

УДК 539.3

В. И. ЗАЙЦЕВ

**О КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ СВЯЗАННОЙ ТЕОРИИ
ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И МЕТОДЕ
ЕЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ**

Дано описание разработанного автором численного метода решения квазистатических контактных задач связанной теории температурных напряжений с трением. Метод может быть использован в практических приложениях при оценке работоспособности реальных конструкций сложной формы, при реализации контактного взаимодействия в общем виде, с учетом присутствия зон зазора, проскальзывания и сцепления. Некоторые вопросы термомеханического контакта деформируемых тел рассматривались в [1-5].

1. Постановка контактной задачи связанной теории температурных напряжений. Известно, что неустановившиеся процессы нагружения и (или) нагрева твердого деформируемого тела порождают связанность полей механической природы и поля температуры. Математически этот эффект при не очень быстром нагружении (нагреве), когда инерционными членами в уравнениях движения можно пренебречь, описывается системой связанных (за счет присутствия в уравнении теплопроводности дилатационного члена $-T_0\beta_{ij}\epsilon_{ij}$) дифференциальных уравнений квазистатической термоупругости [6]:

$$\frac{1}{2}E_{ijkl}(u_{k,i}+u_{l,h})_{,j}+X_i=\beta_{ij}T_{,j} \quad (1.1)$$

$$K_{ij}T_{,ij}-C_e T'-T_0\beta_{ij}\epsilon_{ij}'=-W \quad (1.2)$$

где E_{ijkl} — тензор упругих постоянных; u_i , X_i — соответственно компонента вектора перемещения и объемной силы; T — приращение температуры по сравнению с температурой естественного состояния T_0 ; $\epsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$ — тензор деформации; $\beta_{ij}=E_{ijhl}\alpha_{hl}$, α_{hl} — тензор теплового расширения; K_{ij} — тензор теплопроводности; C_e — теплоемкость при постоянной деформации; W — мощность источников тепла.

Иногда вкладом поля скоростей деформаций в уравнение теплопроводности пренебрегают и, таким образом, эффект связанности пропадает. В этом случае уравнение (1.2) для установившегося ($T'=0$) теплового процесса приобретает вид

$$K_{ij}T_{,ij}=-W \quad (1.3)$$

Иначе дело обстоит при рассмотрении тела с трещинами, берега которых могут взаимодействовать, и при рассмотрении взаимодействия системы тел. Рассмотрим систему N упругих тел конечных размеров, занимающих области $\Omega^1, \dots, \Omega^N$ с границами $S^1=\partial\Omega^1, \dots, S^N=\partial\Omega^N$. В недеформированном состоянии тела могут либо не соприкасаться между собой, либо соприкасаться по областям, определяемым по их геометрической форме. К рассматриваемой системе тел прикладываются механические (заданные объемные и поверхностные силы, перемещения на границе) и тепловые (заданные тепловыделение, потоки тепла, температура и конвективный теплообмен на границе) нагрузки, возрастающие достаточно медленно от нулевых до своих окончательных значений. Эти нагрузки предполагаются такими, чтобы перемещения и деформации можно было считать малыми. В системе тел возникает термомеханическое взаимодействие, которое характеризуется возникновением, исчезновением и изменением областей контакта (проскальзывания и сцепления), распределенных

по этим областям контактных напряжений и контактных потоков тепла, диссипацией механической энергии в процессе трения. При этом вкладом выделения тепла при трении в общий тепловой баланс системы тел пренебрегаем, так как процесс нагружения считается достаточно длительным. Задача состоит в определении напряженно-деформированного состояния и теплового состояния каждого из тел, а также формы и размеров зон проскальзывания и сцепления, распределенных по ним контактного давления и потоков тепла. Очевидно, что данную задачу можно трактовать, в определенном смысле, как обобщение на случай температурных напряжений известной задачи Синьборини [7].

