits_{S_\sigma}\{\mathbf{U}^+(\alpha_1^\circ,\alpha_2^\circ,t)-\mathbf{U}^-(\alpha_1^\circ,\alpha_2^\circ,t)\}\delta(\alpha_1-\alpha_1^\circ,\alpha_2-\alpha_2^\circ)\times$$
$$\times d\alpha_1^\circ\, d\alpha_2^\circ+\mathbf{U}^-(\alpha_1,\alpha_2,t)\quad((\alpha_1,\alpha_2)\in S,\quad(\alpha_1^\circ,\alpha_2^\circ)\in S_\sigma) \tag{1.4}$$

После подстановки (1.4) в (1.1) с учетом (1.3) получим

$$\mathbf{F}=A\left\{\iint\limits_{S_\sigma}(\mathbf{U}^{+\cdot\cdot}-\mathbf{U}^{-\cdot\cdot})\delta(\alpha_1-\alpha_1^\circ,\alpha_2-\alpha_2^\circ)\,d\alpha_1^\circ\, d\alpha_2^\circ\right\}+$$
$$+C\left\{\iint\limits_{S_\sigma}(\mathbf{U}^{+}-\mathbf{U}^{-})\delta(\alpha_1-\alpha_1^\circ,\alpha_2-\alpha_2^\circ)\,d\alpha_1^\circ\, d\alpha_2^\circ\right\}((\alpha_1,\alpha_2)\in S) \tag{1.5}$$

Формулой (1.5) представлено решение рассматриваемой задачи в классе обобщенных функций. Зная вектор-функцию (1.5), можно определить главный вектор и главный момент сил контактного взаимодействия между оболочкой и присоединенным телом. Активная нагрузка, действующая на тело, определится из уравнений движения тела и кинематических условий контакта [8]. При стационарном процессе вынужденных колебаний с частотой ω_f соотношение (1.5) приобретает вид

$$\mathbf{F}=(C-\omega_f^2A)\left\{\iint\limits_{S_\sigma}(\mathbf{U}^{+}-\mathbf{U}^{-})\delta(\alpha_1-\alpha_1^\circ,\alpha_2-\alpha_2^\circ)\,d\alpha_1^\circ\, d\alpha_2^\circ\right\}\quad((\alpha_1,\alpha_2)\in S) \tag{1.6}$$

Решение статической задачи получается отсюда при $\omega_f=0$. Проиллюстрируем описанный алгоритм на конкретных примерах, при этом особое внимание уделим задачам, имеющим точные решения.

2. Пластинка с жесткой накладкой. Путь тонкая упругая пластинка совершает вынужденные колебания под действием нагрузки, передаваемой через жесткую накладку произвольной формы. Обзор и библиография работ по свободным колебаниям пластин и оболочек с жесткими накладками на поверхности имеются в [9—10]. Примем схему гладкого безотрывного контакта, учитывая только нормальную составляющую контактной реакции пластинки. При установившихся колебаниях с частотой ω_f амплитуда прогиба в рамках классической модели Кирхгофа будет удовлетворять уравнению

$$D\Delta\Delta w-\rho h\omega_f^2w=q(x,\ y) \tag{2.1}$$

Здесь D — изгибная жесткость пластинки, Δ — оператор Лапласа, ρh — масса единицы поверхности, q — амплитуда поперечной нагрузки. Допустим, что система активных сил и моментов, действующих на накладку, такова, что она совершает поступательное перемещение в направлении нормали к срединной поверхности пластинки. Амплитуду этого перемещения w° будем считать известной $w^\circ=\mathrm{const}$. Формула (1.4) в данном случае приобретает вид

$$w(x,y,\omega_1)=\iint\limits_{S_\sigma}\{w^\circ-w^-(x^\circ,y^\circ,\omega_f)\}\delta(x-x^\circ,y-y^\circ)\,dx^\circ\, dy^\circ+$$
$$+w^-(x,y,\omega_f)\quad((x,y)\in S,\ (x^\circ,y^\circ)\in S_\sigma) \tag{2.2}$$

