МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1989

УДК 539.3

В. В. ЕЛИСЕЕВ

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ УПРУГИХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Сопоставляются трехмерная и одномерная модели упругого призматического стержня при нагрузке на торцах. Вычислены тензорные упругие модули – коэффициенты в определяющих уравнениях, связывающих силовые факторы с мерами деформации стержня.

1. Рассмотрим одномерную модель стержня – деформируемую материальную кривую. Уравнения линейной статики стержня таковы:

$$\mathbf{Q}'+\mathbf{q}=0, \qquad \mathbf{M}'+\mathbf{t}\times\mathbf{Q}+\mathbf{m}=0 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{M}=\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\theta}'+\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\gamma}, \qquad \mathbf{Q}=\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\theta}'\cdot\mathbf{C} \qquad (\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{u}'-\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{t}) \tag{1.2}$$

Равенства (1.1) выражают баланс сил и моментов. Векторы $\mathbf{Q}(s)$ и $\mathbf{M}(s)$ – это сила и момент, с которыми частица с дуговой координатой $s+0$ действует на частицу с координатой $s-0$. $\mathbf{q}(s)$ и $\mathbf{m}(s)$ – внешние сила и момент на единицу длины. $\mathbf{t}$ – орт касательной, штрих означает дифференцирование по s. Перемещение частицы стержня задается векторами трансляции $\mathbf{u}(s)$ и малого поворота $\boldsymbol{\theta}(s)$. Определяющие уравнения (1.2) связывают векторы деформации $\boldsymbol{\theta}'$ и $\boldsymbol{\gamma}$ с $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{M}$ посредством тензоров жесткости $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$. Здесь и далее используется язык прямого тензорного исчисления [1].

$\mathbf{A}$ – тензор жесткости на изгиб и кручение, $\mathbf{B}$ – соответственно на сдвиг и растяжение (оба тензора симметричны); несимметричный тензор $\mathbf{C}$ характеризует соответствующие перекрестные эффекты.

Уравнения (1.1), (1.2) следуют из общего уравнения статики (принципа виртуальной работы), записанного для произвольного куска стержня

$$\int_{s_1}^{s_2}(\mathbf{q}\cdot\delta\mathbf{u}+\mathbf{m}\cdot\delta\boldsymbol{\theta})\,ds+(\mathbf{Q}\cdot\delta\mathbf{u}+\mathbf{M}\cdot\delta\boldsymbol{\theta})\Big|_{s_1}^{s_2}=\int_{s_1}^{s_2}\delta\Pi\,ds \tag{1.3}$$

Интеграл в левой части выражает работу распределенных нагрузок, второй член в левой части – работа сил и моментов на концах, в правой части – работа внутренних сил с обратным знаком, которая в упругом теле равна вариации энергии деформации. В (1.3) может быть неизвестным выражение плотности энергии Π. Но на виртуальном перемещении без деформации $\delta\Pi=0$, и тогда (1.3) приводит к (1.1). Далее из (1.3) получим $\delta\Pi=\mathbf{M}\cdot\delta\boldsymbol{\theta}'+\mathbf{Q}\cdot\delta\boldsymbol{\gamma}$, откуда следует, что $\Pi=\Pi(\boldsymbol{\theta}',\boldsymbol{\gamma})$ и

$$\mathbf{M}=\partial\Pi/\partial\boldsymbol{\theta}', \qquad \mathbf{Q}=\partial\Pi/\partial\boldsymbol{\gamma} \tag{1.4}$$

В линейной теории достаточно принять Π квадратичной формой – тогда (1.4) превратится в (1.2).

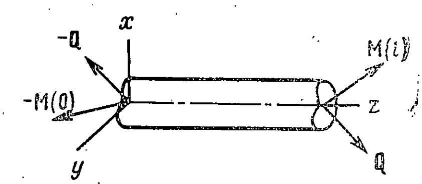
Уравнения (1.1)–(1.4) обладают достоверностью теоремы, однако требуется еще выяснить, в каких случаях деформация стержня как трехмерного тела описывается этими уравнениями и как определить упругие модули – тензоры $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$.

