

УДК 539.3

И. Н. СЕРПИК

ОБ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА ИТЕРАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕСТНЫХ И ОБЩИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Разрабатывается подход к исследованию скорости сходимости алгоритма итерационного взаимодействия местных и общих деформаций при произвольном количестве используемых сеток конечных элементов. В отличие от других многосеточных методов этот алгоритм не требует применения многоуровневых итерационных процедур или последовательного выполнения нескольких итерационных процессов. Доказывается, что оценки скорости сходимости в энергетической норме могут быть выполнены на основе разделения дискретизированного объекта на отдельные фрагменты. Рассматривается вопрос об использовании этих оценок для анализа скорости убывания погрешностей определения напряжений. Многосеточные итерационные методы применялись для численного решения задач математической физики в [1–9]. Рассматриваются только симплексные аппроксимации перемещений [10] в случае совпадения границы наиболее грубой из применяемых сеток конечных элементов с аппроксимированной границей тела.

1. При решении краевых задач теории упругости с помощью алгоритма итерационного взаимодействия местных и общих деформаций функции перемещений аппроксимируются на основе системы n последовательно сгущающихся сеток H_j ($j=1, \dots, n$) конечных элементов. Каждая из функций F^- , аппроксимирующая некоторую функцию перемещений F плоской или объемной задачи теории упругости, представляется в следующем виде [6]:

$$F^- = \sum_{j=1}^n F_j^-$$

где F_j^- — линейная комбинация базисных функций сетки H_j .
Сетки H_j и функции F_j^- строятся с выполнением условий

$$Y_k = X_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} X_i \quad (k=2, \dots, n), \quad Y_1 = X_1$$

где X_j ($j=1, \dots, n$) — множество узловых точек сетки H_j , Y_j ($j=1, \dots, n$) — множество узлов, для которых на сетке H_j вводятся базисные функции этапа j , откуда следует соотношение

$$F_j^-(X_i) = 0 \quad (j=2, \dots, n; i < j) \quad (1.1)$$

При $i < j$ границы конечных элементов сетки H_i не пересекают конечные элементы сетки H_j ; участки границы R_j^- (области определения F_j^- ($j > 1$)), не лежащие на границе R_1^- (области определения F_1^-), принадлежат границам конечных элементов сеток H_i ($i=1, \dots, j-1$); причем все узлы на этих границах принадлежат хотя бы одному из множеств Y_i ($i=1, \dots, j-1$).

Пример построения сеток H_j ($j=1, 2, 3$) для плоской задачи теории упругости показан на фиг. 1, где жирными линиями обозначены границы конечных элементов сетки H_1 .

Принимаемую схему аппроксимации перемещений можно отнести к классу иерархических аппроксимаций [11], характеризующихся некото-

рым отходом от локальных носителей метода конечных элементов в сторону традиционной схемы выбора базиса в методе Ритца. Такой принцип аппроксимации функций оказался также удобным для апостериорных оценок погрешностей решений и в адаптивном алгоритме поиска сеток оптимальной густоты [11, 12],

В основе алгоритма итерационного взаимодействия местных и общих деформаций лежит использование того факта, что вследствие выполнения условия (1.1) неизвестные узлов, связанные с функцией F_j^- ($j > 1$), фактически являются местными перемещениями относительно перемещений узлов множеств Y_i ($i=1, \dots, j-1$). Местным перемещениям соответствуют и местные деформации системы конечных элементов сетки H_j . Относительно слабое влияние местных деформаций на общие обеспечивает быструю сходимость следующего итерационного процесса решения системы линейных алгебраических уравнений [6], получающейся при минимизации дискретизированного функционала Лагранжа

$$K_{11}\delta_1^{(s)} = P_1 - \sum_{i=2}^n K_{1i}\delta_i^{(s-1)} \quad (1.2)$$

$$K_{jj}\delta_j^{(s)} = P_j - \sum_{i=1}^{j-1} K_{ji}\delta_i^{(s)} - \sum_{i=j+1}^n K_{ji}\delta_i^{(s-1)} \quad (j=2, \dots, n-1)$$

