

УДК 539.3

В. В. ТВАРДОВСКИЙ

ПРОДОЛЬНЫЙ СДВИГ ТЕЛА, ОСЛАБЛЕННОГО ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОСТРОУГОЛЬНЫМ ДЕФЕКТОМ

Построено решение антиплоской задачи теории упругости для линейно-анизотропных тел с плоскостью упругой симметрии, сечение которых может быть конформно отображено на внутренность или внешность единичной окружности. Рассмотрены случаи ромбовидного отверстия в бесконечной изотропной плоскости, ромбовидного отверстия с исходящими из вершин ромба симметричными микротрещинами, отклоняющейся трещины в анизотропной среде. Найдены соответствующие обобщенные коэффициенты интенсивности напряжений для угловых точек границы.

1. Определение предельных нагрузок на конструкцию с остроугольным макродефектом, а также вопрос о направлении развития макротрещины из исходного макродефекта упирается в создание приемлемых моделей разрушения и формулировку критериев разрушения тел в окрестности угловых точек границы. Определение степени сингулярности напряжений в окрестности угловой точки — вопрос практически решенный (см., например, [1–3]). Задачи вычисления обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений в угловой точке макродефекта в плоской постановке в настоящее время интенсивно исследуются с использованием в основном численных методов (см., например, [4]). Принципиальная возможность определения этих коэффициентов обоснована в [5]. Эта задача сводится к интегральному уравнению [4, 6], решение которого находится численно. В публикуемой работе предлагается аналитическое решение антиплоской задачи теории упругости для линейно-анизотропных тел с плоскостью упругой симметрии, сечение которых может быть конформно отображено на внутренность или внешность единичной окружности.

Рассмотрим задачу продольного сдвига для цилиндрического тела, обладающего прямолинейной анизотропией. При этом будем считать, что тело обладает плоскостью упругой симметрии нормальной к оси цилиндра, которую обозначим Oz . В этом случае плоская и антиплоская задачи становятся независимыми. В произвольной системе координат xOy закон Гука имеет вид

$$\tau_{yz} = c_{44} du_z / dy + c_{45} du_z / dx \quad (1.1)$$

$$\tau_{xz} = c_{45} du_z / dy + c_{55} du_z / dx$$

Согласно [7] всегда возможно выбрать систему координат таким образом, чтобы в ней было выполнено $c_{45} = 0$. До тех пор пока не оговорено противное будем работать именно в этой особой системе координат. Общие выражения для напряжений и смещений можно представить через одну аналитическую функцию $\Phi_0(z_0)$:

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= i(\Phi_0(z_0) - \overline{\Phi_0(z_0)}), & \tau_{xz} &= \kappa(\Phi_0(z_0) + \overline{\Phi_0(z_0)}) \\ u_z &= \eta(\Phi_0(z_0) + \overline{\Phi_0(z_0)}), & \Phi_0(z_0) &= \Phi_0'(z_0) \\ \kappa &= (c_{55}/c_{44})^{1/2}, & \eta &= (c_{44}c_{55})^{-1/2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$z_0 = x_0 + iy_0 = x + ixy$$

Величины вектора усилий τ_n на площадке N с нормалью $n(l, m)$, данные обычными формулами $\tau_n = l\tau_{xz} + m\tau_{yz}$, преобразуются к виду

$$\tau_n = 2(m^2 + \kappa^2 l^2)^{1/2} \operatorname{Re}(e^{i\psi} \Phi_0(z_0)) \quad (1.3)$$

где $e^{i\psi}$ представляет собой вектор нормали к преобразованной площадке N в системе координат $x_0 O y_0$.

Если нормальное сечение цилиндрического тела представляет собой односвязную область (S^+) или бесконечную плоскость с произвольным отверстием (S^-), причем на части L_0 границы области S заданы произвольные усилия $g_0(t_0)$, а на части L_1 — перемещения $v_0(t_0)$ ($t = x + iy$ — аффикс границы $L = L_1 \cup L_0$ физической плоскости), задача отыскания функции $\Phi_0(z_0)$ допускает эффективное решение в квадратурах. В дальнейшем рассматриваем области типа S^- (для S^+ все построения аналогичны).

Пусть функция $z_0 = \omega(\xi)$ осуществляет конформное отображение внешности единичного круга комплексной плоскости ξ на преобразованную область S_0^- плоскости z_0 . Часть границы L_0 соответствует части l_0 единичной окружности $l = l_0 \cup l_1$ плоскости ξ , а L_1 — части l_1 . Внешность единичной окружности обозначим D^- , внутренность — D^+ .

