

УДК 539.3

В. И. ЗАЙЦЕВ, В. М. ШАВЕЛИН

МЕТОД РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ
С УЧЕТОМ РЕАЛЬНЫХ СВОЙСТВ
ШЕРОХОВАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ТЕЛ

Правильное определение механического состояния взаимодействующих тел для задач с заданными деформациями (задачи с натягом, задачи о взаимодействии деталей машин в условиях температурного нагружения) невозможно без рассмотрения микромеханики контактного взаимодействия. Анализ таких задач с различных позиций проводился в [1, 2]. В [1] рассмотрены нелокальные и нелинейные законы трения без учета существующей на практике контактной жесткости шероховатых поверхностей, в [2] рассмотрено решение контактной задачи для частного случая бетонных сооружений со штрабленными (зубчатыми) поверхностями. В данной работе описан метод численного решения контактной задачи с учетом микромеханики контактного взаимодействия, являющийся дальнейшим развитием метода [3-6].

1. Феноменологическое описание микромеханики контактного взаимодействия. Для учета реальных свойств контактирующих поверхностей используем феноменологический подход, основанный на рассмотрении так называемого «промежуточного тела», макроскопические свойства которого отражают весь спектр разнообразных микроскопических явлений, сопровождающих взаимодействие шероховатых поверхностей. При этом с феноменологической точки зрения интерес представляют следующие эффекты: кинематический закон трения, контактная жесткость, предварительное смещение. Эти эффекты считаются заданными, так как либо подсчитываются по теоретическим формулам [7, 8], либо представлены экспериментальными данными.

Кинематический закон трения определяет силу трения при макроскопическом скольжении (т. е. скольжении, характерный размер которого превосходит характерный размер шероховатости) одной поверхности относительно другой. В этом случае $p_\tau = \pm \mu_h p_n$, где p_τ , p_n — соответственно касательная и нормальная компоненты контактного напряжения, μ_h — кинематический коэффициент трения. Согласно [7] кинематический коэффициент трения в общем случае зависит от нормального давления, скорости скольжения и температуры

$$\mu_h = \mu_h(p_n, l_\tau^*, T) \quad (1.1)$$

Контактная жесткость характеризует сближение контактирующих поверхностей в зависимости от нормальной и тангенциальной нагрузок, длительности их приложения и температуры

$$\gamma_n = \gamma_n(p_\tau, p_n, T, t) \quad (1.2)$$

Предварительное тангенциальное смещение непосредственно предшествует кинематическому трению и зависит (подобно контактной жесткости) от величины сдвигающего и нормального усилий, времени их приложения и температуры

$$\gamma_\tau = \gamma_\tau(p_\tau, p_n, T, t) \quad (1.3)$$

При увеличении сдвигающего усилия сила трения на контактной поверхности возрастает от нуля до значения силы трения покоя $p_{\tau 0} = \mu_{\tau 0} p_n$ (при этом предварительное смещение равно $\gamma_{\tau 0}$), после чего в некоторой

окрестности данной точки контактной поверхности происходит макроскопическое скольжение (кинематическое трение). Значение силы трения покоя превосходит кинематическую силу трения, поэтому, коэффициент трения покоя $\mu_{\tau 0} > \mu_h$.

Зависимости (1.4)–(1.3) в настоящее время еще не отражены наиболее полным образом экспериментальными и теоретическими исследованиями и, поэтому, при практических расчетах часто используются в упрощенной форме, не учитывающей зависимости от всей совокупности аргументов.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему N упругих тел, занимающих области $\Omega^1, \dots, \Omega^N$ с границами $S^1 = \partial\Omega^1, \dots, S^N = \partial\Omega^N$. К системе тел прикладываются нагрузки (механические и/или заданное температурное поле), возрастающие достаточно медленно от нулевых до своих окончательных значений. Эти нагрузки предполагаются такими, чтобы перемещения и деформации можно было считать малыми. В системе тел возникает механическое взаимодействие, которое характеризуется изменением областей контакта и распределенных по этим областям контактных напряжений, диссипацией механической энергии в процессе трения.