Во многих работах показано, что классическая теория стержней ($\gamma=0$) отвечает главным членам асимптотики трехмерной задачи теории упругости при малой относительной толщине стержня [2—4]. Эффекты растяжения и сдвига ($\gamma\neq0$) описываются следующими членами асимптотики; построение их громоздко, и единого мнения о них в литературе нет [5, 6].

Данная работа посвящена определению тензорных упругих модулей стержня на основе задачи Сен-Венана.

2. Рассмотрим задачу Сен-Венана о призматическом стержне [1]. Нагрузка на торце $z=L$ характеризуется главным вектором $\mathbf{Q}$ и главным моментом $\mathbf{M}(L)$, на торце $z=0$ приложены уравновешивающие нагрузки $-\mathbf{Q}$ и $-\mathbf{M}(0)$.

Тензор напряжений представляется в виде $\mathbf{T}=\sigma_z\mathbf{tt}+\boldsymbol{\tau}\mathbf{t}+\mathbf{t}\boldsymbol{\tau}$. Здесь $\boldsymbol{\tau}$ — вектор касательного напряжения в поперечном сечении, $\mathbf{t}$ — орт оси z. Из уравнений теории упругости в напряжениях [1] следует



$$\sigma_z=a+\mathbf{b}\cdot\mathbf{r},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{\tau}=-\mathbf{b}'\cdot\mathbf{r},\quad \Delta\boldsymbol{\tau}=-(1+\nu)^{-1}\mathbf{b}' \tag{2.1}$$

причем a и вектор $\mathbf{b}$ — линейные функции z, $\boldsymbol{\tau}$ не зависит от z и обозначено $\mathbf{b}'=d\mathbf{b}/dz$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор в сечении, ν — коэффициент Пуассона. Из условий равновесия части стержня между сечением z и торцом $z=L$ следует

$$\mathbf{M}(z)=\mathbf{M}(L)+(L-z)\mathbf{t}\times\mathbf{Q},\quad a=Q_z/\Omega,\quad \mathbf{b}=\mathbf{J}^{-1}\times\mathbf{t}\cdot\mathbf{M}_0$$

$$\mathbf{b}'=-\mathbf{J}^{-1}\cdot\mathbf{Q}_0,\quad \mathbf{J}=\int_\Omega \mathbf{rr}\,d\Omega$$

где Ω — площадь сечения, ось z проходит через его центр тяжести. Нулевой нижний индекс у векторных и тензорных величин обозначает их составляющие в плоскости сечения ($\mathbf{M}_0=\mathbf{M}-M_z\mathbf{t}$ и так далее).

Представив касательное напряжение в виде $\boldsymbol{\tau}=\nabla\varphi+\nabla\psi\times\mathbf{t}$, из (2.1) получим

$$\Delta\varphi=-\mathbf{b}'\cdot\mathbf{r},\quad \Delta\psi=-\nu(1+\nu)^{-1}\mathbf{b}'\times\mathbf{t}\cdot\mathbf{r}-2\mu\alpha \tag{2.2}$$

μ — модуль сдвига, α — некая константа. На свободном контуре Γ сечения имеем $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}=\partial_n\varphi+\partial_l\psi=0$, где ∂_n, ∂_l — символы дифференцирования по нормали и дуговой координате на Γ. Не ограничивая общности, можно принять $\partial_n\varphi=\partial_l\psi=0$, а в рассматриваемом далее случае односвязного сечения положить $\psi|_\Gamma=0$.

Для определения α рассмотрим крутящий момент

$$M_z\mathbf{t}=\int_\Omega \mathbf{r}\times\boldsymbol{\tau}\,d\Omega=\int_\Omega \mathbf{r}\times\nabla\varphi\,d\Omega-\mathbf{t}\left(\oint_\Gamma \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}\psi\,dl-2\int_\Omega\psi\,d\Omega\right) \tag{2.3}$$