Введем в области D^- функции $\varphi(\xi) = \varphi_0(\omega(\xi))$ и $\Phi(\xi) = \Phi_0(\omega(\xi))$. Аналитичные всюду кроме, быть может, бесконечно удаленной точки. Очевидно, имеет место тождество

$$\varphi'(\xi) = \omega'(\xi) \Phi(\xi) \quad (1.4)$$

При $z_0 \rightarrow \infty$ функция $\Phi_0(z_0)$ представима в виде

$$\Phi_0(z_0) = \Gamma + T z_0^{-1} + O(z_0^{-2}) \quad (1.5)$$

где $2\kappa\Gamma = \tau_{xz}^\infty - i\kappa\tau_{yz}^\infty$ определяет напряженное состояние тела на бесконечности, а $4\pi\kappa T$ есть суммарный вектор усилий, приложенных к контуру L области S^- .

Если в окрестности $\xi = \infty$ имеем $\omega(\xi) = A\xi + O(1)$, то из (1.5) следует, что $\Phi(\xi) = \Gamma + T/A\xi + O(\xi^{-2})$.

В терминах функций $\varphi(\xi)$ и $\Phi(\xi)$ граничные условия на $l = l_0 \cup l_1 : \{|\xi| = 1, |\sigma| = 1\}$ запишутся в форме

$$2\kappa n(\sigma) \operatorname{Re}(\sigma \omega'(\sigma) \Phi(\sigma)) = g(\sigma) |\omega'(\sigma)| \quad (\sigma \in l_0) \quad (1.6)$$

$$2\eta \operatorname{Re} \varphi(\sigma) = v(\sigma) \quad (\sigma \in l_1) \quad (1.7)$$

где σ — аффикс точки единичной окружности плоскости ξ ; $g(\sigma) = g_0(\omega(\sigma))$, $v(\sigma) = v_0(\omega(\sigma))$; $n(\sigma)$ — действительная, ограниченная, нигде не обращающаяся в нуль функция, принимающая в точке $\sigma = \omega^{-1}(t)$ значение $(l^2 + m^2/\kappa^2)^{1/2}$. В случае кусочно-гладкой границы L области S функция $n(\sigma)$ будет, очевидно, кусочно-непрерывной. Продифференцировав (1.7), и, учитывая (1.4), получаем на части l_1 :

$$2i\eta \operatorname{Im}(\sigma \omega'(\sigma) \Phi(\sigma)) = \sigma v'(\sigma) \quad (1.8)$$

Построим функции $\Lambda^+(\xi)$ и $\Lambda^-(\xi)$, аналитичные в областях D^+ и D^- соответственно, следующим образом:

$$\begin{aligned} \Lambda^+(\xi) &= \xi^{-1} \overline{\omega'(\xi^{-1})} \overline{\Phi(\xi^{-1})} - \overline{T} - \overline{A} \overline{\Gamma} \xi^{-1} \\ \Lambda^-(\xi) &= \xi \omega'(\xi) \Phi(\xi) - T - A \Gamma \xi \end{aligned} \quad (1.9)$$

С помощью представлений (1.9) краевая задача (1.6), (1.8) формулируется в виде задачи Гильберта — Римана с разрывными коэффициентами для кусочно-аналитической функции $\Lambda(\xi)$:

$$\begin{aligned} \Lambda^+(\sigma) &= G(\sigma) \Lambda^-(\sigma) + f(\sigma) \\ G(\sigma) &= -1 \quad (\sigma \in l_0), \quad G(\sigma) = 1 \quad (\sigma \in l_1) \\ f(\sigma) &= g(\sigma) |\omega'(\sigma)| / (\kappa n(\sigma)) - 2 \operatorname{Re}(A \Gamma \sigma + T) \quad (\sigma \in l_0) \\ f(\sigma) &= -\sigma v'(\sigma) / \eta + 2i \operatorname{Im}(T + A \Gamma \sigma) \quad (\sigma \in l_1) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Покажем, что задача (1.10) при заданных на всем контуре усилиях ($l=l_0$) либо при заданных перемещениях ($l=l_1$) однозначно разрешима. Если контур L_0 имеет точку заострения $t_c = \omega(\xi_c)$, то в окрестности ξ_c справедливы оценки

$$\begin{aligned}\omega'(\xi) &= B(\xi - \xi_c)^{1-\alpha/\pi} + O((\xi - \xi_c)^{2-\alpha/\pi}) \quad (0 \leq \alpha < \pi) \\ \omega(\xi) &= \omega(\xi_c) + \pi B(2\pi - \alpha)^{-1} (\xi - \xi_c)^{2-\alpha/\pi} + O((\xi - \xi_c)^{3-\alpha/\pi})\end{aligned}\quad (1.11)$$