Пусть Ω — объединение областей $\Omega^1, \dots, \Omega^N$, а S — объединение S^1, \dots, S^N . В общем случае имеем покрытие $S = S_u \cup S_\sigma \cup S_c$ ($S_c = S_{op} \cup S_{c1} \cup S_{c2}$), где S_u, S_σ — соответственно границы на которых заданы граничные условия в перемещениях и в напряжениях, S_c — совокупность предельно возможных зон контакта, причем S_{op}, S_{c1}, S_{c2} — соответственно зоны зазора, проскальзывания и сцепления. При нагружении системы тел границы зон S_{op}, S_{c1}, S_{c2} движутся по S_c .

Процесс механического взаимодействия описывается уравнениями равновесия

$$\frac{1}{2} E_{ijkl} (u_{k,l} + u_{l,k})_{,j} + f_i = \beta_{ij} T_{,j} \quad (x \in \Omega) \quad (2.1)$$

соотношениями Дюгамеля — Неймана

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) - \beta_{ij} T \quad (x \in \Omega) \quad (2.2)$$

классическими граничными условиями

$$u_i = u_i^\Gamma \quad (x \in S_u), \quad p_i = \sigma_{ij} n_j = p_i^\Gamma \quad (x \in S_\sigma) \quad (2.3)$$

контактными кинематическими граничными условиями на S_c :

$$u_n^\xi - u_n^\eta + h > 0, \quad p_i = 0 \quad (x \in S_{op}) \quad (2.4)$$

$$u_n^\xi - u_n^\eta + h = \gamma_n(p_\tau, p_n, T, t), \quad p_n \leq 0 \quad (x \in S_{c1} \cup S_{c2})$$

контактными силовыми граничными условиями на $S_{c1} \cup S_{c2}$:

$$|p_\tau| < \mu_{\tau 0}(p_n, T, t) p_n, \quad \dot{l}_\tau = u_\tau^\xi - u_\tau^\eta = \gamma_\tau(p_\tau, p_n, T, t) \quad (x \in S_{c2})$$

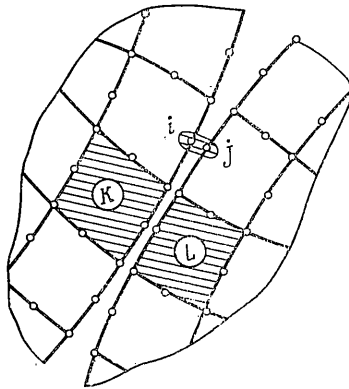
$$|p_\tau| = \mu_h(p_n, \dot{l}_\tau, T) p_n, \quad \dot{l}_\tau = -\lambda \dot{p}_\tau / |p_\tau| \quad (x \in S_{c1}) \quad (2.5)$$

Здесь $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, E_{ijkl}$ — соответственно тензоры напряжений, деформаций, упругих модулей; T — заданное температурное поле; f_i — компонента вектора объемной силы; u_i — компонента вектора перемещений; u_i^Γ — заданные на S_u перемещения (в дальнейшем для упрощения выкладок считаем $u_i^\Gamma = 0$); n_j — компоненты единичного нормального вектора к $\partial\Omega$; p_i^Γ — компоненты заданного на S_σ внешнего распределенного усилия; h — начальный зазор между телами ξ, η (полагается $\xi \leq \eta$); u_n^ξ, u_τ^ξ — нормальная и касательная компоненты перемещения точки S^ξ ; λ — скалярный множитель; точка сверху означает дифференцирование по времени (параметру нагружения); $i, j, k, l = 1, 2, 3$; \dot{l}_τ — тангенциальное скольжение; индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате; $\beta_{ij} = E_{ijkl} \alpha_{kl}$, где α_{kl} — тензор теплового расширения.

3. Метод решения. Для численного решения задачи используется конечноэлементная формулировка в сочетании с методом последовательных нагружений. Дискретизация системы тел включает собственно дискретизацию тел на конечные элементы и топологическое описание сопряжения тел

вдоль предельно возможной контактной зоны S_c . В качестве такого описания рассматриваются контактные узловые пары (узлы i, j на фиг. 1) и контактноэлементные пары (оппозитные друг другу элементы K, L на фиг. 1). Используется также понятие контактного условия узловой пары $C=1, 2, 3$ соответственно для того случая, когда она находится в состоянии зазора, проскальзывания и сцепления.