Пусть Ω — объединение областей $\Omega^1, \dots, \Omega^N$, а S — объединение S^1, \dots, S^N . В общем случае границу S можно представить в виде двух покрытий $S = S_u \cup S_\sigma \cup S_c$, $S = S_T \cup S_q \cup S_h \cup S_c$, где S_c — совокупность предельно возможных зон контакта, а на $S_u, S_\sigma, S_T, S_q, S_h$ заданы граничные условия классического типа

$$\begin{aligned} u(x, t) &= g^T(x, t) \quad (x \in S_u), \quad \sigma_{ij} n_j = p_i^T(x, t) \quad (x \in S_\sigma) \\ T(x, t) &= \varphi^T(x, t) \quad (x \in S_T), \quad q_i n_i = \psi^T(x, t) \quad (x \in S_q) \\ q_i n_i &= K_h [T(x, t) - T_h] \quad (x \in S_h), \quad t \in [0, \tau] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь x — радиус-вектор точки Ω по отношению к системе координат, общей для всех тел; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, связанные с вектором перемещения $u(x, t)$ и температурой T соотношениями Дюгамеля — Неймана

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} T \quad (1.5)$$

n_i — компоненты вектора единичной нормали к S , внешней к Ω ; $g^T(x, t)$ — заданные на S_u перемещения (в дальнейшем для упрощения выкладок полагаем $g^T = 0$); $p_i^T(x, t)$ — компоненты заданных на S_σ поверхностных усилий; q_i — компоненты теплового потока, связанные с температурой T законом Фурье $q_i = -K_{ij} T_{,j}$; φ^T — заданная на S_T температура; ψ^T — заданный на S_q поток тепла; последнее граничное условие соответствует теплообмену с окружающей средой, причем K_h, T_h — соответственно коэффициент теплообмена с окружающей средой и температура окружающей среды; повторяющиеся латинские индексы означают суммирование от единицы до $n=2, 3$.

Границу S_c можно представить как объединение взаимно непересекающихся областей $S_c = S_{op} \cup S_{c1} \cup S_{c2}$, где S_{op}, S_{c1}, S_{c2} — соответственно зоны зазора, проскальзывания и сцепления. При нагружении системы тел границы, отделяющие эти зоны друг от друга, движутся по S_c , вследствие чего рассматриваемая задача относится к классу граничных задач со свободными границами.

Контактные механические граничные условия будут иметь вид

$$\begin{aligned} u_n^\xi - u_n^\eta + h &> 0, \quad p_i = 0 \quad (x \in S_{op}) \\ u_n^\xi - u_n^\eta + h &= 0, \quad p_n \leq 0 \quad (x \in S_{c1} \cup S_{c2}) \\ |p_\tau| &< -\mu p_n, \quad l_\tau^* = u_\tau^{*\xi} - u_\tau^{*\eta} \quad (x \in S_{c2}) \\ |p_\tau| &= -\mu p_n, \quad l_\tau^* = -\lambda |p_\tau| / |p_n| \quad (x \in S_{c1}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

где p_τ, p_n — касательная и нормальная компоненты контактного напряжения; μ — коэффициент трения; u_n^ξ, u_τ^ξ — нормальная и касательная компоненты перемещения точки $x \in S_c^\xi$; u_n^η, u_τ^η — компоненты перемещения сопутствующей ей точки $x \in S_c^\eta$; h — начальный зазор между телами ξ и η (считаем, что $\xi \leq \eta$); λ — скалярный множитель; точка означает дифференцирование по времени (параметру нагружения); l_τ — тангенциальное проскальзывание.

Рассмотрим температурные условия на S_c . В случае контакта тел ξ, η предполагаем, что количество тепла, передаваемого телом ξ в единицу времени с единицы площади S_c телу η прямо пропорционально разности

температур тел в сопутствующих точках:

$$q_n^{\xi} = \omega(T^{\xi} - T^n), \quad q_n = q_i n_i, \quad q_n^{\xi} + q_n^n = 0 \quad (1.7)$$

Коэффициент пропорциональности ω представляет собой коэффициент контактной теплопроводности, который является функцией механического состояния границы взаимодействия S_c :

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1(\gamma) \quad (\gamma > 0), \quad \omega = \omega_2(p_n) \quad (\gamma = 0) \\ \omega_1(0) &= \omega_2(0), \quad \gamma = h - u_n^{\xi} - u_n^n \end{aligned} \quad (1.8)$$

Уравнения (1.1), (1.3), (1.5) вместе с граничными условиями (1.4), (1.6), (1.7) описывают контактную задачу связанной теории температурных напряжений. Связанность задачи прослеживается в зависимости коэффициента контактной теплопроводности ω и, следовательно, температурного поля от механического состояния границы взаимодействия S_c и, наоборот, в зависимости механического состояния от изменения поля температуры. В случае присутствия высокоинтенсивных тепловых процессов, количественное взаимовлияние механических и тепловых полей может быть достаточно сильным, что отличает задачу от классической квазистатической термоупругости.