Функция $w^-(x,\ y,\ \omega_f)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$D\Delta\Delta w^--\rho h\omega_f^2w^-=0 \tag{2.3}$$

краевым условиям на контуре ∂S и следующим условиям на контуре ∂S_σ ($\partial/\partial n$ — нормальная производная):

$$w^- - w^\circ = 0, \quad \partial w^-/\partial n = 0 \quad ((x, y) \in \partial S_\sigma) \tag{2.4}$$

После подстановки (2.2) в (2.1) получим

$$q(x, y) = (D\Delta\Delta - \rho h\omega_f^2) \iint\limits_{S_\sigma} (w^\circ - w^-) \delta(x - x^\circ, y - y^\circ)\, dx^\circ\, dy^\circ$$

Дифференцирование в правой части этого выражения можно осуществить, используя соотношение эквивалентности

$$\Delta\Delta \iint\limits_{S_\sigma} (w^\circ - w^-) \delta(x - x^\circ, y - y^\circ)\, dx^\circ\, dy^\circ = \iint\limits_{S_\sigma} (w^\circ - w^-) \Delta^\circ\Delta^\circ\delta\, dx^\circ\, dy^\circ$$

и формулу Грина. В итоге будем иметь

$$q(x, y) = (D\Delta\Delta - \rho h\omega_f^2)(w^\circ - w^-) + D \oint\limits_{\partial S_\sigma} \Big[\frac{\partial}{\partial n} \Delta (w^- - w^\circ) \delta(x - x_l, y - y_l) +$$

$$+ \Delta (w^- - w^\circ) \frac{\partial \delta}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial n} (w^- - w^\circ) \Delta\delta + (w^- - w^\circ) \frac{\partial}{\partial n} \Delta\delta \Big] dl_\sigma$$

$$((x, y) \in S_\sigma, \quad (x_l, y_l) \in \partial S_\sigma)$$

Это выражение упрощается, если принять во внимание уравнение (2.3), краевые условия (2.4) и $w^\circ = \text{const}$:

$$q(x, y) = -\rho h\omega_f^2 w^\circ + D \oint\limits_{\partial S_\sigma} \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial n} \Delta w^- \Big) \delta(x - x_l, y - y_l) +$$

$$+ (\Delta w^-) \frac{\partial \delta}{\partial n} \Big] dl_\sigma \quad ((x, y) \in S_\sigma, \quad (x_l, y_l) \in \partial S_\sigma) \tag{2.5}$$

Здесь первое слагаемое в правой части описывает регулярную часть решения, а контурный интеграл — его сингулярную часть. Активная сила P, действующая на накладку, определяется из уравнения движения центра масс присоединенного тела

$$P = -m\omega_f^2 w^\circ + \iint\limits_{S_\sigma} q(x, y)\, dx\, dy \tag{2.6}$$

Скалярные компоненты главного момента активных сил относительно некоторого полюса (x_1, y_1) будут определяться выражениями

$$M_x = \iint\limits_{S_\sigma} q(x, y)(y - y_1)\, dx\, dy$$

$$M_y = \iint\limits_{S_\sigma} q(x, y)(x - x_1)\, dx\, dy \quad ((x_1, y_1) \in S_\sigma) \tag{2.7}$$

3. Контакт круглой пластинки с осесимметричным телом. Как частный случай из соотношений (2.5)—(2.7) при $\omega_f = 0$ вытекает решение статической контактной задачи. Более детально рассмотрим применение описанного выше алгоритма к решению осесимметричной контактной задачи для круглой пластинки.