Контурный интеграл исчезает. M_z можно выразить через решение задачи кручения [1] (Φ — функция напряжений; W — функция депланации): $\Delta\Phi=-2$, $\Phi|_\Gamma=0$, $\Delta W=0$, $\partial_n W|_\Gamma=\mathbf{n}\times\mathbf{r}\cdot\mathbf{t}$ посредством формул

$$\begin{gathered}2\int u\,d\Omega=-\int\Phi\Delta u\,d\Omega-\oint u\partial_n\Phi\,dl\\ \int\mathbf{r}\times\nabla u\cdot\mathbf{t}\,d\Omega=-\oint W\partial_n u\,dl+\int W\Delta u\,d\Omega\end{gathered} \tag{2.4}$$

которые вытекают из формулы Грина $\int(u\Delta v-v\Delta u)\,d\Omega=\oint(u\partial_n v-v\partial_n u)\,dl$ при $v=\Phi$ и $v=W$. Используя (2.4) в (2.3), получим

$$M_z=\int(W\Delta\varphi-\Phi\Delta\psi)\,d\Omega-\oint(W\partial_n\varphi+\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}\psi+\psi\partial_n\Phi)\,dl$$

Контурные интегралы равны нулю, и с учетом (2.2) заключаем

$$M_z=-\mathbf{b}'\cdot\left[\int \mathbf{r}W\,d\Omega+\nu(1+\nu)^{-1}\int \mathbf{r}\Phi\,d\Omega\times\mathbf{t}\right]+\mu\alpha C \tag{2.5}$$

где $C=2\int\Phi\,d\Omega$ — геометрическая жесткость на кручение. Соотношение (2.5) известно [1, 7]. Определив центр изгиба как точку, при приложении силы в которой будет $\alpha=0$, получим следующее выражение радиус-вектора центра изгиба

$$\mathbf{r}^*=\mathbf{t}\times\mathbf{J}^{-1}\cdot\left[\int \mathbf{r}W\,d\Omega+\nu(1+\nu)^{-1}\int \mathbf{r}\Phi\,d\Omega\times\mathbf{t}\right] \tag{2.6}$$

Для определения перемещений $u(r, z)$ запишем соотношения закона Гука в виде

$$\nabla\mathbf{u}_0{}^s=-(\nu/E)(a+\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\mathbf{E}_0,\qquad \partial_z u_z=(a+\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})/E \tag{2.7}$$

$$\partial_z\mathbf{u}_0+\nabla u_z=(\nabla\varphi+\nabla\psi\times\mathbf{t})/\mu \tag{2.8}$$

E — модуль Юнга, $\mathbf{E}_0$ — единичный тензор в плоскости сечения, индекс s вверху означает симметрирование. Во всех формулах фигурирует составляющая оператора ∇ в плоскости. Из (2.7) следует

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_0&=-(\nu/E)\left(a\mathbf{r}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}\mathbf{r}-{}^1/_2\mathbf{b}\mathbf{r}^2\right)+\mathbf{U}_0(z)+\omega(z)\mathbf{t}\times\mathbf{r}\\ u_z&=E^{-1}\{az+[\mathbf{b}(L)z-(Lz-z^2/2)\mathbf{b}']\cdot\mathbf{r}\}+U_z(\mathbf{r})\end{aligned} \tag{2.9}$$

функции $\mathbf{U}_0$, ω, U_z пока произвольны. Подставим (2.9) в (2.8). Взяв от обеих частей получившегося равенства ротор, получим $\omega'=\alpha$, взяв же дивергенцию, придем к уравнению

$$\Delta U_z=-2E^{-1}\mathbf{b}'\cdot\mathbf{r} \tag{2.10}$$

Отделяя далее в (2.8) функции только z и только $\mathbf{r}$, получим

$$\mathbf{U}_0'+E^{-1}[\mathbf{b}(L)z-(Lz-z^2/2)\mathbf{b}']=\text{const}=0 \tag{2.11}$$

$$\nabla[U_z-(\nu/4E)\mathbf{b}'\cdot\mathbf{r}r^2-\varphi/\mu]=\nabla[\psi/\mu+(\nu/4E)\mathbf{b}'\times\mathbf{t}\cdot\mathbf{r}r^2+\alpha r^2/2]\times\mathbf{t} \tag{2.12}$$

Уравнение (2.11) определяет прогиб в элементарной теории балки, отброшенная константа соответствует перемещению твердого тела. В квадратных скобках в (2.12) стоят сопряженные гармонические функции. Значит, U_z можно определить интегрированием через φ и ψ, не решая уравнения (2.10).