Для конечномерной модели задачи процесс изменения контактных условий имеет пространственно-временную дискретность и становится возможным выделить интервалы времени,



Фиг. 1

в которых контактные условия узловых пар не изменяются. В дальнейшем эти интервалы именуются основными, а задача определения приращения напряженно-деформированного состояния на основном интервале — основной задачей.

На основном интервале границы областей S_{op}, S_{c1}, S_{c2} неподвижны и, поэтому, приращение напряженно-деформированного состояния системы тел может быть найдено с помощью решения краевой задачи, включающей уравнения равновесия, соотношения Дюгамеля — Неймана, граничные условия, контактные кинематические граничные условия (значения производных берутся в соответствии с формулой конечных приращений Лагранжа) и контактные силовые граничные условия:

$$\frac{1}{2}E_{ijkl}(\Delta u_{i,l} + \Delta u_{l,i})_{,j} + \Delta f_i = \beta_{ij} \Delta T_{,j} \quad (x \in \Omega) \quad (3.1)$$

$$\Delta \sigma_{ij} = E_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \Delta T \quad (x \in \Omega) \quad (3.2)$$

$$\Delta u_i = 0 \quad (x \in S_u), \quad \Delta p_i = \Delta p_i^F \quad (x \in S_\sigma) \quad (3.3)$$

$$\Delta u_n^{\xi} - \Delta u_n^{\eta} = \frac{\partial \gamma_n}{\partial p_\tau} \Delta p_\tau + \frac{\partial \gamma_n}{\partial p_n} \Delta p_n + \frac{\partial \gamma_n}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial \gamma_n}{\partial t} \Delta t \quad (x \in S_{c1} \cup S_{c2}) \quad (3.4)$$

$$\Delta u_\tau^{\xi} - \Delta u_\tau^{\eta} = \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial p_\tau} \Delta p_\tau + \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial p_n} \Delta p_n + \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial t} \Delta t \quad (x \in S_{c2})$$

$$|\Delta p_\tau| = \mu_k(p_n, l_\tau, T) |\Delta p_n|, \quad \Delta p_\tau \Delta l_\tau < 0 \quad (x \in S_{c1}) \quad (3.5)$$

Задача (3.1)–(3.5) является эллиптической задачей со смешанными граничными условиями и с дополнительными ограничениями в форме равенств, причем эти ограничения затрагивают как перемещения, так и напряжения. В отличие от задачи без учета реальных свойств контактных поверхностей [5] эта задача является нелинейной. Нелинейность проявляется в зависимости ограничений (3.4)–(3.5) от приращения напряженно-деформированного состояния системы тел.

Для решения задачи формулируется смешанный вариационный принцип, аналогичный принципу [4]. Его содержание состоит в построении функционала от приращения специальным образом подобранных кинематически возможного поля перемещений и статически возможного поля напряжений, в утверждении существования стационарной точки этого функционала и ее совпадении с действительным приращением напряженно-деформированного состояния взаимодействующих тел. Применение метода Лагранжа дает в этом случае систему уравнений

$$\begin{pmatrix} K^1 & & & & & \\ & K^2 & & & & \\ & & & & & \\ & & & K^n & & \\ K^{c1} & K^{c2} & \dots & K^{cn} & K^{cc} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta q^1 \\ \Delta q^2 \\ \vdots \\ \Delta q^n \\ \Delta R^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta Q^1 \\ \Delta Q^2 \\ \vdots \\ \Delta Q^n \\ \Delta Q^* \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$K^{\eta c} = \sum_{\xi \leq \eta} \sum_{m(\xi \eta)} C_m U^m - \sum_{\xi \geq \eta} \sum_{m(\eta \xi)} C_m U^m, \quad K^{c \eta} = \sum_{\xi \leq \eta} \sum_{m(\xi \eta)} C_m^T + \sum_{\xi \geq \eta} \sum_{m(\eta \xi)} C_m^T$$

$$K^{cc} = \sum_m W^m, \quad \Delta R^* = \sum_m \Delta R_m^*, \quad C_m = \text{diag} \|c_1, \dots, c_s\|$$

$$\Delta Q^* = \sum_m \Delta Q_m^*, \quad \Delta Q_m^* = \|\Delta r_1, \dots, \Delta r_s\|^T, \quad -\Delta r_i = \left\| \begin{array}{l} \Delta_\tau \gamma_\tau + \Delta_i \gamma_\tau \\ \Delta_\tau \gamma_n + \Delta_i \gamma_n \end{array} \right\|$$

$$\Delta_\tau \gamma_\tau = \gamma_\tau(p_\tau, p_n, T + \Delta T, t) - \gamma_\tau(p_\tau, p_n, T, t)$$