$$K_{nn}\delta_n^{(s)} = P_n - \sum_{i=1}^{n-1} K_{ni}\delta_i^{(s)}$$

где K_{ji} ($j, i=1, \dots, n$) — подматрица матрицы K системы уравнений, δ_j — вектор значений F_j^- в узлах множества Y_j по всем обобщенным перемещениям, s — номер итерации, P_j — вектор, объединяющий те элементы правых частей уравнений, которые определяются через базисные функции сетки H_j (здесь имеется в виду, что в векторах δ_j ($j=1, \dots, n$) исключены элементы, известные из кинематических граничных условий, и в соответствии с этим преобразованы матрицы K_{ji} и векторы P_j). Сетки H_j можно строить таким образом, чтобы матрицы K_{ji} ($j=2, \dots, n$) были блочнодиагональными (см. [8] и п. 3 статьи).

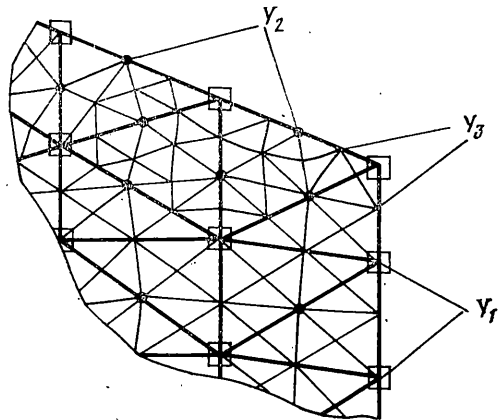
Итерационный процесс (1.2) представляет собой блочный метод Зейделя, в котором векторы δ_j выбраны таким образом, чтобы их физическая связь обеспечивала быстрое угасание погрешностей определения неизвестных. Этот процесс будет сходиться, если матрица K положительно определенная, что выполняется при кинематической неизменяемости дискретного объекта.

Решение задачи с помощью уравнений рассматриваемого алгоритма совпадает без учета погрешностей вычислений с решением, полученным на основе обычного метода конечных элементов с сеткой S , построенной с использованием всех межэлементных границ сеток H_j [6–8].

2. Скорость сходимости процедуры (1.2), как блочного метода Зейделя, может быть оценена с помощью следующих зависимостей [13]:

$$\|Z^{(s+1)}\|^2 \leq \beta \|Z^{(s)}\|^2 \quad (2.1)$$

$$\beta = \sup_{V \neq 0} [1 - 4(KV, V) / (BD^{-1}B^T V, V)]$$



Фиг. 1

где $\|Z^{(s)}\|$ — энергетическая норма вектора погрешностей Z определения вектора узловых неизвестных δ в итерации s , $B=2(D+L)$, D , L — операторы из разложения K на сумму блочнодиагональной, нижней и верхней треугольных матриц: $K=D+L+L^T$, V — варьируемый вектор узловых переменных.

При большом порядке матрицы K определение β требует выполнения значительного объема вычислений. Рассмотрим вопрос об упрощении оценки β для исследуемого алгоритма. Представим R_1^- в виде суммы линейно связанных областей R_{1k}^- , имеющих общие точки только по своим границам. Каждая из таких областей будет образована областями одного или нескольких конечных элементов сетки H_1 . Дискретную деформированную систему области R_{1k}^- обозначим N_{1k} . Введем вспомогательный дискретный объект N_* , образованный из исходной кинематически неизменяемой дискретной системы N путем удаления такого количества внешних связей и внутренних связей между N_{1k} , чтобы оставались только статически определимые связи этих типов по узлам Y_1 , а деформированная система была кинематически неизменяемой. При этом мы принимаем, что при построении H_j ($j=1, \dots, n$) и N выполнено естественное требование о наличии по узлам Y_1 внешних связей, обеспечивающих кинематическую неизменяемость N . Отметим, что в данном случае не имеет значения заданием конкретно каких разрезов выполнены условия образования N_* .

Так как величины перемещений во внешних связях не влияют на матрицу системы уравнений, в дальнейшем будем считать, что в кинематических граничных условиях задаются только нулевые перемещения.

Теорема 1. Имеет место неравенство

$$\beta \leq \sup_{V_* \neq 0} [1 - 4(K_* V_*, V_*) / (B_* D_*^{-1} B_*^T V_*, V_*)] \quad (2.2)$$

где звездочки указывают на принадлежность матриц и векторов к системе N_* .