3. Перейдем к определению упругих модулей в одномерной модели стержня по решению задачи Сен-Венана. Аналогично [8], потребуем равенства энергии деформации в трехмерной и одномерной моделях. Для обеих моделей рассмотрим энергию деформации на единицу длины, выраженную через $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{M}$. Заметим, что связь перемещений и поворотов в одномерной модели с полем перемещений в трехмерной модели пока не известна.

В трехмерной модели энергия на единицу длины равна

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\frac{\sigma_z^2}{E}+\frac{\tau^2}{\mu}\right)d\Omega \tag{3.1}$$

$$\int\sigma_z^2\,d\Omega=Q_z^2/\Omega+\mathbf{M}_0\cdot\mathbf{I}^{-1}\cdot\mathbf{M}_0 \tag{3.2}$$

$$\int\tau^2\,d\Omega=\oint(\varphi\partial_n\varphi+\psi\partial_n\psi-2\mathbf{n}\times\psi\nabla\varphi\cdot\mathbf{t})\,dl-\int(\varphi\Delta\varphi+\psi\Delta\psi)\,d\Omega \tag{3.3}$$

где $\mathbf{I}=-\mathbf{t}\times\mathbf{J}\times\mathbf{t}$ — обычный тензор инерции сечения. В (3.3) контурный интеграл равен нулю, а $\Delta\varphi$ и $\Delta\psi$ определены равенствами (2.2). Представим потенциалы φ и ψ в виде

$$\begin{gathered}\varphi=-\mathbf{b}'\cdot\boldsymbol{\varphi},\qquad \psi=-\nu(1+\nu)^{-1}\mathbf{b}'\times\mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\psi}+\mu\alpha\Phi\\ \Delta\boldsymbol{\varphi}=\Delta\boldsymbol{\psi}=\mathbf{r},\qquad \partial_n\boldsymbol{\varphi}|_\Gamma=\boldsymbol{\psi}|_\Gamma=0\end{gathered}\tag{3.4}$$

Введем также векторы

$$\mathbf{d}=\mathbf{J}^{-1}\cdot\int\mathbf{r}W\,d\Omega,\qquad \boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{J}^{-1}\cdot\nu(1+\nu)^{-1}\int\mathbf{r}\Phi\,d\Omega\times\mathbf{t}$$

тогда $\mathbf{r}^*=\mathbf{t}\times(\mathbf{e}+\boldsymbol{\varepsilon})$, и (2.5) принимает вид

$$\mu\alpha C=M_z+\mathbf{Q}_0\cdot(\mathbf{e}+\boldsymbol{\varepsilon})\tag{3.5}$$

Подставив (3.4) и (3.5) в (3.3), получим

$$\int\tau^2\,d\Omega=\mathbf{Q}_0\cdot(\Omega\mathbf{K})^{-1}\cdot\mathbf{Q}_0+(M_z^2+2M_z\mathbf{Q}_0\cdot\mathbf{e})/C\tag{3.6}$$

$$(\Omega\mathbf{K})^{-1}=\mathbf{J}^{-1}\cdot\left[-\int\boldsymbol{\varphi}\mathbf{r}\,d\Omega+\nu^2(1+\nu)^{-2}\mathbf{t}\times\int\boldsymbol{\psi}\mathbf{r}\,d\Omega\times\mathbf{t}\right]\cdot\mathbf{J}^{-1}+(\mathbf{e}\mathbf{e}-\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon})/C\tag{3.7}$$

Равенства (3.1), (3.2) и (3.6) дают искомое выражение энергии. Проварьируем его:

$$\begin{gathered}\delta\Pi=Q_z\delta Q_z/(E\Omega)+\mathbf{M}_0\cdot(E\mathbf{I})^{-1}\cdot\delta\mathbf{M}_0+\mathbf{Q}_0\cdot(\mu\Omega\mathbf{K})^{-1}\cdot\delta\mathbf{Q}_0+\\ +[(M_z+\mathbf{Q}_0\cdot\mathbf{e})\delta M_z+M_z\mathbf{e}\cdot\delta\mathbf{Q}_0]/(\mu C)\end{gathered}\tag{3.8}$$