Аналогичным образом строятся выражения для $\Delta_i \gamma_\tau$, $\Delta_i \gamma_n$, $\Delta_\tau \gamma_n$; K^η , Δq^η , ΔQ^η — соответственно матрица жесткости, вектор приращения узловых перемещений, вектор приращения приведенных к узлам внешней и фиктивной температурной нагрузки для тела η . Символ $\xi \leq \eta$ под знаком суммы означает суммирование по тем телам ξ , которые находятся в контакте с телом η и удовлетворяют условию $\xi \leq \eta$; символ $m(\xi \eta)$ — суммирование по всем конечным элементам тела ξ , образующим контактноэлементные пары с телом η ; символ m — суммирование по всем конечноэлементным парам системы тел; c_i — матрица перехода от локальной системы координат i -й контактной узловой пары к глобальной системе координат; s — количество контактных узловых пар, принадлежащих контактноэлементной паре; ΔR_m^* — приращение вектора механического состояния контактноэлементной пары m ; компоненты этого вектора, относящиеся к узловой паре i ($1 \leq i \leq s$) в зависимости от контактного условия могут принимать качественно различные значения. Эти значения показаны в таблице, в которой μ_j — значение коэффициента трения в узловой паре j , $\omega_m = \int N^T H ds$, где N , H — соответственно функции, интерполирующие перемещения и напряжения на части контактной границы S_m , принадлежащей контактноэлементной паре m ; при $b_{ij} = \pm \omega_{ij} \mu_j$ суммирования по j нет; $\Delta l_{\tau i}^{*i}$, $\Delta p_{\xi \tau}^{*i}$ — соответственно приращения скольжения и контактного напряжения для тела ξ в i -й узловой паре в направлении τ , звездочкой обозначено отношение к локальной системе координат.

Матрицы U^m , W^m и вектор ΔR_m^* имеют следующую структуру:

$$U^m = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1s} \\ U_{21} & U_{22} & \dots & U_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{s1} & U_{s2} & \dots & U_{ss} \end{pmatrix}, \quad \Delta R_m^* = \begin{pmatrix} \Delta R_{m\tau}^{*1} \\ \Delta R_{mn}^{*1} \\ \vdots \\ \Delta R_{m\tau}^{*s} \\ \Delta R_{mn}^{*s} \end{pmatrix}$$

$$W^m = \text{diag} \|W_1, \dots, W_s\|, \quad U_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ 0 & c_{ij} \end{pmatrix}, \quad W_i = \begin{pmatrix} d_i & f_i \\ g_i & e_i \end{pmatrix}$$

Значения элементов a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , d_i , e_i , f_i , g_i для различных контактных условий в узловых парах представлены в таблице.

Решение системы уравнений (3.6) с неизвестными значениями элементов d_i , e_i , f_i , g_i можно рассматривать как задачу о неподвижной точке. Действительно, записывая уравнения (3.6) в виде $K(\varphi_{\alpha\beta})x = y$, $\varphi_{\alpha\beta} = -\partial \gamma_\alpha / \partial p_\beta$ ($\alpha, \beta = \tau, n$) и решая их, получим

$$x = K^{-1}(\varphi_{\alpha\beta})y \quad (3.7)$$

Используя решение x , можно найти значение $\varphi_{\alpha\beta}^* = \Delta_p \gamma_\alpha / \Delta p_\beta = Bx$. Тогда применение нелинейного оператора B к (3.7) приводит к задаче

$$\varphi_{\alpha\beta}^* = BK^{-1}(\varphi_{\alpha\beta})y = F(\varphi_{\alpha\beta}) \quad (3.8)$$

Неподвижная точка (3.8) находится методом последовательных приближений. Сначала в качестве производных $\varphi_{\alpha\beta}$, соответствующих форму-