Пусть пластинка нагружается силой P через штамп, представляющий собой произвольное тело вращения с выпуклой поверхностью. Сила P приложена вдоль оси вращения, напряженное состояние пластинки предполагается осесимметричным. Условия плотного прилегания пластинки к штампу в области контакта запишем в общем виде

$$w(r)=w^+(r)\quad (0\leqslant r\leqslant r_0) \tag{3.1}$$

Здесь функция $w^+(r)$ считается зависящей от формы штампа и от его смещения (r — полярный радиус, r_0 — размер области контакта). Контактное давление, передаваемое штампом на пластинку, определяется формулой, вытекающей непосредственно из уравнения равновесия:

$$q(r)=D\Delta_r\Delta_r\{[H(r-r_0)-1]\,(w^- - w^+)+w^-\}\quad (0\leqslant r\leqslant a) \tag{3.2}$$

$$\Delta_r\equiv\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)$$

Здесь $H(r-r_0)$ — функция Хевисайда, $w^-(r)$ — решение однородного уравнения $D\Delta_r\Delta_r w^-=0$ $(r_0\leqslant r\leqslant a)$, удовлетворяющее определенным условиям на контурах $r=a$ и $r=r_0$. На контуре $r=a$ (a — радиус пластинки) поставим условия защемления: $w^-(a)=0$, $(dw^-/dr)|_{r=a}=0$, на контуре $r=r_0$ должны быть выполнены следующие условия: $w^-(r_0)-w^+(r_0)=0$, $(dw^-/dr-dw^+/dr)|_{r=r_0}=0$.

Выполняя дифференцирование обобщенных функций в правой части (3.2), получим

$$D^{-1}q(r)=H(r_0-r)\,\Delta_r\Delta_r w^+ + \{d/dr\,\Delta_r(w^- - w^+)\}|_{r=r_0}\delta(r-r_0)+$$
$$+\{\Delta_r(w^- - w^+)\}_{r=r_0}r_0r^{-1}\delta'(r-r_0)\quad (0\leqslant r\leqslant a) \tag{3.3}$$

При получении выражения (3.3) использованы известные из теории обобщенных функций соотношения эквивалентности $\delta(r-r_0)=H'(r-r_0)$, $f(r)\delta(r-r_0)=f(r_0)\delta(r-r_0)$.

Рассмотрим частный случай штампа в форме параболоида вращения. Формула (3.1) преобразуется к виду

$$w(r)=w^+(r)=w_0-{}^1/_4 w_1 r^2\quad (0\leqslant r\leqslant r_0) \tag{3.4}$$

Здесь w_0 — осадка штампа, w_1 — параметр его формы. Из (3.3) получим

$$D^{-1}q(r)=q_0\delta(r-r_0)+m_0r_0r^{-1}\delta'(r-r_0) \tag{3.5}$$

$$q_0=8r_0^{-1}[(a^2-r_0^2)w_0+{}^1/_2 w_1a^2r_0^2\ln(r_0/a)]\,d^{-1}$$

$$m_0=[w_1a^2(a^2-r_0^2+2r_0^2\ln(r_0/a))+4w_0(a^2-r_0^2+2a^2\ln(r_0/a))]\,d^{-1}$$

$$d=(a^2-r_0^2)^2-(2ar_0\ln(r_0/a))^2$$

Сравнивая (3.5) с результатом решения рассматриваемой задачи из [1], убеждаемся в том, что в структуре контактного давления присутствует дополнительный член, описывающий сосредоточенный момент, распределенный по контуру области контакта. В [1] стыковка смещений штампа и пластинки осуществлялась по кривизнам, и из этого условия выведено соответствующее интегральное уравнение. Стыковка смещений по формуле (3.4) требует введения нового параметра — осадки штампа w_0. Решение задачи зависит от четырех параметров: P, r_0, w_0, w_1. Два из них могут быть заданы заранее (например, сила P и параметр формы w_1 или осадка w_0 и размер области контакта r_0). Для определения двух оставшихся параметров необходимо привлечь статическое соотношение, характеризующее равновесие штампа

$$2\pi\int_0^{r_0} q(r)\,r\,dr=P \tag{3.6}$$

и дополнительное условие гладкости изогнутой поверхности в виде $m_0=0$. Из условия (3.6) получаем

$$(16\pi D)^{-1}P=[(a^2-r_0^2)w_0+{}^1/_2 w_1a^2r_0^2\ln(r_0/a)]\,d^{-1} \tag{3.7}$$