2. Метод решения. Для решения задачи используется инкрементальная формулировка, основанная на методе последовательных нагружений. В рамках этого метода решение на интеграле времени $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ осуществляется следующим образом. На основе известного на предыдущем шаге нагружения коэффициента контактной теплопроводности ω можно для момента времени t_{i+1} , решив уравнение (1.3), найти поле температуры и его приращение ΔT , являющееся образом отображения

$$\Delta T = L(T_i, \omega) \quad (2.1)$$

Подставляя ΔT в правую часть уравнений равновесия (1.1), найдем единственное решение Δu , приращение механического состояния границы взаимодействия ΔM и само механическое состояние $M = \gamma$ ($\gamma > 0$), $M = p_n$ ($\gamma = 0$) являющееся образом отображения

$$M = H(M_i, \Delta T) \quad (2.2)$$

Учитывая связь $\omega = \chi(M)$, получим

$$\omega^* = \chi H L(M_i, T_i, \omega) = U(\omega) \quad (2.3)$$

где $U(\omega)$ — контактный термомеханический оператор.

Таким образом, решение задачи на шаге Δt сводится к нахождению неподвижной точки оператора U . Эта неподвижная точка находится итерационно, последовательным решением тепловой (2.1) и механической (2.2) задач.

Метод решения механической задачи основан на построении некоторого смешанного энергетического функционала, седловая точка которого определяется по методу Лагранжа системой конечно-элементных уравнений

$$\begin{bmatrix} K^1 & & & & & \\ & K^2 & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & K^N & & \\ K^{c1} & K^{c2} & \dots & K^{cN} & K^{cc} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K^{1c} \\ K^{2c} \\ \vdots \\ K^{Nc} \\ K^{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta q^1 \\ \Delta q^2 \\ \vdots \\ \Delta q^N \\ \Delta R^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta Q^1 \\ \Delta Q^2 \\ \vdots \\ \Delta Q^N \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

где Δq^{η} , ΔQ^{η} ($\eta = 1, \dots, N$) — соответственно векторы приращения перемещений узлов и внешних (температурных) нагрузок, ΔR^* — вектор приращения контактного решения, элементы которого в зависимости от контактных условий имеют качественно различные значения (приращения относительных перемещений, либо приращения напряжений в контактных узловых парах) и формируются из множителей Лагранжа.

Способ получения (2.4), структура матриц K^n , K^{nc} , K^{cn} , K^{cc} и вектора ΔR^* описаны в [8]. Определение приращения механического состояния контактной границы S_c сводится к частичному решению системы уравнений (2.4) (нахождению ΔR^*), а приращение механического состояния во всей области Ω — к полному решению этой системы. При этом используется алгоритм [9].

3. Решение тепловой задачи. Для решения тепловой задачи на интервале времени Δt рассмотрим конечноэлементную аппроксимацию двухмерного варианта задачи (1.3), (1.4), (1.7). Для конечного элемента e тела ξ , образующего (в общем случае) с элементом e' тела η контактно-элементную пару m имеем

$$T = \psi^q T_{\xi^q} \quad (q=1, \dots, n) \quad (3.1)$$

где n — число узлов элемента, ψ^q — базисные функции, T_{ξ^q} — узловые температуры.