Доказательство.

Матрица D_* содержит n диагональных блоков K_{*jj} матрицы K_* , которые являются обычными глобальными матрицами жесткости дискретных систем N_{*j} , образуемых в N_* с учетом (1.1) конечными элементами сеток H_j . Поэтому, если рассматривать элементы вектора $Q_* = B_*^T V_*$ как величины обобщенных узловых сил [14], то знаменатель C_* в (2.2) будет представлять собой удвоенную сумму энергий деформаций не связанных друг с другом систем N_{*j} при действии нагрузки Q_* :

$$C_* = (D_*^{-1} Q_*, Q_*) \quad (2.3)$$

В случае приложения сил Q_* к системам N_j , введенным в N аналогично N_{*j} в N_* , удвоенная сумма C энергий деформаций этих систем равна

$$C = (D^{-1} \Lambda Q_*, \Lambda Q_*) \quad (2.4)$$

где Λ — матрица, с помощью которой вектор Q_* переводится в вектор обобщенных узловых сил Q , действующих на N , в соответствии с глобальной нумерацией узлов в N_* и N ($Q = \Lambda Q_*$).

Напряженно-деформированные состояния в N_{*j} ($j=1, \dots, n$) при этом можно рассматривать как статически допустимые, но не действительные состояния систем N_j . Согласно вариационному принципу Кастильяно при любом Q_* имеет место неравенство

$$C \leq C_* \quad (2.5)$$

Числители T , T_* соответственно в выражениях (2.1) и (2.2), являющиеся удвоенными энергиями деформаций в N и N_* , запишем следующим образом:

$$T = \sum_{p=1}^M (K_p^e V_{p^e}, V_{p^e}), \quad T_* = \sum_{p=1}^M (K_{p^*}^e V_{p^*}^e, V_{p^*}^e) \quad (2.6)$$

где M — количество конечных элементов сетки S , K_p^e — матрица жесткости

p -ого конечного элемента сетки S , V_p^e, V_{*p}^e — векторы узловых перемещений конечного элемента p , принадлежащие соответственно пространствам W и W_* кинематически допустимых векторов перемещений узлов конечных элементов в системах N и N_* .

Принимая во внимание, что $W \subset W_*$, имеем неравенство

$$\inf_{V_p^e} (T_*/C_*) \leq \inf_{V_p^e} T (D_*^{-1} B_*^T V_* (V_p^e), B_*^T V_* (V_p^e))^{-1} \quad (2.7)$$

$$(p=1, \dots, M; \exists p: V_{*p}^e \neq 0; \exists p: V_p^e \neq 0)$$

где $V_*(V_p^e)$ — вектор узловых переменных системы N_* , соответствующий векторам V_p^e ($p=1, \dots, M$).

Нетрудно заметить, что

$$V_*(V_p^e) = \Lambda^T V \quad (2.8)$$

Тогда, согласно процедуре метода конечных элементов, матрицу K можно представить в виде $K = \Lambda K_* \Lambda^T$. Матрица Λ является блочнодиагональной, так как с ее помощью нагрузки для узлов N_j выражаются только через нагрузки, действующие на узлы N_{*j} . Поэтому

$$B = \Lambda B_* \Lambda^T \quad (2.9)$$

Учитывая (2.3) — (2.5), (2.8), (2.9), получим

$$(D_*^{-1} B_*^T V_* (V_p^e), B_*^T V_* (V_p^e)) \geq (D^{-1} \Lambda B_*^T V_* (V_p^e), \Lambda B_*^T V_* (V_p^e)) = (B D^{-1} B^T V, V) \quad (2.10)$$

Из (2.1), (2.7), (2.10) следует справедливость неравенства (2.2).

Теорема 2. Параметр β может быть оценен по формуле

$$\beta \leq \beta_1^2 = 1 - 4 \inf_k \left[\inf_{V_{N1k} \neq 0} \frac{(K_{N1k} V_{N1k}, V_{N1k})}{(B_{N1k} D_{N1k}^{-1} B_{N1k}^T V_{N1k}, V_{N1k})} \right] \quad (2.11)$$

где $K_{N1k}, V_{N1k}, B_{N1k}, D_{N1k}$ задаются для отдельной системы N_{1k} , полученной путем выделения N_{1k} из N и закрепления в пространстве статически определимыми связями.

