МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1989

УДК 539.3.01

Ю. В. ВАСИЛЕВИЧ, И. А. ПРУСОВ

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА

Состояние упругого ортотропного тела зависит от девяти постоянных, три из которых представляют собой модули сдвига. Принято считать, что модули сдвига не зависят от остальных постоянных упругости и подлежат определению только экспериментальным путем [1]. Однако различные подходы к построению общих формул трехмерного ортотропного тела [2, 3] приводят к выводу, что коэффициенты упругости должны удовлетворять некоторым алгебраическим уравнениям, которые можно рассматривать как ограничения на коэффициенты упругости уравнений закона Гука.

Дано обоснование существования зависимости модулей сдвига от остальных коэффициентов упругости и доказано, что такая зависимость определяется простыми формулами для приведенного представления компонент напряжений и перемещений.

1. Пусть u_1, u_2, u_3 — компоненты перемещений, отнесенные к осям декартовой системы координат x, y, z; σ_{jj}, τ_{ij} и e_{ij} компоненты напряжений и деформаций, удовлетворяющие уравнениям закона Гука [1]:

$$a_{ij}\sigma_{jj}=e_{ii},\quad a_{44}\tau_{23}=e_{23}$$
$$a_{55}\tau_{13}=e_{13},\quad a_{66}\tau_{12}=e_{12} \tag{1.1}$$

и уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j}=0\quad (i,j=1,2,3) \tag{1.2}$$

Здесь суммирование производится по индексу j.

Физический смысл постоянных упругости a_{ij} описан в [1]; $G_{23}=1/a_{44}$, $G_{13}=1/a_{55}$, $G_{12}=1/a_{66}$ — модули сдвига.

Будем считать, что оси координат x, y, z образуют правую тройку, в каждой точке тела существуют три главных направления упругости, параллельные осям x, y, z; a_{ij} — постоянные величины, принимающие одинаковые значения при растяжении и сжатии; матрица коэффициентов a_{ij} симметрична ($a_{ij}=a_{ji}$); компоненты деформаций e_{ij} — малые величины.

Уравнениям (1.2) и (1.1) для касательных напряжений удовлетворим, полагая

$$\sigma_{11}=\partial^2\Phi/\partial y^2+\xi\partial^2\Phi/\partial z^2,\quad \sigma_{22}=\partial^2\Phi/\partial x^2+\eta\partial^2\Phi/\partial z^2$$
$$\sigma_{33}=\xi\partial^2\Phi/\partial x^2+\eta\partial^2\Phi/\partial y^2,\quad \tau_{12}=-\partial^2\Phi/\partial x\partial y$$
$$\tau_{13}=-\xi\partial^2\Phi/\partial x\partial z,\quad \tau_{23}=-\eta\partial^2\Phi/\partial y\partial z \tag{1.3}$$
$$u_1={}^1/_2(\eta a_{44}-\xi a_{55}-a_{66})\partial\Phi/\partial x$$
$$u_2={}^1/_2(\xi a_{55}-\eta a_{44}-a_{66})\partial\Phi/\partial y$$
$$u_3={}^1/_2(a_{66}-\eta a_{44}-\xi a_{55})\partial\Phi/\partial z$$

где ξ, η — произвольные коэффициенты; $\Phi=\Phi(x, y_*, z_*)$ — произвольная гармоническая функция переменных x, $y_*=\mu y$, $z_*=\lambda z$, μ, λ — некоторые безразмерные коэффициенты, удовлетворяющая уравнению

$$\partial^2\Phi/\partial x^2+\partial^2\Phi/\partial y_*^2+\partial^2\Phi/\partial z_*^2=0 \tag{1.4}$$

Всякую функцию Φ удовлетворяющую уравнению (1.4), будем называть квазигармонической функцией относительно переменных x, y, z.

Требуя, чтобы выражения (1.3) удовлетворяли уравнениям (1.1) для нормальных напряжений, получим три уравнения, на основании которых с учетом (1.4) следует

$$\mu^2=[a_{12}+{}^1/_2a_{66}+\xi(a_{13}+{}^1/_2a_{55})-{}^1/_2\eta a_{44}](a_{11}+\eta a_{13})^{-1}=$$
$$=(a_{22}+\xi a_{23})[a_{12}+{}^1/_2a_{66}+\eta(a_{23}+{}^1/_2a_{44})-{}^1/_2\xi a_{55}]^{-1}=$$
$$=(a_{23}+\xi a_{33})(a_{13}+\eta a_{33})^{-1} \tag{1.5}$$

$$\lambda^2=[a_{12}+{}^1/_2a_{66}+\xi(a_{13}+{}^1/_1a_{55})-{}^1/_2\eta a_{44}](\xi a_{11}+\eta a_{12})^{-1}=$$
$$=(a_{23}+\xi a_{33})[\xi(a_{13}+{}^1/_2a_{55})+\eta(a_{23}+{}^1/_2a_{44})-{}^1/_2a_{66}]^{-1}=$$
$$=(a_{22}+\xi a_{23})(\xi a_{12}+\eta a_{22})^{-1} \tag{1.6}$$