Рассмотрим случай, когда глобальные оси координат совпадают с главными направлениями тензора K_{ij} . Умножим уравнение (1.3) на ψ^p и, с учетом (3.1), проинтегрируем его по области, занятой элементом e . Применяя далее формулу Грина, получим

$$\int_{S^e} \left(K_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) \psi^p dS + \int_{\Omega^e} W \psi^p d\Omega - \\ - \int_{\Omega^e} \left(K_x \frac{\partial \psi^q}{\partial x} \frac{\partial \psi^p}{\partial x} + K_y \frac{\partial \psi^q}{\partial y} \frac{\partial \psi^p}{\partial y} \right) T_{\xi^q} d\Omega = 0$$

Первый интеграл этого выражения преобразуем с учетом граничных условий (1.4), (1.7):

$$\left(\int_{\Omega^e} \left(K_x \frac{\partial \psi^q}{\partial x} \frac{\partial \psi^p}{\partial x} + K_y \frac{\partial \psi^q}{\partial y} \frac{\partial \psi^p}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{S_h^e} K_h \psi^q \psi^p dS \right) T_{\xi^q} + \\ + (T_{\xi^q} - T_{\eta^q}) \int_{S_c^m} \omega \psi^q \psi^p dS = \int_{S_h^e} K_h T_h \psi^p dS + \int_{\Omega^e} W \psi^p d\Omega - \int_{S_q^e} \psi^q \psi^p dS \quad (3.2)$$

Суммируя выражения (3.2) по всем конечным элементам системы тел, получим систему уравнений тепловой задачи

$$\|K + G(\omega)\| [T] = [Q] \quad (3.3)$$

$$\|K\| = \sum_e \left(\int_{\Omega^e} \left(K_x \frac{\partial \psi^q}{\partial x} \frac{\partial \psi^p}{\partial x} + K_y \frac{\partial \psi^q}{\partial y} \frac{\partial \psi^p}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{S_h^e} K_h \psi^q \psi^p dS \right) \|G(\omega)\| = \\ = \sum_m \|G_m\|, \quad \|G_m\| = \begin{vmatrix} D_m & -D_m \\ -D_m & D_m \end{vmatrix}$$

$$\|D_m\| = \int_{S_c^m} \omega \psi^q \psi^p dS, \quad [Q] = \sum_e \left(\int_{S_h^e} K_h T_h \psi^p dS + \int_{\Omega^e} W \psi^p d\Omega - \int_{S_q^e} \psi^q \psi^p dS \right)$$

Система уравнений (3.3) нелинейна, так как ω является функцией времени (параметра нагружения). Для ее решения в рамках метода последовательных нагружений можно использовать какую-либо аппроксимационную схему (явную, неявную, Кранка — Никольсона, метод Галеркина). При этом система приобретает вид

$$\|a_1 K + a_2 G_i + a_3 G_{i+1}\| [T]_{i+1} = \\ = -\|b_1 K + b_2 G_i + b_3 G_{i+1}\| [T]_i + c_1 [Q]_i + c_2 [Q]_{i+1} \quad (3.4)$$

В частности, для полностью неявной схемы коэффициенты имеют значение $a_1 = a_3 = c_2 = 1$, $a_2 = b_1 = b_2 = b_3 = c_1 = 0$; для метода Галеркина $a_1 = c_2 = 2/3$, $a_2 = b_2 = b_3 = 1/6$, $a_3 = 1/2$, $b_1 = c_1 = 1/3$.

Система уравнений (3.4) решается по методу Краута с модификацией на каждой итерации только тех областей матрицы, которые изменяют свои значения.

4. Итерационный способ определения неподвижной точки контактного оператора. Не останавливаясь конкретно на вопросах существования и единственности неподвижной точки контактного оператора U , опишем метод, с помощью которого она находится. В пп. 2, 3 показано, что решение системы уравнений (2.4) эквивалентно нахождению образа отображения H , а решение системы уравнений (3.4) эквивалентно нахождению образа отображения L . Для решения задачи первоначально использовалась итерационная схема

$$\omega^{i+1} = U(\omega^i) \quad (4.1)$$

С помощью численных экспериментов было установлено, что сжимаемость отображения U сильно зависит от вида задачи, конкретной системы нагружающих воздействий, поведения функции $\omega(M)$ и обеспечивается далеко не всегда. Для некоторых задач были получены значения $|U'|$, значительно превышающие единицу, при которых итерационный процесс (4.1) расходился.