Доказательство.

На основании определения вектора Q_* запишем

$$Q_{*j} = 2 \sum_{i=j}^n K_{*ji} V_{*i} = 2 A_{*j}^T \sum_{i=j}^n \Phi_i(\sigma_{*i}) \quad (2.12)$$

где Q_{*j} — вектор, объединяющий элементы вектора Q_* , связанные с узлами Y_j , K_{*ji} — подматрица матрицы K_* , V_{*i} — вектор элементов V_* , являющихся переменными узлов Y_i , A_{*j} — матрица деформаций [14] системы конечных элементов сетки N_j ; $\Phi_i(\sigma_{*i})$ — вектор-функция, характер которой зависит от применяемых сеток конечных элементов; σ_{*i} — вектор обобщенных напряжений в N_{*i} при узловых переменных V_{*i} . При этом

$$Q_{N1kj} = 2 A_{N1kj}^T \sum_{i=j}^n \Phi_i(\sigma_{N1ki}) \quad (2.13)$$

где $Q_{N1kj}, A_{N1kj}, \Phi_i, \sigma_{N1ki}$ вводятся для находящейся в N_* системы N_{1k} аналогично $Q_{*j}, A_{*j}, \Phi_i, \sigma_{*i}$ для N_* .

Структура матрицы A_{N1kj}^T в методе конечных элементов такова, что при умножении ее на произвольный вектор соответствующего порядка получается система самоуравновешенных обобщенных сил. В связи с тем, что рассматриваемые в N_* связи статически определимы, усилия в них от действия на узлы системы N_{1k} самоуравновешенной нагрузки Q_{N1kj} равны нулю. Поэтому будет справедлива зависимость

$$C_* = \sum_{h=1}^I C_{N1h} \quad (2.14)$$

где $C_{N_{1k}}$ — удвоенная энергия деформации систем N_{1kj} от действия сил $Q_{N_{1kj}}$ ($j=1, \dots, n$) в N_* , I — количество областей R_{1k} (N_{1kj} — дискретная система области R_{1k} на сетке H_j).

Заметим, что $(T_{N_{1k}} - \text{удвоенная энергия деформации } N_{1k} \text{ в } N_*)$:

$$T_* = \sum_{k=1}^I T_{N_{1k}} \quad (2.15)$$

Величины $T_{N_{1k}}$, $C_{N_{1k}}$ являются функциями от $\sigma_{N_{1ki}}$. Аналогичные им величины $T_{N_{1k}}^z$, $C_{N_{1k}}^z$ системы N_{1k}^z , выражаемые числителем и знаменателем в (2.11), являются такими же функциями от обобщенных напряжений $\sigma_{N_{1ki}}^z$, кинематически допустимых в N_{1k}^z .

Введем обозначение

$$\alpha = \inf_k [\inf_{v_{N_{1k}} \neq 0} (T_{N_{1k}}^z / C_{N_{1k}}^z)] \quad (2.16)$$

Тогда, используя (2.14), (2.15) и то, что область определения $\sigma_{N_{1ki}}$ принадлежит области определения $\sigma_{N_{1ki}}^z$, установим следующее соотношение

$$T_* / C_* \geq \inf_{\sigma_{N_{1ki}}^z} \left[\left(\sum_{k=1}^I T_{N_{1k}}^z \right) \left(\sum_{k=1}^I C_{N_{1k}}^z \right)^{-1} \right] (v_* \neq 0; \exists k, i: \sigma_{N_{1ki}}^z \neq 0) \quad (2.17)$$

откуда следует

$$\sup_{v_* \neq 0} (1 - 4T_* / C_*) \leq 1 - 4\alpha \quad (2.18)$$

Учитывая (2.2), (2.16), (2.18), приходим к неравенству (2.14), что и требовалось доказать.