Интересно отметить, что данное соотношение допускает предельный переход при $r_0 \to 0$. В пределе из (3.7) получается известная зависимость между силой P, приложенной в центре защемленной пластинки, и прогибом в точке ее приложения [11]. Приравнивание нулю момента m_0 приводит к следующей зависимости осадки штампа от параметра формы и величины области контакта:

$$w_0 = -{}^1/_4 w_1 a^2 [a^2 - r_0^2 + 2r_0^2 \ln (r_0/a)] [a^2 - r_0^2 + 2a^2 \ln (r_0/a)]^{-1} \tag{3.8}$$

Если заданы параметр формы w_1 и величина области контакта r_0, то формулами (3.7), (3.8) определяются сила, действующая на штамп, и его осадка. Исключая из соотношений (3.7), (3.8) параметр жесткого смещения w_0, приходим к известному результату [1]: $(4\pi D)^{-1}P = -w_1[1-(r_0/a)^2 + 2\ln(r_0/a)]^{-1}$.

4. Нестационарная контактная задача для цилиндрической оболочки. Рассмотрим осесимметричную контактную задачу для безмоментной цилиндрической оболочки. Оболочка совершает продольные колебания под действием нестационарной осевой нагрузки, приложенной к кольцевой жесткой накладке конечной ширины. Задачу будем решать в стержневом приближении, когда динамику оболочки можно описать неоднородным волновым уравнением

$$\partial^2 u/\partial x^2 - (\rho/E)\partial^2 u/\partial t^2 = -(Eh)^{-1}X(x,t) \tag{4.1}$$

где x — продольная осевая координата, u — соответствующая компонента вектора перемещения, ρ — плотность, E — модуль упругости, h — толщина оболочки, X — интенсивность осевой нагрузки. Предположим, что безотрывный контакт оболочки с накладкой осуществляется на интервале $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Введем безразмерную координату $\xi = xl^{-1}$, безразмерное время $\tau = t(E/\rho l^2)^{1/2}$ и параметр нагрузки $F_x = Xl^2(Eh)^{-1}$, где l — длина оболочки. Уравнение (4.1) перепишем в виде $\partial^2 u/\partial\xi^2 - \partial^2 u/\partial\tau^2 = -F_x(\xi, \tau)$. Применим к этому уравнению преобразование Лапласа, считая начальные условия нулевыми (штрихами обозначено дифференцирование по координате ξ):

$$v''(\xi, p) - p^2 v(\xi, p) = -F_x^L(\xi, p)$$

$$v(\xi, p) = \int_0^\infty u(\xi, t)e^{-pt}\,dt, \qquad F_x^L(\xi, p) = \int_0^\infty F_x(\xi, t)e^{-pt}\,dt$$

Если $v(\xi, p) = v^+(\xi, p)$ $(\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2)$, то применяя методику, изложенную в предыдущих пунктах, для изображения контактной осевой нагрузки получим

$$\begin{gathered} F_x^L(\xi, p) = -(d^2/d\xi^2 - p^2)v^+ + (dv^-/d\xi - dv^+/d\xi)_{\xi=\xi_1}\delta(\xi-\xi_1) + \\ + (dv^+/d\xi - dv^-/d\xi)_{\xi=\xi_2}\delta(\xi-\xi_2) \quad (\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2) \end{gathered} \tag{4.2}$$