Из энергетических соображений следует

$$|\Phi_0(z_0)| < M |z_0 - t_c|^{-\lambda} \quad (\lambda < 1, z_0 \rightarrow t_c)$$

откуда для $\Lambda^+(\xi)$ в окрестности ξ_c верно неравенство $|\Lambda^+(\xi)| < N |\xi - \xi_c|^{-\mu}$, где $\mu = (\lambda - 1)(2 - \alpha/\pi) < 1$. Аналогичная оценка справедлива и для $\Lambda^-(\xi)$ в точках ξ_c . Будем также считать, что разрывы функции $f(\sigma)$ интегрируемы. При этих условиях индекс задачи (1.10) равен нулю. Учитывая вышеприведенные оценки, получаем, что решение задачи (1.10) при $l=l_0$ либо при $l=l_1$ всегда существует и представимо в виде [8]:

$$\Lambda^\pm(\xi) = \frac{X(\xi)}{2\pi i} \int \frac{f(\sigma) d\sigma}{X^+(\sigma)(\sigma - \xi)} \quad (\xi \in D^\pm) \quad (1.12)$$

Здесь учтено, что $\Lambda^-(\infty) = 0$, а $X(\xi)$ — каноническая функция однородной задачи (1.10), выбранная в соответствии с физическим смыслом постановки. Индекс смешанной задачи, разумеется, зависит от числа точек, разграничивающих области l_0 и l_1 , и от конкретных условий в этих точках [8]. При ограниченных усилиях и производных перемещений в окрестностях точек ξ_i , разграничивающих части l_0 и l_1 , можно показать, что в окрестности этих точек выполнено $|\Lambda^\pm(\xi)| < N^\pm |\xi - \xi_i|^{-1/2}$.

Далее рассматривается лишь первая основная задача, когда на контуре области заданы усилия. В силу (1.9) находим выражение

$$\Phi(\xi) = (\xi \omega'(\xi))^{-1} [A\Gamma\xi + T + (\Lambda^+(\xi) + \Lambda^-(\xi))/2] \quad (1.13)$$

обеспечивающее определение напряжений и перемещений во всех точках тела.

2. С помощью выражений (1.12), (1.13) рассмотрим напряженно-деформированное состояние в окрестности угловой точки z_{0c} . Если усилия, действующие на контур, в окрестности z_{0c} ограничены, то

$$\begin{aligned}\Phi(\xi) &= C(\xi - \xi_c)^{\alpha/\pi - 1} + O((\xi - \xi_c)^{\alpha/\pi}) \\ \Phi_0(z_0) &= C_0(z_0 - z_{0c})^{-\lambda} + O((z_0 - z_{0c})^{\alpha/(2\pi - \alpha)})\end{aligned}$$

где $\lambda = (\pi - \alpha)/(2\pi - \alpha)$, α — угол между дугами контура в точке z_{0c} плоскости z_0 .

В отличие от изотропного случая в анизотропной среде показатель степени сингулярности напряжений λ зависит не только от угла между сходящимися берегами отверстия, но и от ориентации углового выреза в пространстве. Если тангенсы касательных в угловой точке физической плоскости xOy равны s_1 и s_2 , то для величины α имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = (s_2 - s_1) \kappa (1 + s_1 s_2 \kappa^2)^{-1} \quad (2.1)$$

Для произвольной системы координат x_1Cy_1 в физической плоскости имеет место

$$\operatorname{tg} \alpha = i(\bar{\mu}_0 - \mu_0) (s_2 - s_1) [2 + 2s_1 s_2 \mu_0 \bar{\mu}_0 + (\mu_0 + \bar{\mu}_0)(s_1 + s_2)]^{-1}$$

здесь μ_0 — корень уравнения $c_{44}\mu_0^2 + 2c_{45}\mu_0 + c_{55} = 0$ с положительной мнимой частью, а упругие постоянные c_{44} , c_{45} , c_{55} измерены в системе координат x_1Cy_1 . Если перейти, например, в систему, где ось Cx_1 совпадает с биссектрисой рассматриваемого угла, то выражение для λ удобнее записать в виде

$$\lambda = 1 - \frac{\pi}{\Psi}, \quad \Psi = 2\pi - \operatorname{arctg} \frac{i(\mu_0 - \bar{\mu}_0) \operatorname{tg} \beta/2}{\mu_0 \bar{\mu}_0 \operatorname{tg}^2 \beta/2 - 1} \quad (2.2)$$