контактное условие	a_{ij}	b_{ij}	c_{ij}	d_i	e_i	f_i	g_i	$\Delta R_{m\tau}^{*i}$	ΔR_{mn}^{*i}
зазор	0	0	0	1	1	0	0	Δl_{τ}^{*i}	Δl_n^{*i}
проскальзывание	0	$\pm \omega_{ij} u_j$	ω_{ij}	1	$\frac{\partial \gamma_n}{\partial p_n}$	0	$\frac{\partial \gamma_n}{\partial p_{\tau}}$	Δl_{τ}^{*i}	$\Delta p_{\xi n}^{*i}$
сцепление	ω_{ij}	0	ω_{ij}	$\frac{\partial \gamma_{\tau}}{\partial p_{\tau}}$	$\frac{\partial \gamma_n}{\partial p_n}$	$\frac{\partial \gamma_{\tau}}{\partial p_n}$	$\frac{\partial \gamma_n}{\partial p_{\tau}}$	$\Delta p_{\xi \tau}^{*i}$	$\Delta p_{\xi n}^{*i}$

ле конечных приращений Лагранжа, рассматриваются производные в начальной точке (p_{τ}, p_n, T, t) , решается система уравнений (3.6) и находятся приращения контактных напряжений $\Delta p_{\tau}, \Delta p_n$. По этим приращениям определяются значения

$$\Delta p_{\tau} \gamma_{\tau} = \gamma_{\tau}(p_{\tau} + \Delta p_{\tau}, p_n, T, t) - \gamma_{\tau}(p_{\tau}, p_n, T, t)$$

$$\Delta p_n \gamma_{\tau} = \gamma_{\tau}(p_{\tau}, p_n + \Delta p_n, T, t) - \gamma_{\tau}(p_{\tau}, p_n, T, t)$$

$$\Delta p_{\tau} \gamma_n = \gamma_n(p_{\tau} + \Delta p_{\tau}, p_n, T, t) - \gamma_n(p_{\tau}, p_n, T, t)$$

$$\Delta p_n \gamma_n = \gamma_n(p_{\tau}, p_n + \Delta p_n, T, t) - \gamma_n(p_{\tau}, p_n, T, t)$$

и новые значения производных $\partial \gamma_{\alpha} / \partial p_{\beta} = \Delta p_{\beta} \gamma_{\alpha} / \Delta p_{\beta}$. Снова решается система уравнений (3.6) и т. д. до тех пор, пока приращения контактных напряжений $\Delta p_{\tau}, \Delta p_n$ не стабилизируются внутри заданного уровня погрешности. Численные исследования, проведенные для характерных экспериментальных зависимостей γ_{τ}, γ_n [7, 8], показали достаточно быструю (за 2–4 итерации) сходимость метода.

Для решения системы уравнений (3.6) использовался также другой метод, в котором матрица системы разрешающих уравнений не изменялась. В этом случае элементы матрицы K^{cc} формируются с учетом условия $\varphi_{\alpha\beta} = 0$, а члены, отражающие приращение сближения и тангенциального смещения взаимодействующих тел переносятся в правую часть. При этом система уравнений (3.6) имеет вид

$$\begin{vmatrix} K & K_1 \\ K_2 & K^{cc} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta q \\ \Delta R^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta Q \\ \Delta Q^* \end{vmatrix} \quad (3.9)$$

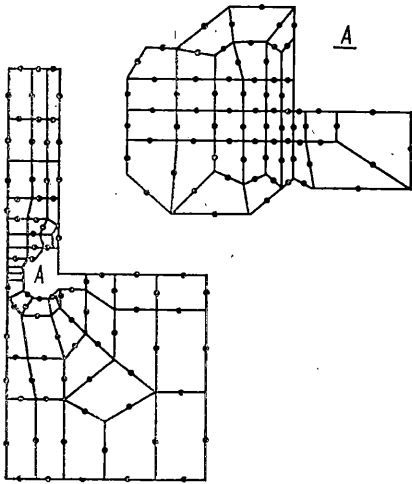
$$K_1 = \|K^{c1}, \dots, K^{cn}\|^r, \quad K_2 = \|K^{1c}, \dots, K^{nc}\|$$

$$\Delta q = \|\Delta q^1, \dots, \Delta q^n\|^r, \quad \Delta Q = \|\Delta Q^1, \dots, \Delta Q^n\|^r$$