С другой стороны, согласно (1.4) должно быть

$$\delta\Pi=\boldsymbol{\theta}_0'\cdot\delta\mathbf{M}_0+\theta_z'\delta M_z+\boldsymbol{\gamma}_0\cdot\delta\mathbf{Q}_0+\gamma_z\delta Q_z$$

Сравнивая это равенство с (3.8), заключаем

$$\gamma_z=Q_z/(E\Omega),\qquad \boldsymbol{\theta}_0'=(E\mathbf{I})^{-1}\cdot\mathbf{M}_0\tag{3.9}$$

$$\theta_z'=(M_z+\mathbf{Q}_0\cdot\mathbf{e})/(\mu C)\tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_0=(\mu\Omega\mathbf{K})^{-1}\cdot\mathbf{Q}_0+\mathbf{e}M_z/(\mu C)\tag{3.11}$$

Это и есть искомые определяющие уравнения. Разрешая их относительно $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{M}$, легко получить выражения тензоров жесткости в (1.2). В (3.9) и (3.10) фигурируют известные жесткости на растяжение $E\Omega$, изгиб $E\mathbf{I}$ и кручение μC. Тензор $\mu Q\mathbf{K}$ в (3.11) есть жесткость на сдвиг, тензор коэффициентов сдвига $\mathbf{K}$ имеет вид (3.7). Связь изгиба и кручения определяется вектором $\mathbf{e}$. Сравнивая (3.10) и (3.5), приходим к выводу, что положение центра изгиба задается не формулой (2.6), а более простой формулой

$$\mathbf{r}^{**}=\mathbf{t}\times\mathbf{J}^{-1}\cdot\int\mathbf{r}W\,d\Omega\tag{3.12}$$

4. Рассмотрим подробнее тензор коэффициентов сдвига (3.7); можно доказать, что он симметричен. Идея вычисления коэффициента сдвига по энергии деформации принадлежит Тимошенко. Однако и он, и его последователи опирались на приближенную формулу Журавского [9].

Результаты решения краевых задач (3.4) и вычислений по формуле (3.7) таковы:

1°. Прямоугольник $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant b$:

$$\varphi_x={}^1/_6(x^3-3a^2x)\tag{4.1}$$

$$\psi_x=\frac{16b^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\left[a\,\mathrm{sh}\frac{2k+1}{2b}\pi x\left(\mathrm{sh}\frac{2k+1}{2b}\pi a\right)^{-1}-x\right]\cos\frac{2k+1}{2b}\pi y$$

$$K_{xx}=(1+\nu)^2\left[\frac{6}{5}(1+2\nu+2\nu^2)-\frac{576b\nu^2}{a\pi^5}\sum_{k=1,3,\ldots}\frac{1}{k^5}\mathrm{cth}\frac{k\pi b}{2a}+\frac{b^2}{a^2}\nu^2\right]^{-1}$$

Величины с индексом y получаются соответствующими переобозначениями. При $b/a \to 0$ из формулы (4.1) следует $K_{xx} \to 5/6$ независимо от величины ν.

2°. Эллипс $x^2/a^2+y^2/b^2 \leqslant 1$:

$$\varphi_x = a^2x[(b^2/a^2+2)(x^2/3-a^2)+y^2]/(2b^2+6a^2)$$

$$\psi_x = a^2b^2x(x^2/a^2+y^2/b^2-1)(2b^2+6a^2)$$

$$K_{xx} = {}^3/_2(b^2/a^2+3)[5+2b^2/a^2+\nu^2(1+\nu)^{-2}b^4/a^4]^{-1}$$

В случае круга эта формула дает

$$K_{xx} = 6(1+\nu)^2(7+14\nu+8\nu^2)^{-1} \tag{4.2}$$

Формулы (4.1), (4.2) подтверждаются и результатами асимптотического анализа трехмерной задачи [6]. Выражение (4.2) иным путем получено в [10].

5. Формула (3.12) для координат центра изгиба используется в технической теории тонкостенных стержней. В [7] она была предложена в качестве приближений, вариационным методом эта формула получена в [11]. Есть основания считать ее точной. Между формулами (3.12) и (2.6) нет противоречия, поскольку $\theta_z' \neq \alpha$.