где β — угол между берегами отверстия в физической плоскости (фиг. 1; $\operatorname{tg} \beta_1 = s_1$, $\operatorname{tg} \beta_2 = s_2$). В случае изотропного материала имеем $\alpha = \beta$ и выражение для λ совпадает с найденным ранее [2].

Асимптотику напряжений в окрестности C в системе координат $x_1 C y_1$ можно представить так

$$\begin{aligned} \tau_{y_1 z} &= K(2\pi\rho)^{-\lambda} \cos \theta\lambda & (2.3) \\ \tau_{x_1 z} &= -K(2\pi\rho)^{-\lambda} [1/2(\mu_0 + \bar{\mu}_0) \cos \theta\lambda + (2i)^{-1}(\mu_0 - \bar{\mu}_0) \sin \theta\lambda] \\ \rho &= r(\cos^2 \varphi + (\mu_0 + \bar{\mu}_0) \sin \varphi \cos \varphi + \mu_0 \bar{\mu}_0 \sin^2 \varphi)^{1/2} \\ \theta &= \operatorname{arctg} [i(\bar{\mu}_0 - \mu_0) \sin \varphi (2 \cos \varphi + (\mu_0 + \bar{\mu}_0) \sin \varphi)^{-1}] \end{aligned}$$

Для коэффициентов интенсивности K на основании (1.2), (2.3) получаем

$$K = \operatorname{Re} \{ (\cos \gamma + i\kappa \sin \gamma)^{1-\lambda} 2i \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_c} \Phi(\zeta) [2\pi(\omega(\zeta) - \omega(\zeta_c))]^\lambda \}$$

$$\gamma = (\beta_1 + \beta_2)/2 - \text{угол между } Ox \text{ и } Cx_1.$$

Подставляя сюда (1.4) и (1.11), имеем окончательно

$$K = \operatorname{Re} [(\cos \gamma + i\kappa \sin \gamma)^{1-\lambda} 2iB^{-1} (2\pi^2 B / (2\pi - \alpha))^\lambda \varphi'(\zeta_c)] \quad (2.4)$$

обобщающее соответствующий результат [2].

При заданных на берегах отверстия перемещениях или неограниченных усилиях в окрестности z_0 необходим дополнительный анализ.

3. Рассмотрим конкретный пример изотропного тела с макродефектом в виде ромба, внешность которого отображается на внешность единичной окружности функцией [9]:

$$z = \omega(\zeta) = L + aL \int_1^\zeta (\xi^2 - 1)^{1-\alpha/\pi} (1 + \xi^2)^{\alpha/\pi} \xi^{-1} d\xi \quad (3.1)$$

$$\sqrt{\pi} a^{-1} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\pi}\right)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Если контур отверстия свободен от усилий, а на бесконечности действуют постоянные напряжения $\tau_{xz}^\infty - i\tau_{yz}^\infty = 2N$, то на основании (1.12), (1.13) и (3.1) получаем

$$\Phi(\zeta) = (N\zeta^2 - \bar{N}) (\zeta^2 + 1)^{-\alpha/\pi} (\zeta^2 - 1)^{\alpha/\pi - 1}$$

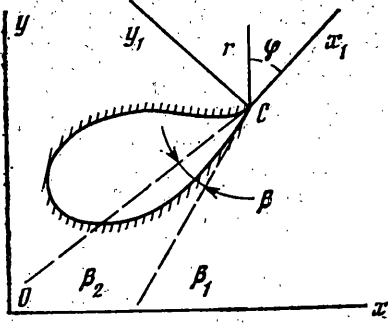
Используя (2.4), получаем коэффициент интенсивности напряжений в точке $z=L$:

$$K = \tau_{yz}^\infty [4\pi^2 aL / (2\pi - \alpha)]^{(\pi - \alpha)/(2\pi - \alpha)}$$