Из системы уравнений (1.6) путем исключения ξ и η получим кубическое уравнение относительно параметра $x=\lambda^2$:

$$M_0x^3-M_1x^2+M_2x-M_3=0 \tag{1.7}$$

$$M_1=a_{22}a_{66}(a_{55}+2a_{13})+a_{44}(a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2)-2a_{12}a_{23}a_{66}$$

$$M_2=a_{22}a_{44}(a_{55}+2a_{13})+a_{66}(a_{22}a_{33}-a_{23}{}^2)-2a_{12}a_{23}a_{44}$$

$$M_3=a_{44}(a_{22}a_{33}-a_{23}{}^2),\quad M_0=a_{66}(a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2)$$

Уравнение (1.7) имеет три корня, из которых по крайней мере один — вещественный. Зафиксируем какой-либо один из них, полагая $x=\lambda^2$. Считая x известным, из соотношений (1.6) выразим ξ и η:

$$\xi={}^1/_2a_{22}(a_{66}x-a_{44})\Delta^{-1} \tag{1.8}$$

$$\eta=[a_{22}(a_{11}x-a_{13}-{}^1/_2a_{55})-(a_{12}+{}^1/_2a_{66})(a_{12}x-a_{23})]\Delta^{-1}$$

$$\Delta=a_{22}x(a_{11}x-a_{13}-{}^1/_2a_{55})-(a_{12}x-a_{23})(a_{12}x+{}^1/_2a_{44})$$

На основании равенств (1.5) следует, что ξ и η должны удовлетворять также уравнениям

$$\begin{aligned}&{}^1/_2a_{33}(a_{55}\xi^2-a_{44}\xi\eta)+[a_{23}a_{13}+{}^1/_2a_{23}a_{55}-a_{33}(a_{12}+{}^1/_2a_{66})]\xi+\\&+[a_{22}a_{33}-a_{23}(a_{23}+{}^1/_2a_{44})]\eta+a_{22}a_{13}-a_{23}(a_{12}+{}^1/_2a_{66})=0\\&{}^1/_2a_{33}(a_{44}\eta^2-a_{55}\xi\eta)+[a_{11}a_{33}-a_{13}(a_{13}+{}^1/_2a_{55})]\xi+\\&+[a_{13}a_{23}+{}^1/_2a_{13}a_{44}-a_{33}(a_{12}+{}^1/_2a_{66})]\eta+a_{11}a_{23}-a_{13}(a_{12}+{}^1/_2a_{66})=0\end{aligned} \tag{1.9}$$

Исключая в уравнениях (1.9) с учетом (1.8) неизвестные ξ и η, получим два уравнения 4-й степени относительно x

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0 \tag{1.10}$$

$$b_0x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4=0 \tag{1.11}$$

где a_i, b_i ($i=0, 1, 2, 3, 4$) — приведены в [2]. При этом

$$\mu^2=(a_{23}+\xi a_{33})(a_{13}+\eta a_{33})^{-1},\quad \lambda^2=x \tag{1.12}$$

Потребуем, чтобы уравнения (1.7), (1.10), (1.11) имели три общих корня $x=x_k$ ($k=1, 2, 3$). Для этого уравнение (1.10) умножим на b_0 и вычтем из полученного уравнения уравнение (1.11), умноженное на a_0 В итоге получим

$$m_0x^3-m_1x^2+m_2x-m_3=0 \tag{1.13}$$

$$m_0=b_0a_1-a_0b_1,\quad m_1=a_0b_2-b_0a_2$$

$$m_2=b_0a_3-b_3a_0,\quad m_3=a_0b_4-b_0a_4$$

Для того чтобы корни уравнений (1.7) и (1.13) совпали, необходимо и достаточно, чтобы

$$m_1M_0=m_0M_1,\quad m_2M_0=m_0M_2,\quad m_3M_0=m_0M_3 \tag{1.14}$$

При выполнении этих равенств значения $x=x_k$ можно найти из (1.7). Считая x_k известным, соответствующие значения ξ, η, μ определим из равенств (1.8), (1.12) и обозначим их ξ_k, η_k, μ_k.