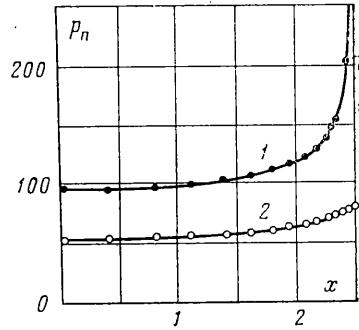
$$-\Delta r_i = \begin{vmatrix} \Delta p_{\tau} \gamma_{\tau} + \Delta p_n \gamma_{\tau} + \Delta T \gamma_{\tau} + \Delta t \gamma_{\tau} \\ \Delta p_{\tau} \gamma_n + \Delta p_n \gamma_n + \Delta T \gamma_n + \Delta t \gamma_n \end{vmatrix}$$

Система уравнений (3.9) решалась методом последовательных приближений. На первой итерации полагалось $\Delta p_{\alpha} \gamma_{\beta} = 0$. После решения системы уравнений относительно вектора ΔR^* подсчитывались величины $\Delta p_{\alpha} \gamma_{\beta}$ и система уравнений решалась заново до тех пор, пока очередные значения ΔR^* не лежали внутри допустимого уровня погрешности.

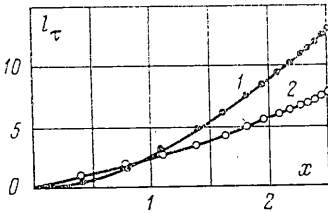
Установлено, что сходимость последовательных приближений недостаточно быстрая и сильно зависит от начального (не равного нулю) приближения. Поэтому, более рациональной итерационной схемой была признана схема, сочетающая преимущества первого и второго методов. Сущность ее состоит в том, что на первой итерации используется первый метод, который дает возможность получить хорошие начальные значения $\Delta p_{\alpha} \gamma_{\beta}$. В последующих итерациях применяется второй метод, причем в правой части системы уравнений (3.9) вместо значений $\Delta p_{\alpha} \gamma_{\beta}$ используются их невязки с начальным приближением. Эти невязки имеют вид $\psi_{\alpha\beta} = \Delta p_{\alpha} \gamma_{\beta} - \varphi_{\alpha\beta} \Delta p_{\beta}$. Численные



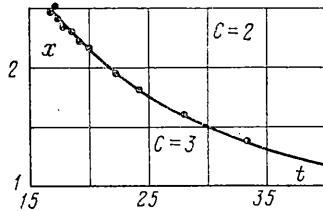
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

эксперименты показали экономичность и достаточно быструю сходимость такого итерационного процесса.

При реализации метода пошагового нагружения помимо способа определения величины основного шага нагружения, описанного в [5], использовался прием, когда все время нагружения делится на наперед заданное небольшое число интервалов (для задач с большим числом основных интервалов). При этом необходимо соответствующим образом изменить кинематические граничные условия в (3.6) с помощью введения в вектор ΔQ^* дополнительных членов.

Так, если в момент времени t_1 узловая пара находилась в состоянии зазора, а в момент времени $t_2 > t_1$ она находится в состоянии сцепления, то условие в нормальном направлении должно иметь вид $-\Delta u_n^{\xi} + \Delta u_n^{\eta} + \Delta \tau \gamma_n + \Delta t \gamma_n = \delta_n(t_1)$, где δ_n — величина зазора в момент времени t_1 . Переход из состояния зазора в состояние сцепления осуществляется в некоторый последующий момент времени, величина которого при необходимости может быть найдена с помощью экстраполяции контактного давления.

Кроме того соответствующие тангенциальные смещения учитываются с помощью выражения $-\Delta u_{\tau}^{\xi} + \Delta u_{\tau}^{\eta} + \Delta \tau \gamma_{\tau} + \Delta t \gamma_{\tau} = \delta_{\tau}(t_1) \varphi_{\tau}$, где $\varphi_{\tau} = \Delta u_{\tau}^{\xi} / \Delta u_n^{\xi}$ определяется из направления относительного смещения в узловой паре на предыдущем шаге нагружения.

Аналогичные модификации граничных условий предполагаются и для других узловых пар с другими контактными условиями.