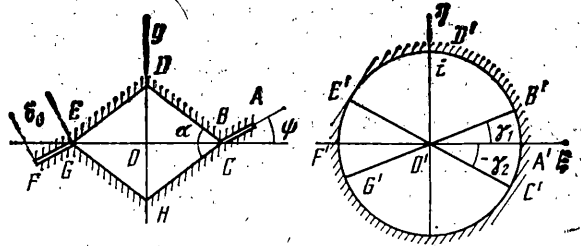
Поместим в противоположных вершинах ромба две симметричные микротрещины размера $\delta_0 \ll L$, составляющие угол ψ с биссектрисой (фиг. 2). Вместо (3.1) для отображающей функции будем иметь

$$z = \omega_1(\zeta) = L + \delta_0 e^{i\psi} + D \int_1^\zeta (\xi^2 - 1) (\xi^2 + 1)^{\alpha/\pi} (\xi^2 - e^{2i\gamma_1})^p (\xi^2 - e^{2i\gamma_2})^q \frac{d\xi}{\xi^2} \quad (3.2)$$

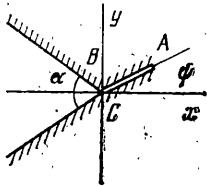
где $p = -\psi/\pi - 1/2\alpha/\pi$, $q = (\psi - \alpha)/\pi$. Точки B и C при отображении (3.2) являются образами точек $e^{i\gamma_1}$ и $e^{i\gamma_2}$ соответственно. Последние не известны, однако, в силу того, что $\delta_0 \ll L$ можно заключить, что $|\gamma_1| \ll 1$, $|\gamma_2| \ll 1$. Вычислим асимптотические значения γ_1 и γ_2 , которые будут точными лишь для малых величин δ_0/L . В этой связи рассмотрим функцию $\omega_0(\zeta_0)$ кон-



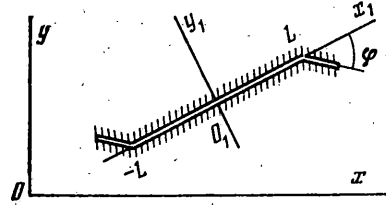
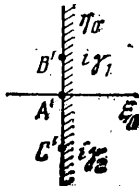
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

формно отображающую полу плоскость $\text{Re } \zeta_0 > 0$ на бесконечную плоскость с вырезанным клином раствора α и надрезом в вершине (Фиг. 3):

$$z = \omega_0(\zeta_0) = \delta_0 \gamma_1^{\alpha/\pi - 2} \varepsilon^{1+q} (\zeta_0 - i\gamma_1)^{1+p} (\zeta_0 - i\gamma_2)^{1+q}$$

$$\varepsilon = (2\pi - \alpha - 2\psi) (2\pi - \alpha + 2\psi)^{-1}$$

Из условия совпадения главных частей функций $\omega_0(\zeta_0)$ и $\omega_1(\zeta_0 + 1) - L$ при малых ζ_0 ($|\zeta_0| = |\zeta - 1| \ll 1$) получаем

$$\gamma_1^{2-\alpha/\pi} = (1 - \alpha/2\pi) (\delta_0/aL) \varepsilon^{1+q}, \quad D = aL$$

$$(-\gamma_2)^{2-\alpha/\pi} = (1 - \alpha/2\pi) (\delta_0/aL) \varepsilon^{-1-p}$$

Функция $\Phi_0(z_0)$ в окрестности точки $z_A = L + \delta_0 e^{i\psi}$ имеет вид

$$\Phi_0(z) = (N - \bar{N}) (2\pi(z - z_A))^{-1/2} \{ 1/2\pi D e^{-i\psi} \varepsilon^{2\psi/(2\pi - \alpha)} \times$$

$$\times [(1 - \alpha/2\pi) (\delta_0/aL)]^{\alpha/(2\pi - \alpha)} \}^{1/2} + O(1)$$

Вычислив коэффициент интенсивности k в кончике микротрещины, и, используя условие Ирвина для начала разрушения в виде $w = K_c = (4G\gamma)^{1/2}$ (γ — поверхностная энергия материала, G — его модуль сдвига), получим значение обобщенного коэффициента интенсивности K в момент разрушения в виде

$$K = 2(2\pi)^\lambda \varepsilon^{\psi/(\alpha - 2\pi)} [G\gamma(2\pi - \alpha)^{-1} \delta_0^{\alpha/(\alpha - 2\pi)}]^{1/2} \quad (3.3)$$