В дальнейшем будем использовать только положительные значения корней уравнений (1.12):

$$\lambda_k=x_k^{1/2},\quad \mu_k=[(a_{23}+a_{33}\xi_k)(a_{13}+a_{33}\eta_k)^{-1}]^{1/2}$$

При этом общие формулы для напряжений и перемещений согласно (1.3) определяются выражениями

$$\sigma_{11}=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial y^2}+\xi_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial z^2}\right),\qquad \sigma_{22}=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x^2}+\eta_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial z^2}\right)$$

$$\sigma_{33}=\sum_{k=1}^{3}\left(\xi_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x^2}+\eta_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial y^2}\right),\qquad \tau_{12}=-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x\,\partial y}$$

$$\tau_{13}=-\sum_{k=1}^{3}\xi_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x\,\partial z},\qquad \tau_{23}=-\sum_{k=1}^{3}\eta_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial y\,\partial z}$$

$$u_1=\sum_{k=1}^{3}P_{k1}\frac{\partial\Phi_k}{\partial x},\qquad u_2=\sum_{k=1}^{3}P_{k2}\frac{\partial\Phi_k}{\partial y}$$

$$u_3=\sum_{k=1}^{3}P_{k3}\frac{\partial\Phi_k}{\partial z},\qquad P_{k1}={}^1/_2(\eta_k a_{44}-\xi_k a_{55}-a_{66})$$

$$P_{k2}={}^1/_2(\xi_k a_{55}-\eta_k a_{44}-a_{66})$$

$$P_{k3}={}^1/_2(a_{66}-\eta_k a_{44}-\xi_k a_{55})$$

Здесь $\Phi_k(x,\ \mu_k,\ y,\ \lambda_k z)$ — произвольные квазигармонические функции переменных x, y, z; $k=1, 2, 3$.

Из выражений (1.15) следует, что упругое состояние рассматриваемого ортотропного тела определяется при помощи трех произвольных квазигармонических функций.

2. Пусть по-прежнему тело — ортотропное и оси координат x, y, z параллельны главным направлениям упругости. Определим выражения для компонент напряжений и перемещений в виде

$$\begin{gathered}\sigma_{11}=-n_1\partial^2Q/\partial x\partial y,\quad \sigma_{22}=n_2\partial^2Q/\partial x\partial y\\ \sigma_{33}=n_3\partial^2Q/\partial x\partial y,\quad \tau_{12}=n_4\partial^2Q/\partial x^2-n_5\partial^2Q/\partial y^2\\ \tau_{13}=-n_6\partial^2Q/\partial y\partial z,\quad \tau_{23}=n_7\partial^2Q/\partial x\partial z\\ u_1=-a_{66}\partial Q/\partial y,\quad u_2=n_8a_{66}\partial Q/\partial x,\quad u_3=0\end{gathered}\tag{2.1}$$

где $Q(x,\ \mu_0 y,\ \lambda_0 z)$ — произвольная квазигармоническая функция; n_i, μ_0, λ_0 — произвольные постоянные.

Удовлетворяя уравнениям (1.1) и (1.2) получим значения коэффициентов n_i в форме

$$n_1=[a_{66}(a_{12}n_8+a_{22})+(n_8\beta_{64}-\beta_{65})(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})](a_{11}a_{22}-a_{12}^2)^{-1}$$

$$n_2=[a_{66}(a_{11}n_8+a_{12})+(n_8\beta_{64}-\beta_{65})(a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13})](a_{11}a_{22}-a_{12}^2)^{-1}$$

$$n_8=[\beta_0\beta_{45}+a_{44}a_{12}(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})][\beta_0+a_{44}a_{12}(a_{12}a_{13}-a_{11}a_{23})]^{-1}$$

$$n_4=n_8,\quad n_3=n_6-n_7,\quad n_5=1$$

$$n_6=\beta_{65}, \quad n_7=n_8\beta_{64}, \quad \lambda_0^2=a_{44}/a_{66}=\beta_{46}$$

$$\mu_0^2=a_{44}/a_{55}=\beta_{45}, \quad \beta_{ij}=a_{ii}/a_{jj} \quad (i, j=4, 5, 6)$$

$$\beta_0=(a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13})(a_{22}a_{13}-a_{12}a_{23})-(a_{23}a_{13}-a_{33}a_{12})(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)$$