Более устойчивая и быстрая сходимость к неподвижной точке была получена с помощью достаточно гибкого итерационного процесса:

$$\begin{aligned} \omega^1 &= U(\omega_*^0) \\ \omega_*^1 &= \omega_*^0(1-g_1) + \omega^1 g_1 \\ \omega^2 &= U(\omega_*^1) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \omega^i &= U(\omega_*^{i-1}), \quad \omega_*^i = \omega_*^{i-1}(1-g_i) + \omega^i g_i \\ g_i &= (1 - \operatorname{tg} \alpha_i)^{-1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_i = (\omega^i - \omega^{i-1}) / (\omega_*^{i-1} - \omega_*^{i-2}) \end{aligned}$$

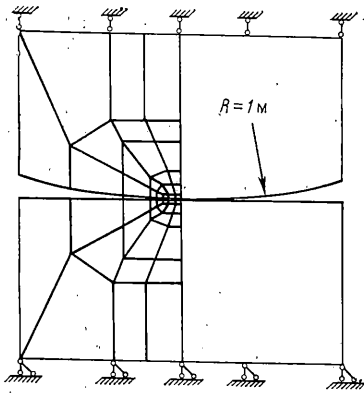
При этом для коэффициентов g_i условие $U' \leq 0$, всегда обеспечивающееся при решении задачи, накладывает ограничение $0 < g_i \leq 1$. При плохом начальном приближении для получения сходимости процесса (4.2) первые 3–4 итерации лучше проводить с постоянным значением $g = \text{const}$, которое для каждой задачи выбирается экспериментально. Выбор производится с учетом того, что достаточно малые значения g дают медленно сходящийся итерационный процесс, а при достаточно больших g возможна расходимость. Применение такого постоянного значения связано с тем, что на первых итерациях вариация $\operatorname{tg} \alpha_i$ может быть достаточно большой, что приводит к расходимости.

Собственно итерационный процесс нахождения неподвижной точки осуществляется следующим образом. Сначала для первой итерации по известному механическому состоянию M_i границы S_0 определяем матрицу $G_i = G(\omega_i)$ и матрицу $G_{i+1} = G(\omega_{*, i+1}^0)$, в которой $\omega_{*, i+1}^0 = \omega_i + (\omega_i - \omega_{i-1})(\Delta t_{i-1} / \Delta t_i)$. Решая систему уравнений (3.4), находим поле температуры T_{i+1}^0 и соответствующее приращение $\Delta T_{i+1}^0 = T_{i+1}^0 - T_i$. Далее, решая механическую задачу, находим приращение механического состояния границы взаимодействия ΔM . Определяем новые значения

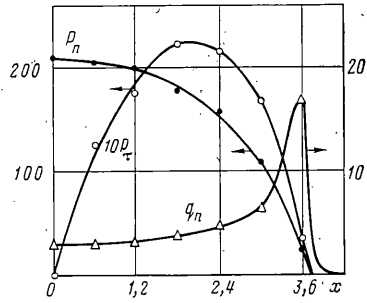
$\omega_{i+1}, \omega_{*, i+1}^1, G_{i+1}$, решаем систему уравнений (3.4), и так до тех пор, пока не будет удовлетворен заданный критерий точности.

Описанная методика решения контактных задач связанной теории температурных напряжений реализована в программном комплексе, ориентированном на решение двухмерных задач с использованием восьмиузловых изопараметрических конечных элементов.

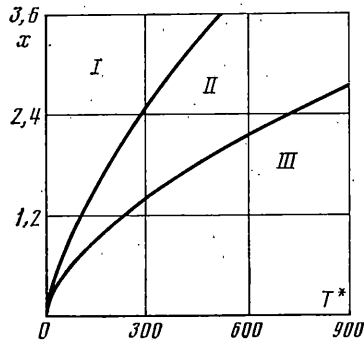
Рассмотрим решение задачи о связанном термоупругом взаимодействии части цилиндра радиусом $R=100$ см, имеющей размеры 30×60 см, с таким же по размерам основанием. Расчетная схема задачи и применяемая конечноэлементная аппроксимация показаны на фиг. 1. Конечно-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