Поиск максимума этого выражения по углу ψ приводит к $\psi_* = 0$, откуда ясно, что разрушение изотропных тел при антиплоской деформации в окрестности угловых точек будет происходить в биссекторных плоскостях при достижении обобщенным коэффициентом интенсивности напряжений K своего критического значения

$$K^* = 2(2\pi)^\lambda [G\gamma(2\pi - \alpha)^{-1} \delta_0^{\alpha/(\alpha - 2\pi)}]^{1/2} \quad (3.4)$$

Величину δ_0 в этой формуле можно интерпретировать как характерный структурный размер. В случае, когда макродефект есть трещина ($\alpha = 0$) (3.4) совпадает с критерием Ирвина $K^* = (4G\gamma)^{1/2} = K_c$. Если граница гладкая ($\alpha = \pi, \lambda = 0$), то (3.4) дает прочность гладкого образца, при

этом δ_0 можно интерпретировать как величину поверхностной микротрещины, а $K(\lambda\delta_0)^{1/2}$ — коэффициент интенсивности k в ее вершине.

Рассмотрим анизотропный случай, ограничившись простейшим случаем макродефекта — произвольно ориентированной трещиной длиной $2L$. Если коэффициент интенсивности напряжений у кончика такой трещины есть K , то при наличии микротрещин в концах, отклоненных на угол φ от ее плоскости (фиг. 4), коэффициенты интенсивности напряжений k в кончиках таких микродефектов будут

$$k = Kf(\varphi) [(\pi - \psi)/(\pi + \psi)]^{\psi/2\pi} \quad (3.5)$$

$$f(\varphi) = (\cos^2 \varphi + (\mu_0 + \bar{\mu}_0) \sin \varphi \cos \varphi + \mu_0 \bar{\mu}_0 \sin^2 \varphi)^{1/4}$$

μ_0 определен в системе координат $(x_1 O_1 y_1)$, а величина ψ представляется следующим образом:

$$\psi = \text{arctg} \{ i(\bar{\mu}_0 - \mu_0) \text{tg} \varphi [2 + (\mu_0 + \bar{\mu}_0) \text{tg} \varphi]^{-1} \}$$

Для начала распространения трещины вдоль микротрещин необходимо [10]:

$$k^2 = k_c^2(\varphi) = 4\gamma(c_{44}'c_{55}' - c_{45}'^2)^{1/2} \quad (3.6)$$

Здесь модули упругости c_{44}' , c_{55}' , c_{45}' определены в системе координат, повернутой относительно $x_1 O_1 y_1$ на угол φ . Комбинируя (3.5) и (3.6), получаем критическое значение коэффициента интенсивности напряжений K :

$$K^*(\varphi) = 2i(\mu_0 - \bar{\mu}_0)^{-1} \sin \psi (\sin \varphi)^{-1} [(\pi + \psi)/(\pi - \psi)]^{\psi/2\pi} \times \\ \times f^{-1}(\varphi) (4\gamma)^{1/2} (c_{44}'c_{55}' - c_{45}'^2)^{1/4}$$

Так как выражение K^* зависит от угла φ даже при $\partial\gamma/\partial\varphi = 0$, то определение угла отклонения φ_* трещины от своей плоскости представляет нетривиальную задачу. Заметим, что в анизотропном случае силовой и энергетический критерии дают различные результаты. Лишь в случае $\partial\gamma/\partial\varphi = 0$ можно надеяться так модифицировать силовой критерий, чтобы он совпал с энергетическим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. Appl. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 526–528.
2. Sih G. C. Stress distribution near internal crack tips for longitudinal shear problems // Trans. ASME. ser. E. J. Appl. Mech. 1965. V. 32. № 1. P. 51–58. Рус. перев.: Сп Дж. Распределение напряжений вблизи концов трещин продольного сдвига // Прикл. механика. 1965. № 1. С. 57–65.
3. Каландия А. И. Замечания об особенностях упругих решений вблизи углов // ПИММ. 1969. Т. 33. Вып. 1. С. 132–135.
4. Арсенян В. А. О напряжениях в бесконечной плоскости и в весовой полуплоскости, ослабленных двумя прямоугольными отверстиями // Докл. АН Арм. ССР. 1982. Т. 74. № 2. С. 66–71.
5. Мазья В. Г., Пламеневский В. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. № 1. С. 33–36.
6. Михайлов С. Е. Решение задач об антиплоской деформации упругих тел с угловыми точками методом интегральных уравнений // ПИММ. 1983. Т. 47. Вып. 6. С. 981–987.
7. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
9. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М.: Наука, 1974. 672 с.
10. Си Г., Либовиц Г. Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 83–203.

Москва

Поступила в редакцию
15.VI.1987