Формулы (2.1) имеют место, если a_{ij} удовлетворяют уравнениям $n_1-n_8=\beta_{45}$, $n_2-1=n_8\beta_{54}$. Из этих равенств следует

$$a_{55}^2[a_{22}a_{33}-a_{23}(a_{23}+a_{44})]-a_{44}^2[a_{11}a_{33}-a_{13}(a_{13}+a_{55})]=0 \qquad (2.2)$$

Совмещая (поочередно дважды) с осями координат x, y, z другие главные направления упругости тела, получим еще два уравнения, которым должны удовлетворять постоянные упругости. Их выражения получаются из (2.2) круговой заменой индексов у a_{ij}.

3. Из представления общих формул следуют соотношения, описывающие плоскую деформацию. В каждом из трех частных случаев плоской деформации для изотропного тела получаем известную зависимость между модулем сдвига, модулем Юнга и коэффициентом Пуассона. Следовательно, и для ортотропного тела должна существовать зависимость модулей сдвига от остальных постоянных упругости и эта зависимость определяется из уравнений (1.14) или уравнений вида (2.2). Для ее нахождения поступим следующим образом.

В предельном случае, когда a_{ij} превращаются в упругие постоянные трансверсально-изотропного тела, из системы (2.2) получаем соотношение

$$a_{55}=2[(a_{11}a_{33})^{1/2}-a_{13}] \qquad (3.1)$$

служащее для нахождения модуля сдвига $G_{13}=1/a_{55}$ в плоскости xz. Путем циклической перестановки индексов в (3.1) для нахождения модулей сдвига $G_{12}=1/a_{66}$ и $G_{23}=1/a_{44}$ в плоскостях xy и yz получим соотношения

$$a_{66}=2[(a_{11}a_{22})^{1/2}-a_{12}], \quad a_{44}=2[(a_{22}a_{33})^{1/2}-a_{23}] \qquad (3.2)$$

Легко убедиться, что выражения (3.1) и (3.2) являются решением систем вида (2.2) и (1.14). Численным решением этих систем для различных произвольно заданных значений постоянных упругости a_{ij} доказано, что каждая из них имеет решение (3.1), (3.2) и это решение единственно.

Сопоставление значений G_{ij} для различных ортотропных материалов, взятых из ряда литературных источников и полученных по формулам (3.1), (3.2), свидетельствует о совпадении одних и отличии других. Несовпадение результатов объясняется главным образом большими погрешностями экспериментальных методов.

С учетом формул (3.1), (3.2) проведен численный эксперимент по расчету корней кубического уравнения (1.7) для различных ортотропных материалов. Расчеты показали, что (1.7) имеет только положительные вещественные корни, причем один корень всегда кратный. Компоненты тензоров напряжений и перемещений первой группы формул выражаются через три произвольные квазигармонические функции. В конечном итоге компоненты напряженно-деформированного состояния выражаются через четыре квазигармонические функции.

Полученные формулы удовлетворяют принципу предельного перехода к изотропному телу и служат базовыми соотношениями при решении граничных задач.

Таким образом, на основе предложенного представления общих формул доказано, что между модулями сдвига и остальными коэффициентами упругости существуют зависимости, определяемые соотношениями (3.1) и (3.2) или в других обозначениях соотношениями

$$G_{ij}={}^1/_2E_i[(E_i/E_j)^{1/2}+\nu_{ij}]^{-1} \quad (i, j=1, 2, 3; \ i\neq j) \qquad (3.3)$$

где E_i, E_j и ν_{ij} — модули Юнга и коэффициенты Пуассона. Модули сдвига трансверсально-изотропного тела в плоскостях, перпендикулярных плоскости изотропии, и модули сдвига ортотропного тела в соответствующих плоскостях определяются по одинаковым формулам.

Указанные выше зависимости имеют место только для случая, когда коэффициенты a_{ij} принимают одинаковые значения при растяжении и сжатии ортотропного материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука. 1977. 415 с.
2. *Прусов И. А., Василевич Ю. В.* Об одном варианте представления общих формул теории упругости ортотропного тела // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1981. № 3. С. 39–45.
3. *Остросаблин Н. И.* О структуре тензора модулей упругости и классификации анизотропных материалов/ПМТФ. 1986. № 4. С. 127–135.

Минск

Поступила в редакцию
27.V.1987