элементная аппроксимация содержит 92 восьмиузловых изопараметрических элемента и 326 узлов. Сопряжение взаимодействующих тел вдоль предельно возможной контактной зоны S_c осуществлялось с помощью 21 контактной узловой пары (опозитных друг другу узлов на контактных поверхностях). При нагружении температура верхнего сечения части цилиндра постепенно возрастает от нуля до 900°C , температура нижнего сечения основания постоянна и равна нулю. В результате разогрева тела увеличивают свои размеры и начинают взаимодействовать, возрастает зона контакта, контактное давление и контактный поток тепла, изменяется напряженно-деформированное состояние системы тел и поле температуры.

Коэффициент контактной теплопроводности принимался равным $\omega = -0,24 \cdot 10^{-5} (0,3 \cdot 10^{-5} + \gamma)^{-1}$ при $\gamma > 0$ и $\omega = 0,8 + 0,24 p_n$ при $\gamma = 0$, где γ в см., а p_n в МПа. Коэффициенты теплового расширения и теплопроводности цилиндра и основания соответственно имели значения $-\alpha_1 = \alpha_2 = 1,2 \cdot 10^{-5}$ град $^{-1}$ и $K_1 = K_2 = 0,18$ Вт·см $^{-1}$ ·град $^{-1}$; механические характеристики для цилиндра — модуль Юнга $E_1 = 2 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu_1 = 0,4$ и для основания соответственно — $E_2 = 2 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_2 = 0,2$; коэффициент трения $\mu = 0,155$.

На фиг. 2 для момента нагружения, соответствующего температуре верхнего сечения цилиндра равной 540°C , показаны зависимости контактного давления (МПа), усилий трения (МПа) и контактного потока тепла (Вт/см 2) от координаты зоны контакта x (см), отсчитываемой от оси симметрии. Видно, что на значительной части области контакта у оси симметрии поток тепла постоянен и резко возрастает у границы контактной области. Эти данные аналогичны результату, полученному в [4] при решении термоупругой задачи Герца.

При решении задачи области проскальзывания и сцепления определяются контактными условиями в узловых парах с точностью до расстояния между соседними узлами на контактной границе. При необходимости

размеры этих областей можно уточнить с помощью экстраполяции контактного давления и с учетом равенства $p_t = \mu p_n$ по зависимостям $p_n(x)$ и $p_t(x)$. С помощью такого приема была построена диаграмма изменения контактных зон, показанная на фиг. 3. При пользовании этой диаграммой для заданной температуры верхнего сечения части цилиндра нужно провести ординату. Тогда зависимости на фиг. 3 делят эту ординату на части, положение и размеры которых соответствуют положению и размерам зон зазора (I), проскальзывания (II) и сцепления (III) в этот момент нагружения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киликовская О. А. Термоупругости сопряженных тел при теплоотдаче, зависящей от напряжений // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1971.
2. Barber J. R., Dundurs J., Comninou M. Stability considerations in thermoelastic contact // Trans. ASME: J. Appl. Mech. 1980. V. 47, N. 4. P. 871-874.
3. Comninou M., Dundurs J. On Lack of uniqueness in heat conduction through a solid interface // Trans. ASME: J. Heat Transfer 1980. V. 102, N. 2. P. 319-323.
4. Comninou M., Barber J. R. The Thermoelastic hertz problem with pressure dependent contact resistance // Intern. Mech. Sci. 1984. V. 26, N. 11/12. P. 549-554.
5. Duvaut G. Problems in continuum mechanics // Free Boundary Problems: Theory and Applications. London: Pitman, 1983. V. 2. P. 526-533.
6. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
7. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
8. Зайцев В. И., Щавелин В. М. Смешанный вариационный принцип контактной задачи и его применение к построению системы разрешающих уравнений метода конечных элементов // Прочность материалов и элементов конструкций атомных реакторов. М.: Энергоиздат, 1985. С. 20-26.
9. Зайцев В. И., Щавелин В. М. Решение уравнений МКЭ для задачи механического взаимодействия системы деформируемых твердых тел // Проблемы прочности. 1984. № 6. С. 58-62.

Москва

Поступила в редакцию
11.X.1987