Принимая во внимание, что матрица $K_{N_{1k}}$ является симметричной и положительно определенной, а матрица $G_{N_{1k}} = B_{N_{1k}} D_{N_{1k}} B_{N_{1k}}^T$ — симметричной, и учитывая, что согласно условию сходимости метода Зейделя (в данном случае для N_{1k}^z) $\alpha \geq 0$, получим

$$\alpha^{-1} = \sup_k (\sup_q \lambda_{qk}) \quad (2.19)$$

где λ_{qk} — q -ое собственное число в обобщенной проблеме собственных значений

$$G_{N_{1k}} v_{N_{1k}} = \lambda K_{N_{1k}} v_{N_{1k}} \quad (2.20)$$

В результате приходим к следующей формуле для оценки β

$$\beta \leq \beta_1^2 = 1 - 4 [\sup_k (\sup_q \lambda_{qk})]^{-1} \quad (2.21)$$

Для равномерных сеток при задании одинаковых систем N_{1k}^z достаточно определить одно значение $\lambda^0 = \lambda_k$.

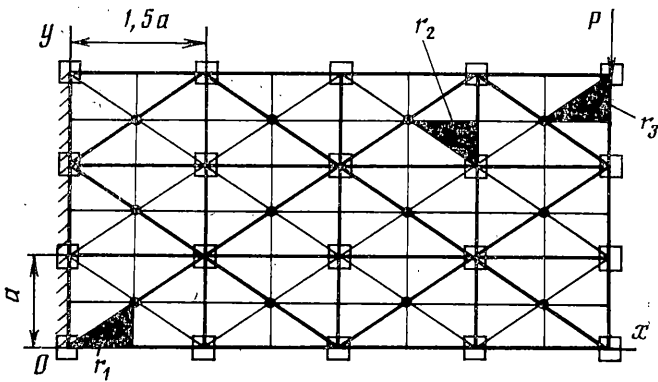
3. Проанализируем результат вычисления β_1^2 по формуле (2.21) для примера расчета плоского напряженного состояния в изотропной пластине (фиг. 2), имеющей толщину h и коэффициент Пуассона материала 0,3. Пластина нагружена силой P .

Использовали три равномерные последовательно сгущающиеся сетки H_j конечных элементов. Сетки строились таким образом, чтобы ни один конечный элемент сетки H_j ($j=2, 3$) не был связан более, чем с одним узлом множества Y_j . При этом матрицы K_{jj} ($j=2, 3$) являются блочнодиагональными с порядком каждого блока 2×2 . До проведения итерационного процесса в этом случае необходимо выполнить триангуляцию матрицы K_{11} для грубой сетки H_1 и ряда матриц порядка 2×2 .

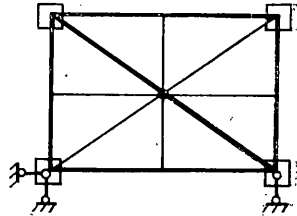
Дискретная система N разделялась на одинаковые (без учета характера расположения в пространстве) системы N_{1k}^z (фиг. 3). Было вычислено значение $\lambda^0 = 16,85$, т. е. в соответствии с (2.1), (2.21) $\beta_1^2 = 0,763$, $\|Z^{(s+1)}\| \leq 0,873 \|Z^{(s)}\|$.

Некоторые результаты расчета рассматриваемого примера с помощью алгоритма итерационного взаимодействия местных и общих деформаций и прямым методом представлены в таблице. Три пары колонок σ^o и ϕ соответствуют областям r_1, r_2, r_3 на фиг. 2; $\sigma_x^o = \sigma_x a h / |P|$; σ_x — нормальные напряжения по оси xz .

$\phi_x = |\sigma_x^{(s)} - \sigma_{x\alpha}^{(s-1)}| / |\sigma_x^{(s-1)} - \sigma_{x\alpha}^{(s-2)}|$ — величина, характеризующая скорость изменения абсо-



Фиг. 2



Фиг. 3

лютных значений погрешностей определения σ_x ; σ_{xd} — напряжение, полученное в результате прямого решения задачи по сетке S ; σ_y° , φ_y определяются аналогично σ_x° , φ_x . Решения, полученные прямым методом на сетках S и H_1 , приведены в предпоследней и последней строках таблицы соответственно. Из таблицы видно, что в областях r_1 , r_2 погрешность рассматриваемых напряжений убывает в каждой из первых двенадцати итераций. Для 4–12 итераций $0,76\beta_1 \leq \varphi_x \leq 0,89\beta_1$. В итерациях 1, 2 φ_x существенно меньше β_1 . Для области r_3 , находящейся в зоне действия силы P , где поле напряжений в континуальной задаче имеет сингулярность, изменение погрешности определения σ_y в итерациях 1–7 носит сложный характер, в 9–12 итерациях: $0,92\beta_1 \leq \varphi_y \leq 1,02\beta_1$.