Поставив на краях условия $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$, из (4.2) будем иметь

$$\begin{gathered} F_x^L(\xi, p) = (p^2 - d^2/d\xi^2)v^+ + [v^+ p \operatorname{cth}(p\xi) - dv^+/d\xi]_{\xi=\xi_1}\delta(\xi-\xi_1) + \\ + [v^+ p \operatorname{cth} p(1-\xi) + dv^+/d\xi]_{\xi=\xi_2}\delta(\xi-\xi_2) \quad (\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2) \end{gathered} \tag{4.3}$$

В частном случае, когда $v^+(\xi, p) = v_0(p)$ $(\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2)$, (4.3) преобразуется к виду

$$F_x^L(\xi, p) = v_0(p)\{p^2 + p \operatorname{cth}(p\xi_1)\delta(\xi-\xi_1) + p \operatorname{cth}(p(1-\xi_2))\delta(\xi-\xi_2)\} \tag{4.4}$$

$$(\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2)$$

Если $v_0(p) = v_1 p^{-2}$, то используя табличные данные [12], можно точно восстановить оригинал изображения (4.4). Переходя снова к размерным величинам, результат запишем в следующем виде:

$$X(x, t) = \rho h v_1\{\delta(t) + v_s[f_1(t)\delta(x-x_1) + f_2(t)\delta(x-x_2)]\} \quad (x_1 \leqslant x \leqslant x_2) \tag{4.5}$$

$$f_1(t) = 2k-1, \quad k-1 < t/2x_1 < k$$

$$f_2(t) = 2k-1, \quad k-1 < t/2(l-x_2) < k \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Величиной v_1=const, имеющей размерность скорости, задается кинематика движения точек, принадлежащих области контакта. Величина $v_s = (E\rho^{-1})^{1/2}$ представляет собой скорость продольных упругих волн в оболочке. Из уравнения движения центра масс накладки находим приложенную к ней активную нестационарную силу, обеспечивающую заданную кинематику (R — радиус оболочки):

$$F(t)=2\pi R\int_{x_1}^{x_2} X(x,t)\,dx=v_1\{m_1\delta(t)+m_s v_s l^{-1}[f_1(t)+f_2(t)]\}$$

Эта формула показывает, что осевое движение с постоянной скоростью v_1 жесткой кольцевой накладки, скрепленной с безмоментной цилиндрической оболочкой, обеспечивается активной нагрузкой, состоящей из мгновенного начального импульса, равного m_1v_1, где m_1 — масса той части оболочки, которая находится в контакте с площадкой нагружения, и разрывной во времени силы, меняющейся по закону (4.5). Моменты скачкообразного изменения величины силы соответствуют приходу в точки $x=x_1$, $x=x_2$ упругих волн, порожденных начальным импульсом и отраженных от торцов оболочки. Величины скачков равны $2m_sv_1v_sl^{-1}$, где m_s — масса всей оболочки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 415 с.
2. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
3. *Попов Г. Я., Толкачев В. М.* Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами. // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 192–206.
4. *Моссаковский В. И., Гудрамович В. С.* Контактные задачи теории оболочек. // Контактная прочность пространственных конструкций. Киев: Наук. думка, 1976. С. 3–40.
5. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. Киев: Наук. думка, 1980. 214 с.
6. *Артюхин Ю. П.* Одномерные контактные задачи для тонкостенных трансверсально-изотропных элементов // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. № 13. С. 62–82.
7. *Болотин В. В.* Общие свойства собственных частот и собственных форм упругих систем // Вибрации в технике. М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. С. 166–177.
8. *Жигалко Ю. П.* Колебания тонкой упругой оболочки с присоединенным твердым телом // Изв. вузов. Математика. 1987. № 5. С. 41–46.
9. *Хотин Я. Я.* Изгиб упругих пластин и оболочек с жестким включением. // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. № 11. С. 41–62.
10. *Антуфьев Б. А.* К расчету колебаний пологой оболочки с жестким включением. // Прикл. механика. 1983. Т. 19. № 9. С. 45–49.
11. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 344 с.

Казань

Поступила в редакцию 3.XII.1987