4. Задача о взаимодействии упругой полосы с упругим основанием. Работоспособность метода решения контактных задач с учетом реальных свойств шероховатых контактных поверхностей проиллюстрируем на примере решения задачи о сжатии упругого основания упругой полосой прямоугольного поперечного сечения. Использовалась конечноэлементная аппроксимация восьмиузловыми изопараметрическими элементами (83 конечных элемента, 306 узлов и 15 контактных узловых пар), показанная на фиг. 2 (показаны правые относительно оси симметрии части полосы и основания). Механические свойства полосы — модуль Юнга $E_1 = 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu_1 = 0,3$; для основания соответственно — $E_2 = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu_2 = 0,3$.

Решались задачи с учетом и без учета реальных свойств шероховатых поверхностей. Для учета шероховатости контактная жесткость определялась зависимостью $\gamma_n = \alpha (p_n + \beta)^{-1} - \gamma_{n0}$, где $\gamma_{n0} = 10^{-4}$ м; $\alpha = \beta \gamma_{n0} = 5 \cdot 10^{-4}$ м·МПа. Зависимость проскальзывания от силы трения определялась формулой $\gamma_{\tau} = \gamma_{\tau 0} p_{\tau} / \mu p_n$ ($|p_{\tau}| < \mu p_n$) ($\gamma_{\tau 0}$ — максимальное предвзрывное смещение, $\mu = \mu_{\tau 0} = \mu_k$), а для $|p_{\tau}| = \mu p_n$ величина γ_{τ} определялась из решения (3.6). Принималось, что максимальное предварительное смещение не является постоянной величиной и зависит от приложенного контактного давления или от сближения взаимодействующих тел.

В предположении упругого характера взаимодействия неровностей поверхностей для расчета использовалась формула [9]:

$$|\gamma_{\tau 0}| = 1/2(2-\nu)(1-\nu)^{-1}\mu|\gamma_n| \quad (\nu=\nu_1=\nu_2)$$

При решении задачи на каждом шаге нагружения начальные значения производных $\Phi_{\alpha\beta}$ подсчитывались исходя из приведенных зависимостей. Нагружение осуществлялось смещением центральной точки на верхнем торце полосы величиной 10^{-6} м, при этом коэффициент трения имел значение $\mu=0,1$.

На фиг. 3, 4 показаны полученные распределения контактного давления и относительного проскальзывания для момента времени $t=11,92$ с (t — параметр нагружения, $0 \leq t \leq 60$ с). Цифрой 1 отмечены зависимости, полученные без учета шероховатости, цифрой 2 — с учетом шероховатости.

Фиг. 5 отражает движение границы, разделяющей области проскальзывания и сцепления (предварительного смещения). Для задачи без учета шероховатости область проскальзывания распространялась на всю зону контакта (или по крайней мере на ту ее часть, которая не содержит центральной узловой пары на оси симметрии) практически сразу, в начале нагружения.

На фиг. 3–5 на осях координат давление p_n дано в МПа, координата x на контактной площадке — в единицах 10^{-2} м, проскальзывание l_r — в мкм, время нагружения t — в секундах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Oden J. T., Pires E. B. Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1983. V. 50. № 1. С. 67–76.
2. Возжуховский А. В., Шойхет Б. А. Расчет массивных гидротехнических сооружений с учетом растрескивания швов. М.: Энергоиздат, 1981. 136 с.
3. Зайцев В. И., Щавелин В. М. Решение уравнений МКЭ для задачи механического взаимодействия системы деформируемых твердых тел // Проб. прочности. 1984. № 6. С. 58–62.
4. Зайцев В. И., Щавелин В. М. Смешанный вариационный принцип контактной задачи и его применение к построению системы разрешающих уравнений метода конечных элементов // Прочность материалов и элементов конструкций атомных реакторов. М.: Энергоатомиздат, 1985. С. 20–26.
5. Зайцев В. И. Численный метод решения контактной задачи теории упругости и теории температурных напряжений. Сообщение 1. Постановка задачи и метод решения // Проб. прочности. 1988. № 7. С. 91–96.
6. Зайцев В. И. Численный метод решения контактной задачи теории упругости и теории температурных напряжений. Сообщение 2. Результаты и вычислительные эксперименты // Проб. прочности. 1988. № 9. С. 92–97.
7. Демкин Н. Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 227 с.
8. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
9. Митрофанов В. П. Соотношение между сближением и максимальным предварительным смещением для упругого дискретного контакта // О природе трения твердых тел. Минск: Наука и техника, 1971. С. 322–324.

Москва

Поступила в редакцию
23.III.1987