Относительная погрешность вычисления наибольшего по абсолютной величине компонента тензоров напряжений дискретной системы (σ_x области r_1) в четвертой итерации равна 3,3%, в шестой — 1,8%.

Таблица

s	σ_x°	φ_x	σ_x°	φ_x	σ_y°	φ_y
0	0	—	0	—	0	—
1	-2,6488	0,24	0,5333	0,27	-1,3290	0,41
2	-3,1656	0,39	0,6135	0,59	-1,8610	0,42
3	-3,3124	0,54	0,6437	0,74	-2,0973	0,39
4	-3,3724	0,66	0,6642	0,76	-2,2048	0,30
5	-3,4052	0,72	0,6798	0,76	-2,2523	0,035
6	-3,4265	0,74	0,6916	0,76	-2,2712	13
7	-3,4417	0,75	0,7004	0,76	-2,2767	1,3
8	-3,4529	0,76	0,7070	0,77	-2,2761	0,98
9	-3,4608	0,76	0,7120	0,77	-2,2732	0,89
10	-3,4679	0,75	0,7159	0,77	-2,2696	0,84
11	-3,4729	0,75	0,7188	0,78	-2,2661	0,82
12	-3,4768	0,74	0,7211	0,78	-2,2630	0,80
	-3,4877	—	0,7290	—	-2,2507	—
	-2,3459	—	0,3604	—	-1,1478	—

Как показали расчеты ряда примеров плоской задачи теории упругости, при $s > 3$ значение β_1 может непосредственно служить для приближенной оценки скорости убывания погрешностей напряжений в областях, удаленных от места действия локальных нагрузок более, чем 1–2 конечных элемента сетки S . Для первых 2–3 итераций скорость сходимости по напряжениям, как правило, бывает значительно выше, чем минимально возможная по энергетической норме при расчете отдельных систем N_{1k}^2 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоренко Р. П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1, № 5. С. 922–927.
2. Brandt A. Multilevel adaptive computations in fluid dynamics // AIAA Journal. 1980. V. 18. № 10. P. 1165–1172.
3. Булгаков В. Е., Золотов А. Б., Белый М. В. Полуитерационный метод решения пространственных краевых задач расчета сооружений // Строит. механика и расчет сооружений. 1985. № 6. С. 38–40.

4. Паутов А. Н. О стратегии вычислительного процесса в численном анализе деформируемых тел // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Численная реализация решения физико-механических задач. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1984. Вып. 26. С. 97–101.
5. Паутов А. Н., Толкачев И. Н., Шуваев Д. Н. Многосеточный алгоритм в численном анализе двумерных задач теории упругости // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Методы решения задач упругости и пластичности. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1985. Вып. 29. С. 36–47.
6. Серник И. Н. О введении поэтапных аппроксимаций для расчета вагонных конструкций по методу конечных элементов // Вопросы строительной механики кузовов вагонов. Брянск: Изд-е Брянск. ин-та трансп. машиностроения, 1983. С. 133–144.
7. Серник И. Н. Некоторые вопросы исследования скорости сходимости алгоритма поэтапных аппроксимаций // Строит. механика и расчет сооружений, 1985. № 5. С. 14–15.
8. Серник И. Н. Трехэтапная аппроксимация перемещений в методе конечных элементов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 183–187.
9. Hackbusch W. Introduction to multi-grid methods for the numerical solution of boundary value problems // Computational methods for turbulent, transonic, and viscous flows, Berlin e.a.; Springer, 1983. P. 45–92.
10. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
11. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимации. М.: Мир, 1986. 318 с.
12. Gago J. P. de S. R., Kelly D. W., Zienkiewicz O. C., Babuska I. A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Pt II. Adaptive mesh refinement // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1983. V. 19, № 11. P. 1621–1656.
13. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 591 с.
14. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.

Брянск

Поступила в редакцию
6.V.1987