Выясним смысл $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\theta}$ в одномерной модели, т. е. их связь с полем перемещений в трехмерной модели.

Постулируем равенство виртуальной работы напряжений в сечении для обеих моделей

$$\mathbf{Q}\cdot\delta\mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{M}\cdot\delta\boldsymbol{\theta} = \int\limits_{\Omega} (\boldsymbol{\tau}\cdot\delta\mathbf{u}_0^{(3)} + \sigma_z\delta u_z^{(3)})\,d\Omega \tag{5.1}$$

Верхний индекс у перемещения указывает на принадлежность к одномерной или трехмерной модели. Результаты анализа напряжений в п. 2 можно представить в виде

$$\boldsymbol{\tau} = [-(\nabla\varphi+\nu(1+\nu)^{-1}\mathbf{t}\times\nabla\psi\times\mathbf{t})\cdot\mathbf{J}^{-1}+\nabla\Phi\times\mathbf{t}(\mathbf{e}+\boldsymbol{\varepsilon})/C]\cdot\mathbf{Q}_0+\nabla\Phi\times\mathbf{t}M_z/C$$

$$\sigma_z = Q_z/\Omega - \mathbf{M}_0\cdot\mathbf{t}\times\mathbf{J}^{-1}\cdot\mathbf{r}$$

Подставив эти выражения в (5.1) и приравняв там множители при $\mathbf{Q}_0$, Q_z, $\mathbf{M}_0$, M_z в обеих частях равенства, придем к искомым представлениям перемещений и поворотов

$$\theta_z = C^{-1}\int \phi\nabla\times\mathbf{u}_0^{(3)}\cdot\mathbf{t}\,d\Omega, \qquad \boldsymbol{\theta}_0 = -\mathbf{t}\times\mathbf{J}^{-1}\cdot\int u_z^{(3)}\,\mathbf{r}\,d\Omega \tag{5.2}$$

$$u_z^{(1)} = \Omega^{-1}\int u_z^{(3)}d\Omega, \quad \mathbf{u}_0^{(1)} = -\int \mathbf{u}_0^{(3)}\cdot(\nabla\varphi+\nu(1+\nu)^{-1}\mathbf{t}\times\nabla\psi\times\mathbf{t})\,d\Omega\cdot\mathbf{J}^{-1}+\theta_z(\mathbf{e}+\boldsymbol{\varepsilon})$$

Образуем теперь выражения векторов деформации $\boldsymbol{\theta}'$ и $\boldsymbol{\gamma}$, подставив в правые части формул (5.2) выражения $\mathbf{u}^{(3)}$ из п. 2. Можно показать, что результатом будут снова определяющие уравнения (3.9)–(3.11).

Автор благодарит В. А. Пальмова за полезное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
2. *Понятовский В. В.* Применение асимптотического метода интегрирования к задаче о равновесии тонкого бруса, произвольно нагруженного по боковой поверхности // Изв. АН СССР. МТТ, 1968. № 5. С. 139–143.
3. *Елисеев В. В.* Применение асимптотического метода в задаче о равновесии криволинейного стержня // Изв. АН СССР. МТТ, 1977. № 3. С. 145–150.
4. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
5. *Бердичевский В. Л., Квашнина С. С.* Об уравнениях, описывающих поперечные колебания упругих стержней // ПММ, 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 120–135.
6. *Елисеев В. В.* О построении уточненной модели упругой балки // Тр. Ленингр. политехн. ин-та № 386, 1982. С. 106–116.

7. *Джанелидзе Г. Ю.* Определение координат центра жесткости по различным функциям напряжений при кручении // Тр. Ленингр. политехн. ин-та, № 226, 1963. С. 93–102.
8. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
9. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 736 с.
10. *Green A. E., Naghdi P. M., Wenner M. L.* On the theory of rods // Proc. R. Soc. Lond., A337, 1974. P. 451–507.
11. *Reissner E., Tsai W. T.* Considerations on the centres of shear and of twist in the theory of beams. В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972. С. 403–408.

Ленинград

Поступила в редакцию
30.XII.1986